



HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES.

ANNÉE M. DCCXXX.

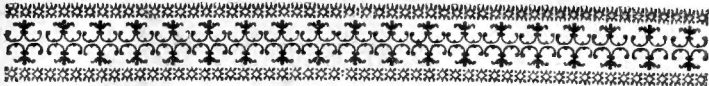
Avec les Mémoires de Mathématique & de Physique,
pour la même Année.

Tirés des Registres de cette Académie.



A . P A R I S ,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DCCXXXII.



T A B L E

P O U R

L' H I S T O I R E.

PHYSIQUE GÉNÉRALE.

<i>SUR quelques Expériences de l'Aiman.</i>	Page 1
<i>Sur la Lumière Septentrionale, & sur une autre Lumière.</i>	6
<i>Sur une nouvelle Construction de Thermometre.</i>	9
<i>Sur la nature de la Terre en général, & sur ses caractères.</i>	23

A N A T O M I E.

<i>Sur le Cristallin.</i>	33
<i>Diverses Observations Anatomiques.</i>	39

C H I M I E.

<i>Sur les Boüillons de Viande.</i>	45
<i>Sur un grand nombre de Phosphores nouveaux.</i>	48
<i>Observation Chimique.</i>	52

B O T A N I Q U E.

<i>Sur les Greffes.</i>	55
<i>Sur l'Anatomie de la Poire.</i>	59
<i>Observations Botaniques.</i>	64

T A B L E.

G E O M E T R I E.

<i>Sur une Théorie générale des Lignes du quatrième ordre.</i>	68
<i>Sur les Courbes Tautocrones.</i>	87
<i>Sur la Courbe aux approches égales.</i>	94

A S T R O N O M I E.

<i>Sur la Comete de 1729 & de 1730.</i>	98
<i>Sur une Observation de l'Eclipse de Lune du 8 Août 1729, faite à la Nouvelle Orléans dans la Louisiane.</i>	104

G E O G R A P H I E. 106

M E C H A N I Q U E.

<i>Sur les Voûtes.</i>	107
<i>Sur le mouvement des Eaux.</i>	110
<i>Machines ou Inventions approuvées par l'Académie en 1730.</i>	115
<i>E'loge de M. de Valincourt.</i>	117
<i>E'loge de M. du Verney.</i>	123
<i>E'loge de M. le Comte Marsigli.</i>	132





T A B L E

P O U R

L E S M E M O I R E S.

*O*BSERVATIONS Météorologiques faites à Aix par M.
DE MONTVALON, Conseiller au Parlement d'Aix,
comparées avec celles qui ont été faites à Paris. Par M.
CASSINI. Page 1

*Mémoire sur le Cristallin de l'Oeil de l'Homme, des Animaux à
quatre pieds, des Oiseaux & des Poissons.* Par M. PETIT
le Médecin. 4

*Solution fort simple d'un Probleme Astronomique ; d'où l'on tire
une Méthode nouvelle de déterminer les Nœuds des Planetes.*
Par M. GODIN. 26

Mémoire sur le Sel lixiviel du Gayac. Par M. BOURDELIN. 33

Examen & Résolution de quelques Questions sur les Jeux. Par
M. NICOLE. 45

*De la Méchanique avec laquelle diverses Especes de Chenilles, &
d'autres Insectes, plient & roulent des feüilles de Plantes &
d'Arbres, & sur-tout celles du Chêne.* Par M. DE REAUMUR. 57

*Méthode pour trouver les Tautocrones, dans des Milieux résis-
tants, comme le Quarré des Viteffes.* Par M. BERNOULLI,
Professeur de Mathématiques à Bâle. 78

T A B L E.

De l'importance de l'Analogie, & des rapports que les Arbres doivent avoir entre eux pour la réussite & la durée des Greffes.
Par M. DU HAMEL. 102

Seconde Partie de l'Examen de la Poussée des Voûtes. Par M. COUPLET. 117

Suite des Observations sur l'Aimant. Par M. DU FAY. 142

Examen des Lignes du quatrième ordre, ou Courbes du troisième genre. Par M. L'Abbé DE BRAGELONGNE. 158

Examen Chymique des Viandes qu'on employe ordinairement dans les Boüillons; par lequel on peut connoître la quantité d'Extrait qu'elles fournissent, & déterminer ce que chaque Boüillon doit contenir de suc nourrissant. Par M. GEOFFROY le Cadet. 217

La Courbe Descensus æquabilis dans un Milieu résistant comme une puissance quelconque de la Vitesse. Par M. DE MAUPERTUIS. 233

De la nature de la Terre en général, & du caractère des différentes especes de Terres. Par M. DE REAUMUR. 243

Suite des Observations de la Comete qui a commencé à paroître à la fin de Juillet de l'année 1729. Par M. CASSINI. 284

Anatomie de la Poire. Par M. DU HAMEL. 299

Observation anatomique sur une altération singulière du Cristallin & de l'Humeur vitrée. Par M. MORAND. 328

Méthode pour déterminer le sort de tant de Joüeurs que l'on voudra, & l'avantage que les uns ont sur les autres, lorsqu'ils joüent à qui gagnera le plus de parties dans un nombre de parties déterminé. Par M. NICOLE. 331

T A B L E.

Sur les mouvements de la Tête, du Col, & du reste de l'Épine du Dos. Par M. WINSLOW. 345

Manière de faire le Sublimé corrosif en simplifiant l'opération.
Par M. BOULDU. 357

Examen des Lignes du quatrième ordre. Seconde Partie de la Section I. dans laquelle on traite en général des Lignes du quatrième ordre qui ont des points doubles. Par M. L'Abbé DE BRAGELONGNE. 363

De la Capsule du Cristallin. Par M. PETIT le Médecin. 435

Observation de l'Eclipse du Soleil, faite à son lever, le 15 Juillet de cette année 1730. Par M. CASSINI. 450

Règles pour construire des Thermometres dont les degrés soient comparables, & qui donnent des idées d'un Chaud ou d'un Froid qui puissent être rapportés à des mesures connues. Par M. DE REAUMUR. 452

Nouvelles Propriétés de l'Hyperbole. Par M. MAHIEU. 508

Mémoire sur un grand nombre de Phosphores nouveaux. Par M. DU FAY. 524

Réflexions sur le mouvement des Eaux. Par M. PITOT. 536

Recherches anatomiques sur les Os du Crâne de l'Homme. Par M. HUNAULD. 545

Remarques sur un E'crit de M. Davall, qui se trouve dans les Transactions Philosophiques de la Société Royale de Londres, n.º 402, an. 1728, touchant la comparaison qu'a fait M. Delisle, de la grandeur de Paris avec celle de Londres, dans

T A B L E.

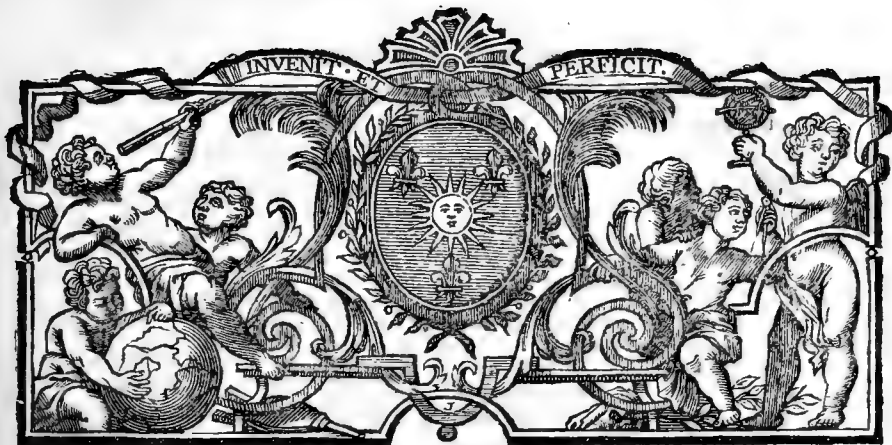
les Mémoires de l' Académie Royale des Sciences, année 1725;
page 48. Par M. DE MAIRAN. 562

Observations Météorologiques faites pendant l'année 1730. Par
M. MARALDI. 574

Phascolus Peregrinus, flore roseo, semine tomentoso. Phascolus
Indicus, hederæ folio anguloso, semine oblongo, lanugi-
noso. *Raii Hist.* 3. tom. 438. Par M. NISSOLE, de
la Societé Royale des Sciences de Montpellier. 577



HISTOIRE



HISTOIRE

DE

L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES.

Année M. DCCXXX.

PHISIQUE GENERALE.

SUR QUELQUES EXPERIENCES DE L'AIMAN.



Ous supposons ici tout ce qui a été dit en V. les M. 1728*, sur des Expériences de l'Aiman, faites P. 142. par M. du Fay. Il en résulte que le Tourbillon, * P. 1. & suiv. qui se forme autour de tout Aiman, n'est pas double, comme M. Descartes l'avoit conçu, mais simple ; toute la matière magnétique entre par le Nord de l'Aiman, & sort par le Sud, pour rentrer ensuite par le

Hist. 1730. . A

Nord. Il faut développer un peu plus cette idée pour l'intelligence de ce qui suivra.

On doit concevoir un Aiman comme un corps où sont ouvertes une infinité de routes parallèles, telles que par quelque cause que ce soit la matière magnétique qui pénètre ce corps s'y peut mouvoir en un certain sens, du Nord au Sud, & ne le pourroit du Sud au Nord. Et parce que cette matière se meut avec beaucoup plus de facilité dans l'Aiman que dans l'air, lorsqu'après être entrée par le Nord de la Pierre elle en est sortie par le Sud, elle ne continue pas son chemin en ligne droite dans l'air, comme il semble qu'elle le devroit, mais elle se réfléchit pour retourner au Nord de l'Aiman, & y rentrer par-là, c'est ce qui fait le Tourbillon. Tout cela, quoique sujet à de grandes difficultés, est si constant par les faits visibles, qu'on ne peut se dispenser de l'admettre, en attendant l'éclaircissement des difficultés.

Les Phisiciens prennent la Terre pour un grand Aiman. La matière magnétique entrée uniquement par le Nord de la Terre, selon M. du Fay, sort donc par le Sud. Si l'on suppose un Aiman ordinaire, posé de sorte que son Nord soit tourné vers le Nord de la Terre, la matière magnétique sortie par le Sud de la Terre, & qui en va chercher le Nord, rencontre le Sud de l'Aiman par où elle ne peut entrer; & si cet Aiman est aisément mobile, comme il le sera étant posé sur l'eau dans une petite Gondole, elle le tournera de façon qu'elle le puisse pénétrer, c'est-à-dire, qu'elle fera prendre à son Nord la place de son Sud, & par conséquent le Sud de l'Aiman sera dirigé vers le Nord de la Terre. Il peut y avoir de l'équivoque ou de l'embarras dans les expressions dont on se sert sur ce sujet, parce que c'est le Sud propre d'un Aiman qui se dirige vers le Nord de la Terre, & M. du Fay a crû devoir fixer les idées en ne distinguant les Pôles d'un Aiman que par la direction qu'ils prennent.

Dans un Aiman les routes de la matière magnétique sont déterminées, comme nous venons de le dire, elles ne lui permettent de se mouvoir qu'en un sens, mais le Fer, qui

certainement est un Aiman imparfait, l'est en ce que ces mêmes routes n'y sont pas si déterminées, les petits poils dont il est hérissé intérieurement, peuvent se coucher en un sens, & après cela se coucher en sens contraire, selon qu'il a été expliqué en 1728, & par conséquent la même route admettra la matière magnétique mûe tantôt en un sens, tantôt dans le sens opposé.

Voilà quels sont les principes essentiels du Système de M. du Fay, il a songé à le fortifier soit en l'employant à expliquer des phénomènes, qui ne l'ont pas été si heureusement jusqu'ici, soit en satisfaisant aux objections dont on pourroit l'attaquer.

La plupart des Philosophes prétendent que dans un Aiman le pôle qui se dirige vers le Nord a beaucoup plus de force que l'autre, & ils croient que la proximité du pôle Boréal de la Terre en est la cause, mais sans compter que ce devoit être le contraire dans les pays situés au de-là de l'Equateur, ce qui n'est rien moins que certain, une expérience, qui paroît décisive, renverse cette explication. M. du Fay a approché assés près l'un de l'autre deux Aimans assés égaux en force, il ne faut pas qu'ils se touchent, car ils ne feroient plus qu'un Aiman, il a plongé dans de la limaille de Fer le pôle de l'un, qui en a pris autant qu'il en pouvoit porter; si le voisinage du second a rendu ce premier capable de porter plus de limaille, il a dû en lâcher, en laisser tomber une partie, quand on a éloigné le second, c'est cependant ce qui n'est jamais arrivé dans l'expérience bien répétée.

Ce fait se déduira sans peine de l'hypothèse d'un Tourbillon, ou courant unique. La matière magnétique une fois entrée dans un Aiman n'en sort, pour ainsi dire, que le plus tard qu'elle peut, parce qu'elle trouve beaucoup plus de facilité à s'y mouvoir que dans l'air; quand elle est entrée, elle sortoit de l'air, elle n'avoit qu'un mouvement pénible, elle est entrée toute dispersée, & a pris une assés grande étendue autour du pôle qui se présentait, mais quand il a été question de sortir de la pierre, elle y a prolongé son cours

4 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE

autant qu'il se pouvoit pour éviter l'air, & par-là elle s'est rassemblée & serrée vers le pôle de la sortie. Or le pôle de l'entrée a été le Nord de l'Aiman dirigé vers le Sud de la Terre, & le pôle de la sortie est le Sud de l'Aiman dirigé vers le Nord de la Terre. De-là suit évidemment la conséquence.

M. du Fay assure en général que l'hypothèse du courant simple s'accommodera mieux avec les phénomènes de l'Aiman, & il fait voir qu'elle quadreroit fort bien avec l'idée qu'a eue le célèbre M. Halley de rapporter les Aurores Boréales à la matière magnétique. Mais cette idée n'est pas encore elle-même assez établie pour donner beaucoup de poids à celles qu'elle confirmeroit.

On objecte à l'hypothèse de M. du Fay que le courant unique formé d'une matière sortie par le Sud de la Terre, & qui va retrouver le Nord, pousseroit selon la direction du Sud au Nord tous les Aimans qui pourroient se mouvoir librement, & leur donneroit en ce sens un mouvement de progression, au lieu qu'ils n'ont constamment que celui de direction, par lequel leurs pôles se tournent comme il convient. On ne doit pas trouver cet inconvénient dans l'hypothèse des deux courants, qui étant opposés, se balancent l'un l'autre. La réponse est aisée. La matière magnétique qui va du Sud au Nord pousseroit en effet l'Aiman selon cette direction, si en venant heurter sa surface extérieure elle y trouvoit de la résistance, mais elle n'y en trouve aucune, elle ne la heurte pas, elle la pénètre dès qu'elle la rencontre, & se plonge dans l'intérieur de la pierre. On sçait que cette extrême facilité de la matière magnétique à pénétrer l'Aiman n'a pas été imaginée pour le besoin présent, mais qu'elle est établie depuis long-temps par les phénomènes. Cette matière n'agit que sur les parties intérieures de l'Aiman, qu'elle arrange & qu'elle accommode à son cours, mais ce ne sont que celles qui sont de la dernière finesse.

Il suit de-là qu'elle se meut dans des espaces extrêmement étroits, & d'où l'air est exclus, & cela même fournit à M. du Fay une réponse à l'objection qu'on lui a faite contre les

petits poils du Fer, qu'il a supposé qui tomboient par leur poids d'un sens ou d'un autre. Ce poids, a-t-on dit, doit être compté pour nul à cause de l'extrême délicatesse des poils. Il devroit être effectivement compté pour nul, si les poils étoient dans l'air, mais ils n'y sont pas, & il leur arrive la même chose qu'à une Plume, qui dans le Vuide de la Machine Pneumatique tombe avec la même vitesse, ou a le même poids, que si elle étoit de Plomb.

La vitesse de la matière magnétique doit être proportionnée à sa subtilité, & à cette occasion M. du Fay a eu la pensée de mesurer cette vitesse. Il a conçu que si une Aiguille de Fer non aimantée passoit dans le Tourbillon d'un Aimant avec la même vitesse dont ce Tourbillon se meut, elle ne s'y aimanteroit point, parce que la matière magnétique du Tourbillon ne pourroit faire aucune impression sur elle. Il y a fait passer une Aiguille avec toute la vitesse qu'elle avoit pû prendre de la détente subite d'un Ressort de Montre, mais elle s'est aimantée comme elle auroit fait à la manière ordinaire, & par conséquent elle auroit eu besoin d'une vitesse beaucoup au de-là de celle qu'elle avoit. Il n'est pas permis de conjecturer seulement jusqu'où cela pourroit aller. Cette tentative inutile n'est rapportée ici que pour donner lieu à d'autres qui pourroient réussir, quelquefois il ne faut qu'avertir les bons esprits de tourner leurs vûes d'un certain côté.

Pour dernière preuve des petits poils du Fer, & des qualités qu'on est obligé de leur attribuer, M. du Fay apporte la différence des effets magnétiques du Fer, de l'Acier & de l'Acier trempé. Cette transposition de poles, dont nous avons parlé en 1728, si facile & si prompte dans le Fer, l'est beaucoup moins dans l'Acier, & moins encore dans l'Acier trempé, & ce qui en est une suite, l'Acier trempé, toutes choses d'ailleurs égales, a plus de force, & une force plus durable que l'Acier, & l'Acier plus que le Fer. La raison en saute aux yeux, les poils du Fer ont perdu leur extrême mobilité, & se sont roidis plus ou moins, ou collés les uns contre les autres, ou avec les parties voisines.

6 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE

Toute cette Théorie n'est pas une pure Théorie, qui ne produise rien. M. du Fay en tire quelle est la meilleure manière d'aimanter les Aiguilles, & on la devinera de soi-même, pourvu qu'on ait une idée bien nette du Tourbillon unique, de sa direction, des petits poils du Fer. On travaille avec une sorte de supériorité sur la matière, quand on opère en vertu d'un Système.

SUR LA LUMIERE SEPTENTRIONALE, ET SUR UNE AUTRE LUMIERE.

LE spectacle de la Lumière Septentrionale a continué en 1730, rarement à la vérité, mais en récompense avec des circonstances toutes nouvelles, comme s'il les affectoit de peur d'ennuyer.

M. Bouillet, Correspondant de l'Académie, dont nous avons déjà parlé plusieurs fois, la vit à Besiers le 6 Mars, à 7 heures du soir, d'un fort beau rouge, élevée de plus de 20 degrés sur l'Horison, mais la Lune, qui se leva à 7 heures 30' la fit disparaître, & il ne scût que sur le rapport de quelques Pêcheurs de Vendres, qu'elle avoit été vûe encore à 11 heures.

Une Lumière, & plus visible, & tout-à-fait singulière, fut observée le soir du 9 Octobre, d'un côté par M. Cassini en Picardie, & de l'autre par M. de Mairan à Breüilpont. M. de Mairan qui commença à l'observer à 8 heures, & qui se tient sûr qu'elle ne commença pas plutôt, la vit à la place, de la couleur, & de la forme ordinaire des Aurores Boréales, c'est-à-dire, sans jets & sans colonnes qui en partissent, longue de 9 à 10 degrés, dont elle s'étendoit horizontalement vers le Midi, à compter des Pleiades d'où elle partoît, & large de 4 degrés. Mais 7 ou 8 minutes après, elle commença à s'ébrecher vers le milieu, comme pour se diviser, & se divisa en effet en deux Ovals lumineux inclinées à l'Horison, longues chacune de 15 à 18 degrés;

sur 5 à 6 de largeur, entre lesquelles on voyoit les Pleïades qui les séparèrent. Ce fut en cet état que M. Cassini vit le Phénomène à 7 heures 20'. Alors qui ne l'avoit pas vu dans sa première forme ne le pouvoit guère reconnoître pour une Aurore Boréale.

Ensuite les deux Ovaux s'affoiblirent de clarté, & changèrent de contours ou de figure, mais inégalement & différemment l'une & l'autre, & enfin un peu après 9 heures, elles ne subsistoient plus.

Cependant à 10 heures $\frac{3}{4}$ ou 11 heures, M. de Mairan vit sûrement l'Aurore Boréale, foible, à la vérité, mais à sa place naturelle & sous l'Etoile Polaire. Elle étoit contiguë à l'Horison, sans interposition de nuages obscurs, & elle y étoit plus marquée que par-tout ailleurs. Elle alla en s'affoiblissant jusque vers Minuit, où l'Observateur la quitta.

Le P. Rouché, Religieux de l'Ordre de S. François, observa aussi à Poitiers le même Phénomène du 9 Octobre; depuis 8 heures du soir jusqu'à 9, mais il le vit sous une autre forme que M.^{rs} Cassini & de Mairan, quoiqu'à peu près dans le même lieu du Ciel. C'étoit d'abord un demi-Cercle, dont le diamètre, tourné en haut, étoit parallèle à l'Horison, & long de plus de 20 degrés. Ensuite ce demi-Cercle se partagea en deux autres moindres & contigus par leurs diamètres, qui faisoient une même droite, parallèle encore à l'Horison. Ces figures si régulières ne durèrent pas long-temps, les deux petits demi-Cercles se réunirent pour former un plus grand Cercle presque entier, mais très-mal terminé dans la portion qui lui manquoit. Enfin cela devint une espèce de Segment de Cercle, qui finissoit par un Trident, dont les dents étoient fort longues & bien séparées. Ces apparences-là sont assez différentes des autres, & peut-être difficiles à concilier avec elles. Tout le Phénomène avoit une très-grande blancheur, & un mouvement très-lent.

Jusqu'ici nous n'avons rapporté que des Aurores ou Lumières Septentrionales, différentes seulement entre elles par des circonstances plus ou moins particulières. Mais voici enfin

une Lumière différente par l'endroit qui paroît leur être le plus essentiel, une Lumière entièrement Méridionale. Elle fut vûë à Bésiers le 15 Février de cette année, par M.^{rs} Bouillet & Astier l'aîné, trois quarts d'heure après le coucher du Soleil. Elle commençoit à l'endroit où il s'étoit couché, passoit du côté de l'Occident par les dernières Etoiles des Poissons, s'élevoit vers le Zénit jusqu'à l'Oeil du Taureau, & se terminoit dans la constellation du Lion, en suivant, mais non pas toujours exactement, la position & le cours de l'Ecliptique. On voit par-là qu'elle étoit toute Méridionale, beaucoup plus remarquable & plus parfaite sur ce point que le demi-grand Cercle vertical, dont nous avons parlé en 1729, & qui jusque-là étoit unique.

Cette Lumière formoit une Zone ou bande d'environ 10 degrés de largeur, & qui dans sa plus grande hauteur étoit élevée de 52 degrés sur l'Horison. Elle étoit fort rouge, & selon l'ordinaire de ces Phénomènes n'effaçoit pas les Etoiles qu'elle couvroit. Au de là de cette Zone rouge, il y avoit vers le Midi une autre Zone de Lumière blancheâtre, presque contigüe à la première du côté de l'Orient, & qui s'en éloignoit en allant vers le Méridien, & au-dessous de cette Lumière blanche étoit un nuage obscur, qui s'étendoit jusqu'à l'Horison, tandis que le reste du Ciel étoit fort serein.

Par la position qu'avoit la Lumière rouge rapportée aux Etoiles fixes, M. Astier s'aperçût que cette position changeoit, & que la Lumière avoit un mouvement, mais assés petit, du Nord au Sud. La Lumière blanche qui se tenoit toujours à la même distance de l'autre, en avoit un pareil.

Les deux Observateurs eurent des affaires, qui ne leur permirent pas de pousser l'observation au de là de 8 heures $\frac{1}{2}$. Ils ne virent point d'Aurore Boréale, seulement M. Astier, qui se retira le dernier, en soupçonna une en se retirant, mais elle a été vûë sûrement ailleurs dans le même Pays. Par les observations de M. de Guibal, qui étoit à S. Chignan, M. Astier conjecture qu'il y avoit quelque correspondance entre la Lumière Méridionale & la Septentrionale, parce
que

que la première baïssoit, tandis que l'autre s'élevoit; mais on n'a rien d'assés positif sur ce point. Quelque différentes que soient ces deux Lumières par leur position, elles sont d'ailleurs si semblables, que la présomption est grande pour la correspondance.

Comme depuis 15 ans, que nous parlons toujours de cette matière, il semble qu'elle ne fait que s'embarasser de plus en plus par la multitude & la variété des circonstances & des accidents du Phénomene, peut-être ferons-nous plaisir au Public, d'annoncer que M. de Mairan a entrepris de réduire le tout à un Système réglé, qui paroîtra dans peu.

SUR UNE NOUVELLE CONSTRUCTION DE THERMOMETRE.

ON sçait assés par ses propres reflexions, pour peu qu'on en ait fait en observant le Thermometre, combien cet Instrument si commode, d'un si grand usage, & même si agréable, est cependant défectueux; nous ne parlons que de celui de Florence ou de Sanctorius, qui est presque le seul, car celui de M. Amontons, dont nous avons parlé en 1702*, est peu connu & peu usité, quoique construit sur de meilleurs principes, & d'une manière fort ingénieuse, mais comme il est d'une construction difficile, & qui demandoit, du moins pour un temps, la main de l'Auteur lui-même, sa mort, qui survint, empêcha qu'il ne s'en répandît un assés grand nombre.

Nos Thermometres ordinaires marquent, à la vérité, les différents degrés de chaud ou de froid, mais chacun les marque pour soi & à sa manière, parce qu'ils ne sont partis d'aucun point de chaud ou de froid, qui leur fût commun. C'est ainsi que deux Pendules qui n'auroient pas été mises d'abord sur la même heure au Soleil, marqueroient bien chacune, que pendant un certain temps il se seroit écoulé une heure, deux heures, &c. mais non pas quelle heure il seroit

Hist. 1730.

. B

V. les M.
p. 452.

* p. 1.
& suiv.

au Ciel. De plus, en supposant les deux Pendules justes, on pourroit bien s'assûrer que le même temps se seroit écoulé, quand elles le marqueroient toutes deux, mais on ne peut pas s'assûrer pareillement que quand la liqueur s'est élevée d'un degré dans deux Thermometres différens, il y ait eu de part & d'autre un nouveau degré de chaleur égal; car 1.^o l'Esprit de Vin peut n'être pas le même dans les deux Thermometres, & selon qu'il sera plus ou moins bien rectifié, il se dilatera plus ou moins à une même chaleur, ou, ce qui revient au même, celui qui a été bien rectifié se dilatera & montera d'un degré à une certaine chaleur, tandis que l'autre ne sera monté du même degré qu'à une chaleur plus forte. 2.^o En graduant les Thermometres, on prend pour degrés égaux de l'ascension de la liqueur des parties égales de la longueur des tuyaux, cependant en supposant les diametres des tuyaux d'une égalité parfaite, ce qui est tout au moins très-difficile, ils ont souvent dans leur intérieur des inégalités considérables, & quelquefois telles qu'il faudra pour remplir une certaine longueur d'un tuyau près du double de la liqueur qu'il faudroit pour remplir la même longueur dans un autre tuyau. Cela vient de l'inégalité d'épaisseur qu'ils ont en différens endroits, des bossés, des monticules qui se trouvent à leur surface intérieure, & surtout de ce qu'ils sont ordinairement plus gros à un bout qu'à l'autre.

Voilà donc trois inconvénients principaux, qui rendent la comparaison des Thermometres très-incertaine & très-fautive, & ce seroit pourtant cette comparaison qui en seroit l'usage le plus curieux, & le plus intéressant, du moins pour les Philosophes. On sçauroit quel est le chaud ou le froid d'une Saison, d'une Année, d'un Climat, par rapport à celui d'une autre Saison, d'une autre Année, d'un autre Climat, &c. quel est le plus grand chaud ou le plus grand froid que des Hommes, que d'autres Animaux, soutiennent ou puissent soutenir, &c. Il est aisé de voir combien de ces comparaisons exactes il naîtroit de connoissances, & l'on peut même assurer

qu'il en naîtroit d'imprévûes. Pour nous mettre à portée d'y parvenir, M. de Reaumur a entrepris de remédier aux trois inconvénients par une nouvelle construction de Thermometre à Esprit de vin.

D'abord il adopte la belle & heureuse découverte de M. Amontons rapportée en 1702, que la chaleur de l'eau bouillante est un point fixe. Ce n'est pas que ce principe n'ait été attaqué, M. Taglini Professeur en Philosophie à Pise a trouvé qu'en faisant bouillir l'eau avec plus de force, on lui donnoit plus de chaleur, cela est vrai, & M. de Reaumur en convient; mais au lieu que M. Taglini s'est contenté de voir une première augmentation de chaleur, M. de Reaumur a poussé l'expérience jusqu'au bout, & a trouvé qu'enfin l'eau qui avoit bouilli un quart d'heure, ou un peu plus, ne pouvoit plus donner de nouveau degré de chaleur à l'Esprit de vin contenu dans un vase mis au milieu de l'eau bouillante. Le principe de M. Amontons, qui paroissoit détruit, subsiste donc, seulement demande-t-il une légère modification. En effet puisque l'eau la plus bouillante ne peut pas parvenir à la chaleur d'un métal fondu, il faut bien qu'elle ait un certain point fixe, prescrit par sa nature, & qu'elle ne peut passer.

Ce n'est pourtant pas la chaleur de l'eau bouillante que M. de Reaumur employe le plus souvent pour point fixe, il faudroit des tuyaux trop longs pour aller jusque là, & jamais l'air n'est à beaucoup près échauffé jusqu'à ce point dans les climats les plus ardents. Il prend le point opposé, celui de la congélation de l'eau, non de la congélation naturelle, mais de l'artificielle, qui se fait par de la glace & des Sels. On a appris par les Thermometres ordinaires que de la glace est plus froide que d'autre glace, & la raison en est que l'air a été plus froid dans un temps que dans un autre. Mais cette raison cessera à l'égard de la congélation artificielle, si on la fait, comme il est ordinaire, dans un temps où l'air n'ait aucune disposition à geler l'eau; & comme il pourroit rester le scrupule que la glace naturelle qu'on emploiera seroit plus ou moins froide, il faudra s'en tenir au point où la première

surface de l'eau, qui se gèlera artificiellement, sera prise, car, selon la remarque de M. de Reaumur, cette première action du froid doit être toujours assés égale, & il ne peut guere survenir d'inégalités que dans la suite par une espeece d'accélération plus ou moins forte. Quand de la matière, dont le mouvement caufoit & entretenoit la liquidité, une eau en a assés perdu pour n'être plus liquide dans la surface, il paroît qu'une autre eau en doit perdre précisément autant pour se trouver au même état; quoique les causes de froid, qui agissent sur l'une & sur l'autre, ne soient pas exactement égales, ce ne sera que leur action continuée qui rendra leur différence sensible. Après tout il ne s'agit en tout ceci que d'égaliés Phisiques, qui ne peuvent jamais être aussi justes que les Géométriques.

Le froid de la congélation artificielle de l'eau étant pris pour point fixe, & en même temps, si l'on veut, la chaleur de l'eau bouillante, il faut graduer un Thermometre par rapport à ces points, c'est-à-dire, le diviser en degrés égaux, tels que l'Esprit de vin y montera depuis un froid plus grand que celui de la congélation jusqu'à cette congélation, & de-là jusqu'à la chaleur de l'eau bouillante. M. de Reaumur a pris une idée fort nouvelle sur cette graduation. Les degrés égaux le sont, non par rapport à la longueur du tuyau, nous en avons vû l'erreur manifeste, mais par rapport aux dilatations de la liqueur; si le volume de la liqueur est de 100 parties, le Thermometre marquera 1 degré, quand ce volume sera augmenté de $\frac{1}{100}$ partie par la dilatation, 2 degrés quand il sera augmenté de $\frac{2}{100}$, &c. ainsi les inégalités intérieures du tuyau ne sont plus à craindre, & quelles que soient celles qui s'y trouveront, il n'en arrivera autre chose, sinon que des degrés égaux de dilatation seront des degrés inégaux sur la longueur du tuyau. Les yeux n'en seront peut-être pas si contents, mais on aura l'avantage réel & solide de sçavoir au juste de combien une liqueur a augmenté son volume par la chaleur, jusqu'où elle le peut augmenter, combien elle est de temps à prendre cette augmentation, quel est son rapport

de dilatabilité à une autre liqueur, instructions qu'on ne pouvoit pas tirer des anciens Thermometres, qui n'en disoient rien, ou ne le disoient que d'une manière équivoque & confuse.

Graduer le Thermometre selon des degrés égaux d'augmentation de volume, c'est le graduer selon des degrés égaux de capacité de la boule & du tuyau. Que la boule seule, ou la boule, & une certaine partie du tuyau, si l'on veut, contiennent juste 100 parties égales d'eau, chacune de ces parties étant d'une quantité bien exactement connue, il est clair que si ensuite on en verse une nouvelle dans le tuyau, une 2^{de}, une 3^{me}, &c. & que l'on marque les endroits où la liqueur totale du tuyau se sera élevée, on aura des degrés égaux de la capacité du tuyau, & par conséquent aussi de la dilatation d'une liqueur qui en se rarefiant monteroit à ces différents endroits marqués, car la capacité du Thermometre ayant été mesurée de cette manière, on en ôtera toute l'eau, qui n'a servi qu'à mesurer, & on y mettra l'Esprit de vin dont on veut observer la dilatation.

Le nombre des degrés de division est arbitraire, mais il ne laisse pas de demander un choix. 100 est trop petit, un plus grand nombre donnera des divisions plus fines, & le Thermometre en sera à cet égard ce qu'on appelle plus *sensible*. M. de Reaumur juge plus commode de prendre toujours des centaines, & il va jusqu'à 1000. Par-là il évite le plus souvent les fractions de degré, & quand il s'en trouve, elles sont assez petites pour pouvoir être négligées.

Quand on a gradué avec de l'eau la capacité du Thermometre, il a fallu déterminer l'endroit où l'on veut que soit l'Esprit de vin après s'être condensé par la congélation artificielle. Cet endroit sera à peu-près au tiers de la longueur du tuyau à compter de la boule, car l'Esprit de vin peut ensuite se dilater de plus du double par la chaleur. Il faut que cet endroit soit le nombre de la division choisie, par ex. 1000, si la division est 1000. Lorsqu'on aura versé l'Esprit de vin, & qu'on viendra à le condenser par la congélation, s'il est

au dessus ou au dessous de l'endroit marqué, on lui ôtera, ou bien on lui ajoutera la quantité nécessaire pour l'amener au point requis, & alors on sera sûr qu'on a le volume de 1000 parties connues d'Esprit de vin condensées par la congélation artificielle.

En voilà assez pour faire entendre en général les principes de la nouvelle construction. Le plus important, c'est l'exactitude parfaite des mesures. Il en faut d'abord de petites, dont chacune contienne ce qu'on appelle une partie, ou de l'eau, ou de l'Esprit de Vin, & M. de Reaumur en indique de si justes qu'elles ne perdront pas par le mouvement, ni par le transport nécessaire, une seule goutte de la liqueur qu'elles contiendront. Il faut ensuite pour hâter l'ouvrage, en avoir de plus grandes, qui contiendront ces petites un certain nombre de fois précis. Il vaut mieux que ce nombre soit une aliquote de 100, comme 25. Mais nous supprimons tous ces détails, quoiqu'instructifs, & souvent curieux; on les apprendra du Mémoire de M. de Reaumur, & encore mieux de la pratique.

Dans les Thermometres communs on a adapté à une assez grosse boule un tuyau délié & presque capillaire, afin qu'une très-petite augmentation de volume dans la liqueur de la boule en produisît une grande & bien sensible dans la liqueur du tuyau. C'en étoit assez pour voir que la liqueur étoit rarefiée; dès qu'elle l'étoit, & même qu'elle l'étoit plus ou moins, & l'on ne s'embarassoit pas de sçavoir de combien elle l'étoit précisément. Mais dans les Thermometres nouveaux où l'on veut arriver à cette connoissance, qui ne peut résulter que de la mesure exacte des volumes, il est inévitable que les tuyaux soient beaucoup plus gros, parce que l'exactitude & la sensibilité du Thermometre, à mesure qu'on les veut plus grandes, demandent un plus grand nombre de parties de liqueur, & que quelques petites que soient ces parties, elles font un tout considérable. M. de Reaumur est donc obligé de choquer l'habitude des yeux, & de renoncer à l'agrément du tuyau capillaire. Ce n'est pas la peine de plaider ici la

cause de l'utilité & de la justesse contre un agrément si léger. Cependant par une espece de condescendance, les nouveaux Thermometres pourront avoir des tuyaux qui ne seront pas plus gros que ceux des gros Barometres, auxquels on est assés accoûtumé.

M. de Reaumur hasarde encore une autre difformité de ce genre. On dit qu'un Thermometre est plus ou moins sensible, selon qu'une même rarefaction ou condensation arrivée à la liqueur de la boule, est marquée sur le tuyau dans une plus grande ou moindre étendue. M. de Reaumur imagine avec raison une autre sorte de sensibilité. Elle consistera dans la promptitude avec laquelle la liqueur sentira l'action du chaud ou du froid, & la marquera. Comme les boules de ses Thermometres seront plus grosses qu'à l'ordinaire, il a fait réflexion qu'il leur faudroit nécessairement plus de temps pour recevoir jusqu'à leur centre, & dans la totalité de la liqueur l'action du chaud ou du froid de l'air extérieur. Un remede très-simple à cet inconvénient est que les boules, sans rien perdre de leur capacité, soient applaties autant qu'on le jugera à propos, mais il est vrai que les yeux pourront encore le trouver mauvais, du moins dans les commencements. Peut-être aussi que ces nouveautés de construction seront d'autant plus agréables qu'elles seront plus marquées, parce qu'elles prometttront plus sensiblement une plus grande justesse.

On ne peut guère comparer deux anciens Thermometres; ce qui les rend assés inutiles pour des recherches Phisiques un peu délicates. Le plus ou le moins d'élevation de la liqueur dépend du rapport de la capacité ou du diametre de la boule à la capacité ou au diametre du tuyau. Plus le diametre de la boule est grand par rapport à celui du tuyau, plus la liqueur monte haut par un même degré de chaleur, pour comparer deux Thermometres differents, ou les degrés de chaleur qui ont agi sur chacun d'eux, il faudroit sçavoir quel est dans chacun le rapport de ces diametres; mais on ne le sçait point, & on ne le peut sçavoir, ne fût-ce qu'à cause

des inégalités intérieures des boules & des tuyaux, qui sont toujours inconnues, car il se trouveroit encore d'autres difficultés. Dans les Thermometres de M. de Reaumur, il ne s'agit plus du tout de ce rapport des diametres des boules & des tuyaux; dès que le point où s'arrête l'Esprit de Vin condensé par la congélation artificielle est marqué sur deux Thermometres, & je suppose ce point inégalement élevé dans les deux, & dès que l'on sçait que de part & d'autre l'Esprit de Vin a un certain nombre de parties égales entr'elles dans chaque Esprit de Vin, il n'en faut pas davantage, les deux Thermometres marqueront toujours les mêmes degrés de chaleur, quoique ces degrés puissent être inégaux dans l'étendue qu'ils tiendront sur le tuyau. Quand un Esprit de Vin qui aura, par exemple, 400 parties égales, montera d'un degré au-dessus de la congélation, ou, ce qui est le même, aura augmenté son volume de $\frac{1}{400}$, & quand un autre Esprit de Vin qui aura 500 parties élémentaires, pour ainsi dire, égales entr'elles, & égales à celles du premier, sera monté d'un degré au-dessus de la congélation, ou aura augmenté son volume de $\frac{1}{500}$, ce sera toujours le même degré de chaleur qui aura causé la même rarefaction dans les deux volumes différens, quelle que soit d'ailleurs l'étendue dans laquelle ce degré sera marqué à cause de la différente capacité des boules & des tuyaux des deux Thermometres. Si les parties élémentaires d'un Esprit de Vin ont été prises plus grandes que celles de l'autre, mais en même nombre, les degrés d'un des Thermometres seront naturellement plus grands, mais un degré d'élévation plus grand ne sera que l'effet de la même chaleur. Ce sera la même chose, si les parties élémentaires sont prises plus grandes, & en plus grand nombre. Il seroit bon que l'on convînt d'une même mesure exacte pour les parties élémentaires, & d'un même nombre total, comme de 1000 pour le nombre de ces parties condensées par la congélation.

Il y a ici une remarque importante à faire d'après M. de Reaumur. Chacun de ces degrés inégaux en étendue dans
deux

deux Thermometres, & peut-être dans le même, marquera bien un degré égal de la dilatation de l'Esprit de vin, mais non pas un degré égal de chaleur. Il n'est pas sûr que la chaleur, toujours augmentée par degrés égaux, produise dans l'Esprit de vin des augmentations égales de volume, il est possible qu'à mesure qu'elle croît également, elle trouve toujours ou d'autant plus de facilité ou d'autant plus de difficulté à rarefier l'Esprit de vin, que les premières dilatations coûtent à la même cause plus ou moins d'effort que les dernières; cette inégalité est plus que vraisemblable, & l'une & l'autre progression de l'inégalité l'est à peu-près également. Nous pouvons ajouter encore, quoiqu'il ne s'agisse ici que de la même liqueur, qu'une liqueur peut se rarefier selon la progression croissante, & une autre selon la progression décroissante. Deux Thermometres, où l'Esprit de vin sera inégalement élevé, marqueront donc seulement que l'un aura reçu un certain nombre de degrés de chaleur plus que l'autre, mais non pas quel sera le rapport de ces différents degrés entre eux. M. de Reaumur ne croit pas qu'on puisse arriver à cette connoissance exacte, tant il est arrêté qu'il restera toujours beaucoup d'obscurité dans nos lumières.

Tout ce que nous avons dit jusqu'ici suppose que l'Esprit de vin soit le même dans les différents Thermometres, mais ce seroit une supposition bien fautive dans la pratique. Deux Esprits de vin diffèrent extrêmement en qualité, en dilatabilité; cependant les Thermometres ordinaires n'ont aucun égard à cette différence, & c'est là le dernier que nous ayons à traiter de leurs principaux inconvénients.

L'Esprit de vin est un mélange d'une Huile éthérée, subtile, inflammable, & d'une eau ou flegme; l'Eau de vie n'est aussi que ce mélange, & elle devient Esprit de vin quand on y diminue la dose de l'eau par rapport à celle de l'Huile, ce qu'on appelle *rectification*. L'Esprit de vin est plus ou moins rectifié, & par conséquent différent, selon que la dose de l'Huile est plus ou moins forte, il en est plus ou moins dilatable par la chaleur.

Pour mesurer la dilatabilité d'un Esprit de vin quelconque; M. de Reaumur en prend dans un Matras à long col 400 parties telles qu'elles sont quand la congélation artificielle les a condensées, & ensuite il voit jusqu'où les élève la chaleur de l'eau bouillante, ce qui donnera les deux points fixes. L'opération ne promet pas d'abord un bon succès, car longtemps avant que l'eau bouille, l'Esprit de vin bout, & s'élève beaucoup & irrégulièrement, desorte qu'il semble qu'on ne peut ni marquer alors le terme précis de son élévation, ni attendre le temps où l'eau bouillira. Mais il y a un expédient facile & heureux. On n'a qu'à retirer de l'eau chaude l'Esprit de vin qui en est entouré, aussi-tôt ses bouillonnements cessent, sa surface s'applanit, & se met tranquillement à un certain point plus élevé que celui où elle étoit, cela vient de la chaleur acquise, qui se conserve quelque temps. On remet ensuite le Matras dans l'eau qu'on rend plus chaude, l'Esprit de vin s'élève encore, bouillonne, mais on le retire encore, & sa surface applanie se remet à un nouveau point plus élevé. On recommence ce manège jusqu'à ce que l'eau étant bouillante, la surface applanie de l'Esprit de vin, qu'on aura retiré de cette eau, & qu'on y aura remis, se tienne constamment au même point d'élévation dans ces changements alternatifs, car cela arrivera quand l'Esprit de vin aura pris toute la chaleur qu'il peut prendre par l'eau bouillante sans être échauffé jusqu'au point de bouillir.

L'Esprit de vin le mieux rectifié que M. de Reaumur ait pû trouver à Paris chés les Marchands ordinaires, est tel que s'il est 400 par la congélation artificielle de l'eau, il devient 435 par l'eau bouillante, ce qui est le rapport de 80 à 87. On voit par là l'intervalle où seront renfermés les degrés moyens pour des Esprits de vin moins rectifiés. Il seroit à propos, & même nécessaire d'écrire sur chaque Thermometre la qualité de l'Esprit de vin exprimée par la dilatation qu'il peut prendre depuis le point où il est 400 par la congélation jusqu'à celui où il sera 435, par ex. ou 434, &c. par l'eau bouillante. Deux Thermometres seront aisés à comparer

malgré la différente dilatabilité de leurs Esprits de vin, puisque des degrés inégaux d'élevation de la liqueur, mais correspondants, ne seront que les effets du même degré de chaleur.

Il n'est nullement nécessaire de pousser la longueur des Thermometres jusqu'où la chaleur de l'eau bouillante le demanderoit, puisque celle de l'air n'ira jamais si loin à beaucoup près, cela n'est indispensable que pour l'épreuve de la qualité de l'Esprit de vin ; hors de-là de moindres tuyaux suffisent, & il est plus aisé de s'en fournir. Par la même raison de facilité & de commodité M. de Reaumur n'est pas d'avis qu'on se picque d'employer le meilleur Esprit de vin, il ne s'en trouveroit pas par tout, le plus médiocre, & même l'Eau de vie suffira, bien entendu toujours que la qualité en sera connue. Les tuyaux seront plus courts pour une liqueur moins dilatable, & les Thermometres pourront assez aisément, si l'on veut, être égaux.

On peut ramener deux différents Esprits de vin à être de la même dilatabilité. Cette liqueur est un composé d'eau & d'huile éthérée, & toute sa dilatabilité n'appartient pas à l'huile seule, l'eau en a aussi sa part, quoique moindre. M. de Reaumur ayant fait prendre à 400 parties d'eau de la Seine tout le froid que pouvoit lui donner d'autre eau qui l'entouroit, & commençoit à se glacer, trouva que par la chaleur de cette même eau bouillante le volume de l'eau de Seine devenoit 415. Ayant pris ensuite de l'Esprit de vin dont le volume condensé par la congélation artificielle de l'eau étoit 400, & devenoit 435 par l'eau bouillante, il a mêlé 300 parties de cet Esprit de vin avec 100 d'eau de Seine, & il a eu un Esprit de vin, dont la dilatation extrême, au lieu d'être 435, n'étoit plus que 430, & c'est précisément ce qu'on trouvera par le calcul que devoient donner les 100 parties d'eau mêlées aux 300 d'Esprit de vin selon la proportion de leurs dilatations extrêmes connues par expérience. 200 parties d'eau de Seine mêlées avec 200 parties du même Esprit de vin font un Esprit de vin dont la dilatation extrême n'est plus que 425. La dilatation extrême de l'Esprit de vin affoibli

20 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE
se trouve toujours ou à peu-près celle qui devoit venir selon
le calcul.

L'Inverse de cette Méthode seroit de fortifier, pour ainsi dire, un Esprit de vin foible par un autre plus fort, après avoir connu par les épreuves rapportées la dilatabilité de l'un & de l'autre. M. de Reaumur donne la regle mathématique pour avoir par cet alliage des Esprits de vin de tel titre qu'on voudra, car on peut transporter à ce sujet les expressions qui appartiennent aux métaux, puisqu'il est tout pareil. On pourroit donc avoir par tout de l'Esprit de vin de la même qualité, & des Thermometres parfaitement semblables, ce qui seroit bien le mieux, du moins pour les Sçavants, mais les Sçavants eux-mêmes auront peut-être de la peine à entrer dans une convention générale, tant il est difficile que des hommes conviennent.

M. de Reaumur étend jusqu'à une curiosité de Phisique assez intéressante, la méthode qu'il a trouvée pour mesurer la dilatabilité de différents Esprits de vin. Un Esprit de vin quelconque est un composé de deux substances différentes, l'eau & l'huile éthérée, toutes deux dilatables, mais différemment, & il s'agit de découvrir autant qu'on le peut, quelle est cette différence. Nous avons vû que si d'un très-bon Esprit de vin, qui de 400 deviendrait 435, on en ôtoit 200 parties qu'on remplaçât en eau de Seine, il n'i-roit plus que de 400 à 425. Supposons que les 200 parties restantes d'Esprit de vin ne soient que de l'huile éthérée pure; sur la dilatation 25, il en appartient $7\frac{1}{2}$ parties à l'eau, puisque cette eau a 200 parties, & que la dilatation de 400 de ces parties iroit à 415, donc 25 moins $7\frac{1}{2}$, ou $17\frac{1}{2}$ sont ce qui appartient à la dilatation de l'huile, & les dilatations de l'huile & de l'eau sont comme $17\frac{1}{2}$ à $7\frac{1}{2}$, ou 7 à 3. Mais il s'en faut bien que dans le mélange d'Esprit de vin & d'eau les 200 parties restantes d'Esprit de vin ne fussent que de l'huile, M. Geoffroy le cadet a fait voir que dans l'Esprit de vin le mieux rectifié, il y a plus de la moitié de flegme ou d'eau, & cette eau peut légitimement passer

pour être toute pareille à notre eau commune. Dans le mélange supposé de 200 parties d'eau, & de 200 d'Esprit de vin, il y avoit donc au plus 100 parties d'huile éthérée, & au moins 300 d'eau, n'en prenons que 300. On verra aisément qu'il leur appartient $11\frac{1}{4}$ parties de la dilatation totale 25, dont le reste qui est $13\frac{3}{4}$ appartient aux 100 parties d'huile. Mais il faut bien remarquer qu'au lieu que dans la première supposition les parties d'eau & d'huile étoient en nombre égal, dans celle-ci leurs nombres sont comme 3 & 1. C'est le volume 3 d'eau qui a pris l'augmentation $11\frac{1}{4}$, & c'est le volume 1 d'huile qui a pris l'augmentation $13\frac{3}{4}$. Or les dilatations sont d'autant plus grandes, non-seulement en même raison que les augmentations de volume sont plus grandes, mais encore en même raison que les volumes primitifs étoient plus petits. Donc la dilatation de l'huile est à celle de l'eau comme le produit de $13\frac{3}{4}$ par 3 au produit de $11\frac{1}{4}$ par 1, ce qui donne le rapport de 33 à 9, beaucoup plus grand que le premier de 7 à 3.

C'est-là ce qui se trouve, en supposant que dans les 200 parties d'Esprit de vin, il y en avoit 100 d'huile éthérée; mais s'il n'y en avoit que 50, ce qui est très vrai-semblable, auquel cas l'huile ne feroit que la 8^{me} partie du mélange total, on trouveroit en faisant le même calcul que la dilatation de l'huile seroit à celle de l'eau dans un rapport beaucoup plus grand que celui de 33 à 9. M. de Reaumur ne croit nullement impossible que cela n'aille encore plus loin.

Quoi-qu'il en soit, il a fait une observation, qui ne doit pas être obmise. C'est que les degrés moyens de dilatation de l'huile & de l'eau ou flegme d'un même Esprit de vin, ne sont pas proportionnels aux dilatations extrêmes. L'eau se dilate d'abord plus difficilement que l'huile, & ensuite plus facilement, de sorte que par la continuation du mouvement de dilatation elle repare une partie du désavantage qu'elle avoit eu dans le commencement. C'est ce qui a été reconnu en comparant les dilatations moyennes d'une eau pure à celles d'un Esprit de vin d'une dilatabilité connue. Si les

dilatations de l'eau & de l'Esprit de vin par la chaleur de l'eau bouillante devoient être comme 1 & 2, chaque premier degré de dilatation des-deux liqueurs depuis la congélation artificielle, étoient comme 1 & 10. De-là il suit que de deux différents Esprits de vin, le plus foible, qui par conséquent aura plus d'eau, s'élevera moins que l'autre dans le commencement de leur marche par un même degré de chaleur, & que par-là les deux différents Thermometres seront difficiles à comparer, ou même que la comparaison jettera dans l'erreur. Il est vrai que pour les premiers degrés, on pourra compter que la dilatation de l'eau ou flegme sera nulle, mais on ne sçait pas précisément à quel nombre de ces premiers, cette supposition peut s'étendre sans une erreur trop sensible; il est vrai aussi que les dilatabilités extrêmes des deux Esprits de vin étant connues, on pourra faire des réductions, en concevant que le plus foible des deux n'est que le plus fort affoibli par une certaine quantité d'eau pure, mais ce seront des réductions, & du calcul, & il vaut beaucoup mieux que tous les Thermometres soient faits, s'il est possible, avec le même Esprit de vin, ce qui sera fort aisé, puisqu'on peut l'amener à telle qualité que l'on veut.

On a vû par les Thermometres, & l'on a dû en être d'abord fort étonné que le froid faisoit monter la liqueur; & que le chaud la faisoit descendre, mais on a bien-tôt observé que ce n'étoit que dans les commencements de l'action de l'un & de l'autre, & l'on a conçu que la boule qui se resserroit par le froid avant qu'il se fût fait assés sentir à la liqueur, la faisoit monter dans le tuyau, & qu'au contraire cette même boule échauffée avant que la liqueur le fût, & par conséquent dilatée, la faisoit descendre en devenant d'une plus grande capacité. M. de Reaumur a poussé l'exactitude jusqu'à vouloir déterminer dans quelles bornes cet effet, qui ne pouvoit être considérable, étoit renfermé, & il a trouvé que la diminution de la capacité de la boule par le froid, ou son augmentation par le chaud n'alloit qu'à faire monter ou descendre la liqueur dans le tuyau de $\frac{1}{1200}$ partie de son

volume total, & par conséquent de $\frac{1}{3}$ de partie sur 400, ce qui peut bien être négligé par les plus scrupuleux.

Il ne reste plus qu'une circonstance à examiner. On laisse au haut du tuyau, dont le bout est scellé hermétiquement, un espace que la liqueur dans sa plus grande élévation n'achevera point de remplir. Faut-il que cet espace soit ce qu'on appelle vuide, c'est-à-dire, plein d'un air très-rarefié, ou faut-il y laisser de l'air ordinaire? il y a avantage & inconvénient de part & d'autre. Si l'air est très-rarefié, ce qu'on aura aisément executé en échauffant beaucoup le bout du tuyau, après quoi on le scellera brusquement, le jeu de la liqueur sera fort libre dans le tuyau, elle montera dans ce vuide, sans y trouver de résistance; mais aussi l'air contenu dans l'Esprit de vin s'en dégagera aisément, parce qu'il ne sera point pressé, il enlèvera avec lui les parties les plus subtiles de l'Esprit, & cela en changera la qualité, qu'on suppose pourtant devoir être toujours la même. Si l'air du haut du tuyau est de l'air ordinaire, la qualité de l'Esprit de vin ne changera pas, mais cet air se rarefiera par la chaleur aussi-bien que l'Esprit de vin, & repoussera en embas cet Esprit qui tendoit à se dilater. Dans l'embarras de ce pour & de ce contre qui ne peuvent être évalués précisément, M. de Reaumur prend le parti que la prudence conseille en pareil cas; un parti moyen; il faudra de l'air médiocrement échauffé.

SUR LA NATURE DE LA TERRE

EN GENERAL,

ET SUR SES CARACTERES.

NATURELLEMENT on ne s'avisera point de douter, si l'on sçait bien ce que c'est que de la Terre, si l'on distinguera bien cette matière si commune d'avec toute autre, & particulièrement d'avec le Sable. Mais dès que l'on vient à considérer la formation des Pierres, par exemple, qui sont

V. les M.
p. 243.

quelquefois un mélange visible de Terre & de Sable, ou; ce qui est encore plus important, si l'on travaille en Poterie, en Verrerie, en Porcelaine, tous Arts qui demandent une connoissance très-exacte des matières terreuses qu'on y emploie, alors on s'apperçoit, ou qu'on ne sçait pas assés, ou qu'il faut sçavoir mieux qu'on ne le sçait d'ordinaire, quelle est la nature de la Terre, quels sont ses caracteres spécifiques, & si elle differe ou ne differe pas du Sable, qui entre dans les mêmes compositions, car suivant cela, on aura différentes vûes, & les raisonnemens ou les opérations se regleront différemment.

Il ne s'agit point ici de remonter jusqu'aux premiers principes, jusqu'aux particules primordiales, dont la Terre peut être formée. Sans compter que l'entreprise seroit apparemment impossible, elle seroit inutile pour le dessein présent, il ne faut que des caracteres sensibles & palpables, une Philosophie plus grossière suffira, mais malgré sa grossièreté, elle demandera encore assés de subtilité & de finesse.

Quand on n'y regarde pas de près, on peut croire, & plusieurs Philosophes même sont dans ce sentiment, ou à très-peu près, que la Terre n'est que du Sable dont les grains sont plus fins. Mais M. de Reaumur établit des différences spécifiques entre ces deux matières, & il n'est plus permis ni dans la Théorie, ni dans la Pratique de ne compter que sur cette prétendue différence de la grosseur de leurs parties.

Par des expériences de M. de Reaumur très-simples & très-aisées à vérifier, la Terre s'imbibe d'eau de manière à en être augmentée de volume, & réciproquement elle revient à son premier volume lorsqu'elle se dessèche. Le Sable imbibé d'eau autant qu'il peut l'être n'augmente point son volume, & n'en perd rien en se desséchant. De-là il suit évidemment que l'eau ne fait que remplir les interstices que les grains du Sable laissent entre eux, mais qu'outre cette fonction qu'elle a aussi par rapport aux interstices des grains de la Terre, elle pénètre dans l'intérieur de ces grains, les gonfle, & les étend. Si elle ne faisoit qu'y pénétrer, & y
remplir

remplir de petites cavités, elle ne feroit rien de plus que ce qu'elle faisoit dans les interstices, le volume total de la Terre n'en augmenteroit pas, il est nécessaire pour cette augmentation que les grains soient gonflés & étendus. La simple pénétration, soit dans les interstices, soit dans les cavités des grains de la Terre n'a besoin que de la pesanteur, de la mobilité, & de la finesse des particules d'eau, mais la *difension* des grains a un besoin indispensable d'une autre force qui fasse entrer violemment dans les grains plus d'eau qu'ils n'en recevoient naturellement, & qui surmonte la résistance qu'ils apportent à cette difension. Quelle est cette force? il seroit bien difficile de le dire. C'est sans doute celle qui fait que des Cordes imbibées d'eau, venant à se raccourcir parce qu'elles se gonflent, élèvent des poids énormes, c'est celle qui fait que des Coins de bois bien sec entrés de force dans une Roche, la fendent & en détachent de grosses Meules de Moulin, lorsqu'ils se gonflent par l'eau dont ils sont abreuvés. Ces effets de l'eau, beaucoup plus étonnans que celui dont il s'agit ici, nous apprennent seulement qu'appliquée d'une certaine manière elle a une force prodigieuse, l'existence de la force est prouvée de reste, mais sa nature demeure toujours inconnue.

Le Sable, quelque broyé qu'il puisse être, n'en est pas plus ouvert à l'eau, il ne la laisse entrer que dans les interstices de ses grains, & jamais dans leur intérieur, si ce n'est peut-être dans leurs petites cavités, mais alors même l'eau ne les étend pas, puisque le volume total du Sable ne reçoit ni augmentation par l'introduction de l'eau, ni diminution par sa sortie, ou par le desséchement. La Terre est donc une espèce de corps spongieux, dont les particules sont flexibles & capables d'extension, celles du Sable au contraire en sont incapables par leur roideur.

Si l'on veut distribuer les Corps en certaines Classes selon leur pénétrabilité par l'eau, on aura trois Classes, la 1^{re} de corps absolument impénétrables à l'eau, tels que le Verre, l'Argent, l'Or, la 2^{de} de corps peu pénétrables, tels que les

Cailloux & les Cristaux, qui ne le sont que quand ils n'ont pas encore été assés long-temps exposés à l'air, & endurcis par son action, la 3^{me} de corps absolument pénétrables, tels que les bois, les peaux sèches des Animaux, &c. le Sable se rangera dans la 1^{re} Classe, & la Terre dans la 3^{me}, & par-là on voit presque à l'œil que ce sont deux matières fort différentes.

Elles le sont encore par un autre endroit qui n'est pas moins marqué, ni moins décisif. La Terre abreuvée d'eau est ductile, elle prend telle forme que l'on veut, & on le voit tous les jours par l'Art de la Poterie; cette qualité répond à la malléabilité des Métaux, & apparemment n'est au fond que la même. Elle ne se trouve point dans le Sable, ses parties sont trop roides, & trop inflexibles, & sans doute cela tient à ce qu'on a déjà vû qu'il n'est pas spongieux comme la Terre.

Plus la Terre est grasse, plus elle est ductile, mais elle est plus ou moins grasse, ou par elle-même, par le plus ou le moins qu'elle contient d'une certaine onctuosité, ou par la différente quantité de Sable avec lequel elle est mêlée. Le Sable la rend toujours plus maigre.

On pourroit penser que la ductilité qui se trouve dans la Terre, & non dans le Sable, vient de ce que les grains de la Terre sont plus fins, ainsi qu'ils le paroissent ordinairement; car cette finesse contribue certainement à la ductilité, qui consiste en ce que les petites parties glissent aisément les unes sur les autres sans perdre leur liaison, ou en prenant des liaisons nouvelles, mais M. de Reaumur a fait des expériences qui détruisent entièrement cette idée.

Qu'avec de la Terre mêlée de Sable, comme elle l'est toujours, & une quantité suffisante d'eau, on fasse une eau bourbeuse, qu'on laissera reposer dans un Vaisseau, le Sable le plus grossier se précipitera au fond en un certain temps, & laissera la Terre le surnager, parce qu'il est spécifiquement plus pesant qu'elle. Sur ce principe de la différence de pesanteur, il est visible que par cette opération répétée, par différentes lotions successives, on aura enfin le Sable & la Terre

aussi séparés, aussi purs chacun qu'il soit possible. Ce Sable bien pur, on le broye extrêmement fin, on réduit de même en poudre la Terre pure, & l'on voit que ces deux poudres mêlées ensemble & mises dans l'eau s'y soutiennent également. Il faut donc que les particules de l'une & de l'autre soient d'une petitesse à trouver de la part de l'eau une égale résistance à leur descente, c'est-à-dire, qu'elles soient d'une égale finesse. Il faut même à la rigueur que celle des particules de Sable soit la plus grande, car elles sont spécifiquement plus pesantes que celles de Terre, & elles descendroient plutôt qu'elles, ou sans elles, si elles n'avoient une plus grande surface en même raison qu'elles ont plus de pesanteur; or pour avoir une plus grande surface en raison de la pesanteur, elles doivent être plus petites, comme le savent les Géomètres. Cependant une pâte faite de cette même poudre de Sable ne fera point ductile, & celle de la poudre de Terre le sera. La ductilité de la Terre lui vient donc d'une qualité plus intrinsèque que la finesse de ses grains, qui n'appartientroit qu'à des parties intégrantes, & par conséquent elle est propre à être un caractère spécifique qui distingue la Terre d'avec le Sable.

La ductilité de la Terre tient à ce qu'elle est spongieuse. Ses grains non seulement pénétrés & amollis par l'eau, mais gonflés & étendus, vont à la rencontre les uns des autres à cause de cette nouvelle extension, prennent aisément à cause de leur mollesse les figures nécessaires pour s'ajuster exactement ensemble, & sont en état par la même cause de perdre aisément ces figures pour en prendre d'autres. Quand la Terre, dont on avoit fait une pâte en l'abbreuvent d'eau, est desséchée, elle en est plus dure, & mieux liée, parce que les nouveaux engrénements de particules que l'eau y avoit produits subsistent même après l'évaporation. Il est clair que ce seroit le contraire de tout cela pour du Sable qu'on auroit traité comme la Terre.

La pénétrabilité de la Terre par l'eau, est ce qui rend la Terre la plus parfaite impénétrable à l'eau jusqu'à un certain

point. Cette Terre la plus parfaite est la Glaife, qui est moins mêlée de Sable, plus pure qu'aucune autre, & tout le monde sçait que l'eau ne passe point au travers, si ce n'est à une très-petite épaisseur. C'est que l'eau qui en a pénétré une première couche, & l'a pénétrée d'autant mieux qu'elle n'y a trouvé qu'une pure Terre, en a tellement gonflé tous les grains, & si également, qu'ils ne lui permettent plus de passer jusqu'à une seconde couche. Quelques-uns ont crû que l'eau entraînoit de la première couche dans la seconde des grains, qui lui fermoient ensuite le passage, mais M. de Reaumur oppose à ce sentiment entre autres raisons, que la simple vapeur d'une eau chaude, qui ne peut être soupçonnée de déplacer des grains, fait le même effet sur la Glaife.

On pourroit imaginer sans choquer la vraisemblance, que la ductilité de la Terre viendroit de la figure de ses particules, qui seroient des lames bien polies, posées les unes sur les autres, unies par un attouchement immédiat, mais faciles à séparer faute d'engrènement. Cette disposition si favorable ne peut pourtant suffire ici, elle seroit bientôt troublée quand on viendroit à pêtrir la pâte de Terre, & à changer sa forme, & les lames prendroient elles-mêmes les arrangements les moins réguliers & les plus bizarres. De plus les Talcs & les Gypses sont certainement formés par lames, & on trouve qu'ils le sont tant que leur division peut aller, ce qui donne un juste sujet de croire que cette disposition s'étend jusqu'à leurs petites particules. Cependant qu'on les réduise en poudre fort fine, & qu'on en fasse des pâtes bien humectées d'eau, ces pâtes n'auront point de ductilité, c'est donc une qualité attachée, non à la figure précisément, ou à la finesse, ou à l'arrangement, mais à la souplesse des parties.

Les Sels concrets, tels que l'Alun, le Vitriol, le Borax, la Soude, &c. quoique réduits en une poudre si fine qu'elle se soutient dans l'eau, tandis que celle de la Terre ne s'y soutient pas, ne sont jamais, non plus que le Sable, ou les Gypses, une pâte ductile.

M. de Reaumur fait déjà appercevoir quelques usages de

la Théorie. Elle entrera dans le Système de la formation des Pierres qu'il a ébauché en 1721, ainsi que nous l'avons dit *.
 Les caractères de la Terre, qui viennent d'être établis, sont * p. 12; & suiv.
 reconnoître que comme il y a certaines Pierres, telles que le Grès, qui ne sont que du Sable pur, lié par la matière cristalline ou pierreuse que M. de Reaumur a supposée, il y en a d'autres où cette même matière a lié de la Terre pure, car elle se manifeste, & se rend presque visible par les expériences faciles que l'on fait sur la ductilité, & sur son renflement quand elle est bien humectée, ou son raccourcissement quand elle se dessèche. Les Cailloux sont, selon M. de Reaumur, des Pierres pétrifiées une seconde fois, ces Pierres, qui auront eu de la Terre, n'en ont plus étant Cailloux, du moins la Terre y a perdu les caractères qui la rendoient reconnoissable. Cette espece de métamorphose est digne d'attention. Apparemment la matière, en s'insinuant simplement entre les grains d'une Terre, l'avoit rendue Pierre, & ensuite elle la rend Caillou en pénétrant jusque dans l'intérieur des grains.

L'Art de la Poterie confirme la Théorie présente. On sçait combien les Vases faits d'une pâte de Terre sont sujets à se fendre & à se gercer, & combien il faut avoir d'attention à les faire sécher peu à peu & par degrés pour prévenir cet accident. On le prévient aussi en mêlant avec la Terre une certaine quantité de Sable qui n'empêche pas la ductilité nécessaire. Il saute aux yeux que la raison de cette pratique est que le Sable ne se renfle ni ne se raccourcit comme la Terre. Ce qui rend raison des pratiques aveugles des Arts, ce qui les éclaire, doit aussi en corriger de vicieuses, ou en faire naître de plus parfaites.

Nous avons rapporté en 1726*, 1727* & 1728*, * p. 58; & suiv.
 toutes les nouvelles vûes de M. Couplet sur les Revêtements, * p. 132; & suiv.
 ou les Murs, qui ont des Terres à soutenir. Quoique la * p. 103; & suiv.
 Géométrie ait dominé dans ces recherches, la Physique y est entrée autant, à ce qu'il semble, qu'elle le pouvoit, surtout par la seconde hypothèse de M. Couplet, mais la Théorie de M. de Reaumur offre une considération nouvelle très-

30 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE
importante, & qui a échappé à tous ceux par qui ce sujet
a été traité.

Des Terres coupées à plomb s'éboulent si peu qu'à peine
s'en détache-t-il quelques hottées en tout un an, & même
cette petite quantité seroit encore plus petite, si les premières
parcelles avoient été soutenues, & ne fussent pas tombées ;
car ce n'est ordinairement que leur chute, qui a entraîné
celle des secondes. Un Mur n'a donc pas beaucoup de peine
à soutenir ces Terres, si on n'y considère que l'effort qu'elles
font pour s'ébouler, mais elles en ont un beaucoup plus
grand, & très-violent, c'est celui qu'elles font pour s'étendre,
lorsqu'elles sont bien imbibées d'eau, & c'est à quoi le
Mur de revêtement doit s'opposer.

Il est vrai que cette tendance des Terres à s'étendre, doit
agir en tout sens, verticalement aussi-bien qu'horizontalement ;
& que le Mur ne s'oppose qu'à l'action horizontale, mais il
faut observer que la tendance verticale n'ayant pas la liberté
d'agir, du moins dans toutes les couches inférieures de Terre
pressées par le poids des supérieures, toute la tendance ver-
ticale se tourne en horizontale, tant que la difficulté de sou-
lever les couches supérieures est plus grande que celle de
forcer le Mur, & cela peut aller, & va effectivement fort
loin. M. de Reaumur a fait une Expérience, d'où il résulte
qu'une Terre qui a très-peu de hauteur, ne laisse pas de s'é-
tendre beaucoup davantage dans le sens horizontal, & que
la force qu'elle a pour s'étendre en ce sens-là est beaucoup
plus grande que tout son poids, & par conséquent que la
force dont elle auroit besoin pour s'étendre autant dans le
sens vertical.

Plus les Terres auront de facilité à s'imbibier d'eau, plus
elles auront de poussée contre un Mur de revêtement, des
Sables n'en auroient aucune à cet égard, & par cette raison,
M. de Reaumur propose pour remède à l'inconvénient dont
il s'agit, de mêler exprès des Gravois dans les Terres qui
ne seroient pas naturellement assez sablonneuses. Non seule-
ment les Gravois ou les Sables ne s'imbibent pas d'eau,

mais ils laisseront des interstices qui seront des especes de retraites ménagées à la Terre qui se renflera, moyennant quoi elle n'agira pas contre le Mur.

Pour un examen parfait de la nature de la Terre, les deux caracteres que nous avons exposés jusqu'ici, ne suffiroient pas quoiqu'ils puissent passer pour les principaux. M. de Reaumur en trouve plusieurs autres, qui distingueront les Terres entre elles, & dont il ne donne encore qu'une espece de dénombrement, se réservant à les considérer plus en détail.

Les Terres diffèrent par les couleurs, soit celles qu'elles ont naturellement, soit celles qu'elles prennent au feu.

Les unes se vitrifient, les autres se calcinent, & cela en différents degrés.

Elles passent toutes pour être Alkalines, & les Acides agissent sur elles; mais fort différemment. Il y a des Terres qui reçoivent des plus foibles Acides une violente impression, tandis que d'autres en reçoivent à peine une sensible des Acides les plus forts. Elles sont encore à cet égard fort différentes des Métaux par le peu de temps qu'elles demeurent suspendues dans leurs Dissolvants. Cette matière peu examinée jusqu'à présent promet de la nouveauté.

Encore une qualité des Terres, à laquelle on n'a pas fait d'attention, c'est leur odeur. Celle des Pluyes d'Été est fort connue, elle vient de la Terre qui n'a presque d'odeur que quand elle est humectée, tout au contraire de quelques autres matières, comme les Cheveux, la Corne, &c. qui n'en ont que par le feu.

On sent assez ce qu'on peut attendre des recherches qui se feront sur toutes ces qualités des Terres, si exposées à tout le monde pour la plûpart, & si peu observées. Leurs combinaisons feront naître une distribution générale des Terres en Classes, Genres & Especes, pareille à celle qui a paru si nécessaire en Botanique, & dont on s'occupe depuis si longtemps. Ces sortes d'Ordres, ou d'Ordonnances, si l'on veut, ne sont, à la vérité, que des productions de l'Esprit humain, mais ils nous aident à embrasser mieux tout ce que la Nature

32 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE
ne nous a donné que pêle-mêle & en confusion ; quelquefois
même ils donnent lieu de découvrir des causes générales, &
de prévoir avec vrai-semblance des faits particuliers.

V. les M.
p. 1. **N**ous renvoyons entièrement aux Mémoires
La Comparaison des Observations faites à Paris &
à Aix.

V. les M.
p. 57. L'Écrit de M. de Reaumur sur la Méchanique avec la-
quelle certains Insectes roulent des feuilles.

V. les M.
p. 574. Et les Observations Météorologiques de cette année 1730 ;
par M. Maraldi.



ANATOMIE;

ANATOMIE.

SUR LE CRISTALLIN.

M PETIT le Médecin, qui, comme on l'a vû dans V. les M. plusieurs des Volumes précédents, s'est attaché particulièrement à l'Oeil, est entré dans des détails beaucoup plus grands qu'il n'avoit encore fait sur le Cristallin, une des principales parties d'où dépend la perfection de la Vision, & qui de plus est le siège de la Cataracte. P. 4. & 435

Il ne s'est pas borné aux Cristallins humains de tous âges; il a étendu ses recherches jusqu'à ceux de tous les Quadrupedes, Oiseaux, Poissons, qu'il a pû recouvrer. Il en a considéré la différente consistance, la couleur, la figure, les dimensions, la pesanteur. Voici ce qui résulte de ses observations.

Dans les Serpents & les Poissons, le Cristallin est presque sphérique.

Dans tous les autres Animaux, j'entends ceux que M. Petit a vûs, il est Lenticulaire, comme on sçait, ou formé de deux Segments de Sphère posés l'un contre l'autre, & qui ont une circonférence circulaire commune. Les deux Sphères, dont ces Segments sont portions, ne sont que très-rarement égales. La Sphère à laquelle appartient le Segment qui fait la surface antérieure du Cristallin est presque toujours la plus grande des deux, & par conséquent la surface antérieure du Cristallin est moins convexe, ou moins courbe que la postérieure, & fait de moindres refractions. M. Petit a eu la patience de mesurer dans un grand nombre de Sujets de différentes espèces ces deux convexités, le diamètre de la circonférence commune, ou la largeur du Cristallin, la longueur de la ligne menée du sommet d'un Segment au sommet de l'autre, ce

Hist. 1730.

E

qui est l'épaisseur ou l'axe du Cristallin. Ces petites mesures sont les plus difficiles à prendre, & les plus ennuyeuses par leur petitesse même. Pour ces dimensions & pour les pesanturs des Cristallins, M. Petit a fait une Table de 26 Cristallins humains de différents âges, & une autre Table de 36 Cristallins de Bœufs, dont il est aisé d'avoir une assez grande quantité.

La pesantur du Cristallin humain a été trouvée de 1 grain $\frac{1}{2}$ dans un Fœtus de 7 mois, & passé 10 ans elle est communément de 4 grains ou 4 $\frac{1}{2}$, rarement va-t-elle à 5.

La pesantur des Cristallins de Bœufs, que l'on peut supposer avoir été tous tués au même âge, varie depuis 38 grains jusqu'à 56.

Outre ces deux Tables, M. Petit donne un grand nombre d'observations pareilles sur des Cristallins d'Animaux de différentes especes.

En général, la pesantur des Cristallins ne dépend pas seulement de leur grosseur, mais encore de leur fermeté.

Ils sont plus fermes dans les Animaux plus âgés. Ils ressemblent, dans les Enfants nouveaux-nés, à de la Bouillie refroidie. Cette grande mollesse diminuant toujours, le Cristallin a dans toute sa substance vers l'âge de 15 ou 20 ans, une fermeté assez égale, ensuite elle augmente encore, mais inégalement, elle est plus grande vers le centre, que vers la circonférence, & quoiqu'elle continue toujours d'augmenter, elle conserve presque toujours cette inégalité.

Le Cristallin de l'Homme est moins ferme que ceux des Oiseaux, des Quadrupedes, & des Poissons, & ils suivent à cet égard l'ordre où nous venons de les nommer. Dans les Poissons la partie centrale ou intérieure est presque dure comme de la Corne, & en récompense la partie extérieure est plus molle que dans les autres Animaux, & n'est qu'un mucilage.

Tout le monde sçait que le Cristallin humain perd de sa convexité avec le temps, mais une chose qui lui est particulière, & que M. Petit n'a observée dans aucun autre, c'est

qu'il change de couleur. Il n'en a point, & est parfaitement transparent depuis la naissance jusqu'à 25 ans ou environ, après quoi il prend dans son centre une légère couleur de jaune, qui ensuite devient toujours plus foncée, & s'étend toujours vers la circonférence. M. Petit a vu les deux Cristallins d'un Homme de 81 an, qui ressembloient à deux morceaux d'un bel Ambre jaune.

Plus les Cristallins sont fermes, plus ils jaunissent.

Il n'est pas fort rare que les deux Cristallins d'un même Sujet différent en quelque chose.

Les Cristallins séchés à l'air pendant un temps suffisant, perdent beaucoup de leur poids, & par conséquent de leur matière. Celle qui ne s'est point évaporée, & qui est la plus solide, est selon M. Petit la matière transparente, mais qui ne l'est plus après l'évaporation de l'autre. On peut concevoir des petites lames assés fermes, qui pour se laisser pénétrer les unes après les autres par des rayons de lumière non interrompus avoient besoin d'être tenues dans de certaines positions exactes, dans un certain ordre, & l'étoient par une matière plus molle, qui les soutenoit & remplissoit leurs intervalles. Après l'évaporation de cette matière, les lames se dérangent, tombent en confusion les unes sur les autres, & il n'y a plus de transparence, ainsi qu'il arrive à du Verre pilé.

Plus un Cristallin est ferme; moins il perd de son poids en séchant, & plus il a de matière transparente.

Le Cristallin de l'Homme peut perdre jusqu'aux $\frac{3}{4}$ de son poids. Plusieurs Cristallins de jeunes Animaux en perdent autant.

La structure du Cristallin par couches ou enveloppes concentriques posées les unes sur les autres se confirme telle qu'on la conçoit ordinairement. M. Petit s'en est assuré tant par des coupes adroites du Scalpel, que par des expériences de Cristallins mis dans plusieurs liqueurs différentes, & principalement dans des Esprits acides, où ils se sont fendus, tantôt en Côtes de Melon, tantôt du centre à la

36 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE
circonférence, ou de la circonférence au centre, mais toujours d'une manière à donner lieu de juger de la construction totale.

M. Petit s'est fort étendu sur la Capsule du Cristallin, à laquelle il a donné un Mémoire entier. C'est une Membrane qui enveloppe tout le Cristallin, mais une Membrane si déliée que d'habiles Anatomistes en ont nié l'existence, ou du moins en ont douté. Elle n'est effectivement guère moins fine dans l'Homme qu'une toile d'Araignée. Aussi quelques-uns l'appellent-ils *Arachnoïde*. Elle est une fois plus épaisse dans le Bœuf, que dans l'Homme, & encore plus dans le Cheval. Elle seroit par conséquent moins difficile à démontrer dans ces Animaux, & ce seroit une assez forte présomption qu'elle devoit se trouver dans l'Homme, mais on l'y démontre aussi, & même sans injection, quoique ce fût d'ailleurs une chose assez surprenante qu'une Membrane si fine pût être injectée. Elle peut l'être cependant. Elle reçoit quelquefois aussi une Injection naturelle, c'est-à-dire, qu'il s'y fait une inflammation, & que ses Vaisseaux plus remplis de Sang, ou de la liqueur qu'ils portent, deviennent visibles, & qu'on apperçoit leur distribution, & leurs ramifications.

Le Cristallin de l'Homme revêtu de sa Membrane ou Capsule paroît moins transparent à sa partie antérieure qu'à la postérieure, mais s'il est dépouillé, sa transparence est égale des deux côtés.

Le ligament ciliaire se termine & s'attache à la partie antérieure de la Capsule par des fibres qu'il y jette, & par les Vaisseaux qu'il lui fournit. Ces vaisseaux ne sont que des Lymphatiques. Quand il paroît du Sang dans cette Membrane, c'est par quelque accident particulier, comme lorsque dans un accouchement difficile la tête de l'Enfant a été violemment comprimée au passage, & que le Sang y a été obligé de s'insinuer dans des Canaux qui ne lui étoient pas destinés.

La Capsule se nourrit donc de cette Lymphé, qui lui est apportée par les Vaisseaux qu'elle reçoit du Ligament Ciliaire,

On voit qu'il s'en épanche une partie dans la cavité de la Capsule, entre cette Membrane & le Cristallin.

M. Petit l'a toujours trouvée transparente, tant dans l'Homme que dans les Animaux, même dans les Sujets qui avoient des Cataractes. La Cornée & la Membrane Hyaloïde trempées dans l'eau bouillante, dans les Esprits acides, &c. y perdent leur transparence, la Membrane Cristalline y conserve la sienne, elle ne la perd que dans l'Esprit de Nitre, encore s'y dissout-elle le plus souvent, plutôt que de la perdre. Les Cristallins deviennent opaques dans des Solutions de plusieurs sortes de Sels, & leurs Capsules ne le deviennent pas.

Il seroit fort naturel que de la Capsule, il partît des Vaisseaux, qui entraissent dans le Cristallin, c'est ainsi que toutes les parties du Corps de l'Animal sont liées avec leurs voisines, mais M. Petit s'est fort assuré qu'il n'en étoit pas de même ici. Le Cristallin est la seule partie parfaitement isolée à l'égard de toute autre, & en effet sa transparence le demande; elle seroit au moins troublée & diminuée si des Vaisseaux venoient serpenter dans la substance, & traverser de tous côtés ces lames ou ces couches qui le composent, & dont le tissu a besoin d'être si homogène.

Comment donc se nourrit le Cristallin, s'il n'a point de Vaisseaux ? il s'imbibe de cette Limphe épanchée dans la Capsule, & s'en nourrit comme font plusieurs autres Corps qui croissent sans *intus susception*. Peut-être même ne se laisse-t-il pénétrer que par la partie la plus séreuse de cette liqueur, tandis que l'autre partie plus visqueuse reste extérieure, & prenant peu à peu une certaine consistance, se moule entre la Capsule & le Cristallin dont elle devient la première & la plus grande couche pour un temps, car ensuite elle sera recouverte par une autre.

Si cette Limphe vient à manquer, le Cristallin devient dur & opaque, & peut aisément se réduire en poudre, ainsi que M. Petit l'a observé. La Capsule qui sera le Réservoir des Sucs nourriciers du Cristallin aura donc un usage assés

important, sans compter celui de l'arrêter & de le tenir en état dans le Chaton de l'Humeur Vitrée, où il est encaissé, comme un Diamant dans le sien.

Cette liqueur est en si petite quantité dans l'Homme qu'elle s'est dérobée aux expériences que M. Petit en eût voulu faire. Il faudroit avoir 18 ou 20 Yeux à la fois, & tous bien pourvus de la Limphe, car ils ne le sont pas tous, & il est bien visible que cela ne seroit pas aisé. Du moins il a fait quelques épreuves sur la Limphe Cristalline des Bœufs, qui est en plus grande quantité, & d'ailleurs plus visqueuse, & plus propre à se décomposer, mais il n'en a encore pu tirer de conséquences bien précises.

Il en tire une assés importante de ce qu'il a découvert sur la Capsule. On croit encore qu'il peut y avoir des Cataractes membraneuses, qui seront des Membranes épaissies, & devenues opaques, on en a vû*. Mais M. Petit juge qu'on a été trompé par une fausse apparence. Ces Cataractes sont la Capsule épaissie, à la vérité, mais non pas dans sa propre substance. Le Cristallin, faute de nourriture suffisante s'est desséché, & en se desséchant s'est collé à la Capsule, dont il n'étoit plus séparé par la Limphe. L'épaisseur qu'on trouve de plus à la Capsule, & qui cause son opacité, lui vient de quelques particules étrangères, qui appartenoient au Cristallin. Qu'on les enleve par le moyen d'un peu d'eau, la Capsule redevient transparente. Combien de choses à observer sur l'Oeil seul ! combien en avons-nous déjà dit, dont de grands Oculistes, & qui ont eu de grands succès, n'ont eu peut-être guère de connoissance !

* V. l'Hist.
de 1722.
p. 15. & 16.

DIVERSES OBSERVATIONS ANATOMIQUES.

I.

M DU VIVIER, Chirurgien Major de l'Hôpital de Thionville, envoya à M. Morand un Rein unique, tel qu'il l'avoit trouvé à l'ouverture du Corps d'un Suisse. On ne laissoit pas de conjecturer par une échancrure de la surface que ce Rein avoit été formé de la jonction des deux, mais comme M. du Vivier avoit trouvé le Foye du Sujet extrêmement gros, il y avoit lieu de croire que des deux Reins c'étoit le droit qui ayant été fort pressé & fort incommodé, s'étoit uni à l'autre, dont l'extension naturelle n'avoit point été gênée, & en effet ce Rein unique étoit beaucoup plus gros dans toute sa partie gauche, & tous les Vaisseaux, qui eussent appartenu aux deux Reins, & qu'il avoit, quoique dans une position un peu différente de l'ordinaire, étoient aussi plus gros de ce même côté-là. M. Morand le disséqua en pleine Académie, & on le trouva effectivement unique en dedans, comme il le paroissoit en dehors. Il n'est point dit que le Suisse eût aucune incommodité qui se rapportât à cette conformation singulière.

Elle ne l'est pas cependant à tel point, qu'il n'y en ait déjà des exemples connus. M. Morand en cita un pris de la Centurie 1^{re} Hist. 77. des *Histoires Anatomiques* de Th. Bartholin. Lui-même en fit voir un pareil, & M. du Vivier en alleguoit aussi un qu'il avoit vû autrefois. On peut aisément juger qu'il y avoit des différences dans le nombre & dans la distribution des Vaisseaux.

II.

Un jeune Gentilhomme de Languedoc âgé de 13 à 14 ans qui après s'être fort échauffé, s'étoit mis les pieds dans de l'eau froide, en eut une fièvre ordinaire, dont la suite fut

très-fâcheuse. C'étoit une tumeur très-considérable, qui occupoit le milieu de la région Épigastrique, & presque les deux Hypochondres, au haut de laquelle on remarquoit le Cartilage Xiphoïde relevé & poussé en dehors de deux pouces; & qui étoit terminée dans le bas à un pouce au dessus de l'Ombilic. Comme les Cataplasmes, les Remedes émollients, spiritueux, &c. avoient été inutiles, & que le Malade attaqué d'une fièvre lente tomboit dans un desséchement & dans un dépérissement très-menaçant, on résolut à Montpellier d'ouvrir la tumeur, & ce fut M. Soullier, Ecuyer, Maître Chirurgien & Anatomiste Royal en l'Université de Médecine de cette Ville, qui fit l'opération. Il trouva le Foye considérablement abscedé dans sa partie antérieure & convexe, il s'y étoit fait un trou qui auroit pû recevoir la moitié d'un Oeuf de Poule, & il en sortoit dans les Pensemens de la matière sanguinolente très-épaisse, quelquefois jaunâtre, amere & inflammable, qui étoit de véritable Bile, & toujours des flocons de la propre substance du Foye, où l'on pouvoit appercevoir de petits bouts de Vaisseaux, les uns Sanguins, les autres Biliaires.

La principale difficulté étoit de bien vider la matière de l'Abscès, d'en empêcher le séjour dans le Foye, & le reflux dans le Sang. Pour cela M. Soullier imagina une Cannule d'argent particulière, émoussée par le bout qui entroit dans le Foye, de peur qu'elle ne le blessât, mais percée de plusieurs ouvertures latérales, qui recevoient la matière nuisible. De-là il étoit aisé de la jeter en dehors, & on avoit eu même la précaution de faire qu'elle ne pût s'épancher que sur une plaque de plomb appliquée à la Playe, car autrement elle eût causé des excoriations à la Peau. Le tout réussit si bien, que l'on vit la fièvre du Malade diminuer de jour en jour, & son emboppment naturel revenir peu à peu. Sa playe se cicatrisa en très-peu de temps.

M. Soullier a crû devoir prévenir une objection de Théorie qu'on pourroit faire. Presque tous les Anatomistes tiennent que la Bile contenüe dans les Vaisseaux du Foye est toujours

toujours insipide, & à peine colorée, & qu'il n'y a que celle de la Vésicule qui soit jaune & amere. Cependant on a vu ici de la Bile ainsi conditionnée qui ne sortoit pas de la Vésicule, mais il est fort naturel que les qualités qu'elle y auroit prises, elle les ait prises par son séjour dans la substance du Foye.

La Relation envoyée à l'Académie par M. Soullier a été signée de M^{rs} Chicoyneau & Bourraigne, fameux Médecins de Montpellier.

III.

Un homme de 28 ans employé à Brest dans les Fermes du Roy, s'étoit plaint pendant 10 mois d'une douleur de poitrine, qui lui ôtoit la faculté de respirer, d'un vomissement qui lui prenoit par paroxismes, & d'une pesanteur dans le bas ventre. Il mourut après avoir essuyé inutilement tous les remèdes ordinaires, & il fut ouvert par M. Cadran Chirurgien des Vaisseaux du Roy à Brest, qui en a envoyé la Relation à M. du Fay. On lui trouva plus de causes de tous ses maux qu'il n'en falloit, les Poumons flétris & très-secs, la Pleure très-enflammée, les Intestins gangrenés, la Vessie raccornie & vuide, la Vésicule du Fiel pareillement toute vuide, mais on lui trouva aussi ce qu'on n'eût pas soupçonné, & ce qui n'avoit rapport à aucun des maux dont il se plaignoit. Il n'avoit jamais rendu de sable, jamais eu de douleurs Néphrétiques, ni de suppression d'urine, cependant son Rein droit, devenu extraordinairement gros, d'une substance cartilagineuse, & si dure qu'on eut de la peine à le couper, renfermoit une grosse Pierre du poids de 6 Ounces $\frac{1}{2}$. Le corps de la Pierre, formé à l'ordinaire par couches, remplissoit la capacité du Bassin, & par son bout inférieur enfiloit la route de l'Uretere; mais il partoit de ce corps un grand nombre de branches d'une figure extrêmement irrégulière, dont les unes se distribuoient dans les Cellules des Vaisseaux Excrétoires, & les autres ne s'attachoient à rien; elles n'étoient toutes que des graviers entassés, & enveloppés d'une lame osseuse, tirant sur la couleur d'un Corail blanc.

Le Rein gauche étoit dénué de toute sa substance, n'ayant ses Cellules remplies que d'une liqueur verdâtre. Il est presque inconcevable que de semblables Reins ne se soient pas fait sentir, aussi-bien que toutes ces autres parties qui n'étoient pas plus mal affectées.

IV.

M. du Fay, Médecin du Port de l'Orient, a écrit à M. Geoffroy, que dans le cours de deux ans, il étoit sorti à un Charpentier de ce Port, âgé de 84 ans, 4 Dents, 2 Incisives, & 2 Canines.

V.

M. Boüillet, dont nous avons déjà parlé plusieurs fois; Secrétaire de l'Académie de Bésiers, & Correspondant de celle de Paris, a écrit à M. de Mairan que les Vers ronds & longs, qui sont toujours assés communs dans le pays où il est, l'ont été beaucoup davantage en 1730. Des personnes de tout âge, de tout sexe, de tout tempérament, en ont été attaquées & en ont rendu même quelquefois par la bouche. Quelques-uns en sont morts malgré tous les secours de la Médecine. La femme d'un Artisan de Bésiers a été celle qui a eu la maladie la plus considérable & la plus opiniâtre. Elle a jetté dans l'espace de 25 jours 21 ou 22 Vers, dont 6 sont venus par la bouche, 5 vivants & 1 mort, & les autres par les selles, vivants la plûpart, mais qui mouroient peu de temps après. Ce n'étoit qu'à force de remèdes les plus puissants redoublés qu'on les arrachoit de son corps, & le plus grand nombre n'en avoit pas été tué.

Cette femme avoit à la vérité usé de quelques mauvais aliments, mais ordinaires dans le pays, & aux gens de son état, & d'autres personnes, qui n'en avoient pas usé, & qui faisoient même des excès de vin, ne laissoient pas de tomber dans cette maladie. Cela a fait penser à M. Boüillet que la principale cause de cette abondante génération de Vers avoit été la grande douceur de l'hiver de 1730, qui avoit fait éclore leurs Oeufs en plus grande quantité, & plus facilement, si cependant ces Vers sont Ovipares.

Car M. Boüillet lui-même rapporte que dans un Ver de cette espece, plus gros que les autres, on a vû clairement de petits Vers vivants monter & descendre. Ce fait, qui n'a été vû que de la Mere du Malade, dont le Ver étoit sorti, & qui fut dit aussi-tôt à un Maître Apoticaire de Béliers, ne paroîtroit pas assés attesté, s'il n'y en avoit deux à peu près semblables, l'un dans une Lettre insérée dans les *Actes* de Th. Bartholin tom. 3. c. 58, l'autre dans la nouvelle Edition du *Traité de la Génération des Vers*, p. 39.

VI.

Le même M. Boüillet a vû un Foye de Coq pesant un peu plus d'une livre. Il n'avoit rien d'extraordinaire que sa grosseur monstrueuse. Le Coq avoit été tué par hazard d'un coup de pierre, & on ne lui avoit remarqué aucune sorte d'indisposition.

VII.

M. Garfin, Correspondant de l'Académie, & qui a été employé par la Compagnie Hollandoise des Indes Orientales en qualité de Chirurgien, a vû dans l'Estomac parfaitement vuide d'une Bonite que l'on prit dans la Mer au de-là de l'Equateur, un Ver qui y étoit assés fortement attaché, & dont on a joint ici la figure au naturel, pour tenir lieu d'une plus ample description. Le corps de ce petit Animal est divisé en deux parties peu inégales par une bulle assés grosse & bien marquée, placée comme sous le ventre, & qui peut s'enfler & se desinfler alternativement. Quand cette bulle s'enfle elle s'attache par un orifice qu'elle a, & qui se dilate, à quelque corps tel qu'étoit l'estomac de la Bonite, & alors ne contenant qu'un air très-rarefié, & pressée de toutes parts également par l'air plus dense qui l'environne, elle est, à la manière d'une Ventouse, fortement appliquée à l'endroit qu'elle a faisi. C'est-là le point fixe sur lequel se font les deux mouvements de l'Animal. Par l'un sa bulle étant arrêtée à demeure il promene sur ce centre en tous sens la partie antérieure de son corps qui est flexible, s'allonge & se raccourcit, & même se met en arc, & sa bouche ou trompe qui est

à l'extrémité de cette partie antérieure va sucer successivement tout ce qui se trouve dans l'espace assez grand que ce mouvement si varié peut parcourir. C'est à cause de cette succion que M. Garfin a nommé ce Ver *Hirudinella marina*, petite Sangsue de Mer. Par l'autre mouvement, qui est proprement le progressif, l'Insecte ayant arrêté sa bulle à un endroit, arrête sa bouche à un autre le plus éloigné qu'il peut, & ensuite accourcissant sa partie antérieure, & desinflant sa bulle qui lâche ce qu'elle avoit saisi, il avance vers le lieu où est sa bouche, en trainant seulement sa partie postérieure, qui ne paroît point contribuer par elle-même à la progression.

Cet Insecte tiré de l'Estomac de la Bonite ne vécut qu'environ deux heures. Exposé à l'air il étoit languissant, & reprenoit de la vivacité dans de l'eau de Mer. Il diminua sensiblement de volume pendant qu'il vivoit encore.

M Domaingo Sorhaiz, Chirurgien de M^{rs} les Ambassadeurs d'Espagne, a fait voir différents Bandages pour les Descentes Inguinales, pour celles de Matrice, pour les Exomphales, pour les incontinenances d'Urine, pour la Chute de l'Anus, pour la compression de l'Artère Crurale dans l'amputation de la Cuisse, & l'Académie y a trouvé plusieurs choses particulières à M. Sorhaiz, & qui marquent en lui bien du génie, soit pour inventer, soit pour perfectionner.

Nous renvoyons entièrement aux Mémoires L'Observation de M. Morand sur une altération singulière du Cristallin, & de l'Humeur Vitrée.

V. les M.
P. 328.

L'Écrit de M. Vinflou sur les Mouvements de la Tête; du Col, &c.

V. les M.
P. 345.

Celui de M. Hunaud sur les Os du Crane de l'Homme.

V. les M.
P. 545.





C H I M I E.

SUR LES BOUILLONS DE VIANDE.

LES Bouillons de Viande sont la nourriture ordinaire V. les M. p. 217.
des Malades, & quand il faut leur mesurer les aliments fort juste, il est à propos de sçavoir quelle quantité d'aliment ces Bouillons contiennent. On le sçait peut-être en gros, & par une espece d'estime, & cela suffit pour les cas qui ne sont pas de rigueur, mais dans ceux qui en sont, il seroit bon de le sçavoir avec précision, & en général ce sera au moins une connoissance curieuse.

On a fait anciennement dans l'Académie quantité d'Analyses de différentes Viandes, mais ces Viandes étoient distillées crües au Bain-Marie, & en cet état, & par cette voye, il ne seroit pas étonnant qu'elles nous donnassent des principes différents ou en qualité, ou en quantité, de ceux qu'elles donnent à une eau où elles auront long-temps bouilli, & jusqu'à faire, si l'on veut, un Consommé. C'est ce qu'on ne s'étoit point encore proposé, & ce que M. Geoffroy ajoute à ce qui s'étoit déjà fait.

Son procédé général peut se diviser en 4 parties, 1.^o par la simple distillation au Bain-Marie, & sans addition, il tire d'une certaine quantité, comme de 4 Onces d'une Viande crüe, tout ce qui s'en peut tirer. 2.^o Il fait bouillir 4 autres Onces de la même Viande autant & dans autant d'eaux qu'il faut pour en faire un Consommé, c'est-à-dire, pour n'en pouvoir plus rien tirer, après quoi il fait évaporer toutes les eaux où la Viande a bouilli, & il lui reste un Extrait aussi solide qu'il puisse l'être, qui contient tous les principes de la Viande, dégagés de flegme & d'humidité. 3.^o Il analise

cet Extrait, & sépare ces principes autant qu'il est possible:
 4.^o Après cette analise il lui reste encore de l'Extrait une certaine quantité de fibres de la Viande très-desséchées, & il les analise aussi.

La 1^{re} partie de l'opération est en quelque sorte détachée des trois autres, parce qu'elle n'a pas pour sujet la même portion de Viande, qui est le sujet des trois dernières. Elle est nécessaire pour déterminer combien il y avoit de flegme dans la portion de Viande qu'on a prise, ce que les autres parties de l'opération ne pourroient nullement déterminer.

Ce n'est pas cependant qu'on ait par-là tout le flegme; ni un flegme absolument pur. Il y en a quelque partie que le Bain-Marie n'a pas la force d'enlever, parce qu'elle est trop intimement mêlée dans le Mixte, & ce qui s'enleve est accompagné de quelques Sels volatils, qui se découvrent par les épreuves Chimiques.

M. Geoffroy ayant pris 4 Onces de la meilleure chair de Bœuf, dont il avoit ôté la Graisse, les Os, les Cartilages, les Tendons & les Membranes, il en a tiré par la distillation au Bain-Marie 2 onces, 6 gros, 36 grains de flegme, ce qui marque que le flegme seul fait une partie considérable du tout, même sans compter ce qui n'a pû s'élever. Ensuite 4 onces de la même chair, cuites dans un vaisseau bien fermé, avec 18 chopines d'eau versées à différentes reprises, ont donné après l'ébullition & l'évaporation 1 gros 56 grains d'Extrait, & il est resté 6 gros 36 grains de fibres séchées.

Par l'analise de l'Extrait il est venu un Sel volatil en cristaux plats, formés comme ceux du Sel volatil de l'Urine, & qui paroît armoniacal. M. Geoffroy croit que c'est celui qui se sépare du Sang par les Urines après la nutrition, & qu'on peut le regarder comme le Sel essentiel de la Viande. Après le Sel volatil il est venu de l'Huile, & il est resté une Tête-morte ou Charbon très-léger en très-petite quantité.

L'analise des fibres a donné à peu près les mêmes produits, dans le même ordre, & en doses un peu différentes.

Ce que nous appellons ici l'Extrait contient toute la

substance nourrissante de la Viande. Si 4 Onces de chair de Bœuf donnent 1 gros 56 grains de cet Extrait, une Livre de 16 Onces en donnera 7 gros 8 grains, & par conséquent si on prend un Consommé d'une Livre de Bœuf, on fait ce qu'on prend de nourriture solide. Mais comme les Bouillons se font de différentes Viandes, & le plus souvent mêlées, M. Geoffroy a aussi travaillé sur celles qu'on emploie le plus ordinairement.

Dans 4 Onces de chair de Veau, il y a 18 grains de flegme de plus que dans le Bœuf, on en tire 46 grains d'Extrait de plus, & il reste 46 grains de moins de fibres desséchées. On auroit pû prévoir avant l'opération la première de ces différences, & même les deux autres, car le Veau qui se nourrit & croît, a besoin d'une plus grande quantité de Sucs que le Bœuf qui n'a qu'à se nourrir. Il est à présumer que parmi les Sucs du Veau, il y en a un plus grand nombre de propres à former des Os ou des Cartilages, que parmi ceux du Bœuf, & de-là M. Geoffroy tire cette conjecture, que les Bouillons de Veau conviendront peut-être mieux aux Malades qui sont encore en âge de croître, ou qui sont tombés dans une grande maigreur. Si l'on ne va pas ordinairement jusqu'à ces sortes de subtilités de pratique, ce n'est pas qu'elles ne fussent utiles, c'est qu'on ne se donne pas la peine de les rechercher.

La chair de Mouton a été traitée de la même manière que les deux précédentes, & il en a résulté qu'elle contient plus de Sucs nourriciers, & de principes volatils. La chair de Poulet, celles de Chapon, de Perdrix, &c. ont subi aussi l'examen de M. Geoffroy, & il a fait des Tables des doses exactes des produits de toutes ses opérations. Par-là on est en état de ne plus faire au hasard des mélanges de différentes Viandes, & de savoir précisément ce qu'on y donne, ou ce qu'on y prend de nourriture.

Il faut observer que les doses des Extraits marquées dans les Tables, sont les doses extrêmes, c'est-à-dire, qu'elles supposent qu'on a tiré de la Viande tout ce qui s'en pouvoit

48 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE
tirer par l'ébullition, mais les Boüillons ordinaires ne vont pas jusque-là, & les Extraits qui en viendroient seroient moins forts. M. Geoffroy en les réduisant à ce pied ordinaire, trouve qu'on a encore beaucoup de tort de craindre, comme on fait communément, que les Boüillons ne nourrissent pas assés les Malades. La Médecine d'aujourd'hui tend assés à rétablir la Diète austère des Anciens, mais elle a bien de la peine à obtenir sur ce point une grande soumission pour l'Antiquité.

*SUR UN GRAND NOMBRE
DE PHOSPHORES NOUVEAUX.*

V. les M.
p. 524.

LES Phosphores sont une des nouveautés les plus récentes; & en même temps les plus curieuses de la Phisique moderne. D'un côté un Cordonnier de Boulogne en Italie, croyant tirer de l'Argent d'une Pierre qu'il avoit trouvée au bas du Mont Paterno, s'avisa de la calciner, & c'est-là le fameux Phosphore qu'on appelle la Pierre de Boulogne; d'un autre côté un Chimiste Allemand, qui espéroit trouver la Pierre Philosophale dans l'Urine humaine, n'y trouva qu'un second Phosphore, dont le secret eût péri avec lui, si M. Kunkel, Chimiste de M. l'Electeur de Saxe, ne se fût mis à le chercher, & ne l'eût retrouvé à force de travail.

Ces deux Phosphores ont une différence très-considérable. La Pierre de Boulogne, exposée simplement au jour, y prend de la lumière, mais une lumière foible, qui ne s'apperçoit que quand la Pierre est ensuite transportée dans un lieu obscur. Elle ne peut mettre le feu à rien. Le Phosphore urineux de Kunkel s'enflame par le seul attouchement de l'air froid ou chaud, de nuit comme de jour, & peut mettre le feu à des matières fort combustibles. Aussi ce Phosphore s'appelle-t-il *brûlant*.

Ce n'est pourtant pas que cette différence soit absolument essentielle, elle pourroit bien n'être que du plus au moins.

Il y a toute apparence que dans la Pierre de Boulogne; aussi-bien que dans le Phosphore urinaire, il se fait une véritable inflammation, mais une inflammation de parties si déliées; qu'il n'en résulte que de la lumière sans aucune chaleur. Les rayons du Soleil répandus dans l'air, lors même que l'air est couvert de nuages, suffisent pour allumer les Soufres très-subtils de la Pierre de Boulogne, & n'auroient pas la force d'allumer des matières tant soit peu plus grossières, telles que les Soufres du Phosphore urinaire; mais ces mêmes Soufres ont été mis par les opérations Chimiques dans une disposition si prochaine à s'enflammer, qu'il ne faut plus, pour ainsi dire, qu'un Soufflet qui excite la flamme, & ce Soufflet, c'est l'air, au mouvement duquel on les expose. On peut s'en tenir là, sans aller jusqu'au petit Système que faisoit M. Homberg *.

Malgré le fond de conformité qui est entre la Pierre de Boulogne & le Phosphore urinaire, ce seront toujours deux Phosphores différents, en ce que l'un ne fera que jeter de la lumière dans l'obscurité, & que l'autre pourra mettre le feu à quelques matières; on en pourra faire deux especes différentes, de Phosphores lumineux, c'est-à-dire simplement lumineux, & de Phosphores brûlants, & on les mettra, si l'on veut, chacun à la tête de son espece, parce qu'ils y ont été découverts les premiers. Nous ne ferons point, du moins quant à présent, une troisième espece de Phosphores tels que ceux dont il a été parlé en 1724 *, qui ne sont point Phosphores pour avoir été simplement exposés au jour ou à l'air, mais parce qu'ils ont emporté de la calcination un feu actuel, ce qui les réduit presque à n'être que des Charbons ardents.

La 2^{de} espece de Phosphores a été la plus traitée. L'Urine, dont étoit fait celui de Kunkel, n'a pas manqué d'avertir les Chimistes qu'ils pouvoient tourner leurs vûes & leurs recherches du côté des matières animales, ils l'ont fait avec succès, & enfin M. Homberg trouva dans la plus abjecte de toutes ces matières le plus beau des Phosphores brûlants *. Feu M. Lémery le cadet étendit les découvertes de M. Homberg

Hist. 1730.

. G

* V. l'Hist.

de 1712.

p. 40. & 41.

* p. 58.

& suiv.

* V. l'Hist.

de 1710.

p. 54. & 55.

presque à toutes les matières, nonseulement animales, mais végétales *.

* V. l'Hist.
de 1715.
p. 18. & suiv.

La 1^{re} espece de Phosphores, celle des Phosphores lumineux, qui ne prennent de la lumière qu'au jour, a été la plus négligée, peut-être parce qu'on n'a pas crû tirer aisément d'une matière minérale, comme la Pierre de Boulogne; des principes assés vifs & assés actifs pour la propriété singulière dont il s'agissoit. Le Phosphore de Balduinus, fait avec de la Craye, étoit le seul que l'on connût de cette nature, car nous ne comptons point celui dont il a été parlé en 1728 *, fait à la vérité de matières minérales, & même métalliques, mais qui est brûlant, & non pas lumineux dans le sens que nous l'entendons.

* p. 36.
& suiv.

Mais voici le nombre des Phosphores de la 1^{re} espece; semblables à la Pierre de Boulogne, prodigieusement augmenté. M. du Fay, travaillant dans d'autres vûes sur les Pierres fines, s'aperçût que la Topaze commune, qui s'emploie en Médecine, ayant été calcinée, devenoit, quant aux effets, une vraie Pierre de Boulogne. Il suivit la route où cet heureux hazard l'avoit mis, il trouva que la Bélemnite ou Pierre de Lynx réussissoit encore mieux que la Topaze, & enfin de toutes ces sortes de Pierres, des Pierres à plâtre, ou Gypses, des Albâtres, des Pierres de taille & de Liais, de la Marne, des Bols, des Pierres à chaux, & des Marbres mêmes, il tira des Phosphores qui ayant été exposés au jour pendant une Minute, luisoient dans l'obscurité.

Ce n'a pas été la calcination seule qui a donné tous ces Phosphores, il a fallu dissoudre par des Acides celles d'entre ces différentes matières qui étoient les plus dures, & les plus compactes, & quand certaines matières l'ont été à certain point, comme les Cailloux, le Sable de Rivière, les Jaspes, les Agathes, le Cristal de Roche, &c. il n'est point venu de Phosphores. Cependant M. du Fay n'en desespere pas encore tout-à-fait, ni même des Métaux; d'autres opérations pourront réussir. L'Histoire des Découvertes fournit quantité d'exemples qui encouragent.

On voit assés que ces Phosphores faits de différentes matières, & quelquefois par des procédés différents, doivent avoir entre eux un nombre proportionné de différences, & par conséquent très-grand. Leur lumière est plus ou moins vive, elle dure plus ou moins à chaque fois qu'on les met dans l'obscurité, & comme cette propriété de luire s'use par l'exercice, parce qu'il se consume toujours une certaine portion de leurs Soufres, ils la perdent à la fin en un temps total plus ou moins long, supposé que la propriété ait été également exercée. Quand ils l'ont perdue, on la leur rend en recommençant sur eux l'opération qui la leur avoit donnée, car, & on le voit aisément, ce ne sont que les Soufres de la surface qui s'enflamment, & se consomment, & une nouvelle opération fait une autre surface. Mais cela ne va pas à l'infini, & le nombre de fois qu'on peut renouveler différents Phosphores, doit être différent.

Ils ont bien des choses communes, bien entendu que c'est toujours avec des variétés. Ils prennent de la lumière au travers du Verre & de l'eau; ils n'en prennent presque point de la Lune, & encore moins des Chandelles. Ils perdent leur vertu, exposés trop long-temps de suite au jour. La plupart la conservent assés de temps, quoique noyés dans l'eau.

Quelques-uns plongés subitement dans l'eau, après avoir été allumés au jour, brillent d'un plus grand éclat, à mesure qu'ils se dissolvent, & s'échauffent par la dissolution, mais cet éclat s'évanoüit presque entièrement un moment après. La pâte liquide, qui est restée dans le Vaisseau & dans l'eau, ne laisse pourtant pas de redevenir encore un peu lumineuse par le jour, mais cette vertu lui dure à peine 24 heures.

Outre l'eau commune, M. du Fay a essayé l'Esprit de vin, l'Huile, les dissolutions Acides ou Alkalines, pour voir lesquelles de ces liqueurs ôteroient aux Phosphores la propriété de luire, ou la diminueroient, & de quelle manière; mais nous ne nous engagerons point dans ce détail, que M. du Fay lui-même n'a presque fait qu'indiquer. Nous remarquerons seulement un phénomène singulier du Phosphore de

la Bélemnite. Plongé dans l'Eau forte, il y fait un bruit semblable à celui d'un Fer rouge plongé dans l'eau, tant les Soufres de ce Phosphore, quoi-qu'assés subtils pour avoir été allumés par la lumière seule du jour, sont cependant forts & vigoureux, ou empruntent de force des Acides de l'Eau forte.

Il s'ouvre ici une vaste carrière où les Physiciens pourront s'exercer. Presque tout est devenu Phosphore, & si tout absolument ne le devient pas dans la suite, on sera dans une surprise contraire à celle où l'on fut d'abord par la Pierre de Boulogne. On pourroit être étonné que la Pierre d'Aiman demeure toujours aussi unique qu'elle l'est, car un très-petit nombre de Corps Electriques, & qui d'ailleurs lui ressemblent très-peu par les effets, ne méritent pas d'être comptés.

OBSERVATION CHIMIQUE.

M. LE FÉVRE, Médecin d'Uzès, dont nous avons déjà parlé en d'autres occasions, a donné à l'Académie une nouvelle observation, qui est une suite de son Phosphore rapporté en 1728 *. Il s'aperçût que le Soufre commun, quoique très-fixe, se dissipe facilement, qu'il s'unit fort vite avec le Fer, & qu'en les mêlant ensemble, le tout se change en un Colcothar, tout semblable à celui qu'on tire du Vitriol par une longue calcination. Il faut prendre de la Limaille de Fer & du Soufre dans les mêmes proportions que pour le Phosphore, & quand la dissolution du Fer sera exactement faite par l'Acide du Soufre, la matière étant en pâte molle, on la tirera du Vaisseau, & on l'exposera à l'Air, où elle s'échauffera dans peu de temps, & rendra une odeur de Soufre brûlant; & au lieu que celle du Phosphore demeure toujours noire, celle-ci deviendra rouge en quelques heures, & en poudre fine, stiptique au goût. C'est-là le Colcothar, que l'on a par une opération très-simple & très-facile, & ce n'est pas une simple curiosité, puisque le Colcothar est employé dans la Médecine & dans les Arts,

* p. 36.
& suiv.

Si l'on met ce Colcothar dans de l'eau chaude, on trouvera après l'avoir remuée, filtrée & évaporée, qu'il reste au fond du Vaisseau un vrai Vitriol de Mars, provenu de l'Acide du Soufre, qui s'est attaché au Fer, l'a corrodé, & s'est uni avec lui pour composer un corps salin très-différent du Soufre commun, & du Fer. Voilà donc un changement assés nouveau du Soufre en Sel, merveille qui est cependant diminuée parce que le changement ne tombe que sur la partie saline du Soufre transportée ailleurs, & qu'on ne tient pas compte de la partie inflammable. M. le Fèvre laisse, dit-il, aux plus habiles le soin de chercher ce qu'elle est devenue.

Il conçût en réfléchissant sur ces expériences que l'Eau de Chaux, qui dissout le Soufre commun, pourroit bien aussi le changer en Sel, parce que les Acides du Soufre, au lieu d'agir sur le Fer, agiroient sur les parties terrestres Alkalines que cette Eau contient, & cela se trouva en effet par les mêmes opérations, ou à très-peu près, qu'on vient de rapporter. Apparemment on réduiroit de même en Sel les Bitumes, les Résines, & toutes sortes d'Huiles & de Graisses.

Comme le Sel qui se tire du mélange de l'Eau de Chaux & du Soufre, est un Alkali fort semblable par toutes ses qualités à celui que donnent des Eaux minérales de Languedoc, telles que celles d'Iezet, de S.^t Jean, d'Alais, M. le Fèvre conjecture que le secret de l'opération par laquelle la Nature rend minéral toutes ces Eaux, est découvert. Il se fera trouvé auprès d'une Source une terre ou chaux mêlée de Soufre commun, & l'eau ayant mis l'Acide du Soufre en état d'agir sur l'Alkali de la chaux, ou terre, il se fera formé les Sels dont il s'agit, qu'elle aura ensuite entraînés avec elle.

Quoique les Sels de toutes ces Eaux paroissent fort semblables, les terres sont très-différentes, & leur différence influë principalement sur la quantité du Sel. Cela ne doit s'entendre que des Eaux qu'on a nommées.

Il ne faut pas oublier une singularité remarquable de celles d'Iezet. Dès qu'elles ont été quelques moments sur le feu,

il se forme à leur surface de petites Aiguilles blanches, transparentes, égales en longueur & en grosseur, d'une régularité parfaite, & qui, selon l'Auteur, ressembloit au Sel Sédatif de M. Homberg.

M. le Fèvre, ne fût-ce que pour s'assurer de la découverte qu'il avoit faite du mystère de la composition de ces Eaux, n'a pas dû manquer d'essayer d'en faire par art. Il y a réussi assés facilement, & avec différentes terres. Ses Eaux artificielles ont la grande vertu des naturelles, qui est d'être fort rafraîchissantes, sans compter qu'elles sont purgatives & diuretiques.

V. les M.

P. 33.

V. les M.

P. 357.

Nous renvoyons entièrement aux Mémoires
L'Ecrit de M. Bourdelin sur le Sel léxiviel du Gayac.

Une Manière plus simple de M. Boulduc, pour faire le
Sublimé corrosif.



BOTANIQUE.

SUR LES GREFFES.

Nous avons dit en 1728 * que M. du Hamel dans le dessein de découvrir si l'Art de greffer pouvoit faire naître de nouvelles espèces de Fruits, s'étoit engagé dans une suite d'expériences sur cette matière. Celles dont nous allons donner le précis ne regardent point encore la multiplication des espèces, elles n'ont pour objet que l'Art de greffer en lui-même. Il a été fort exagéré par les Auteurs qui en ont écrit, & l'expérience, qu'ils n'avoient pas assés consultée, rabat beaucoup de leurs discours.

V. les M.

p. 102.

* p. 46.
& suiv.

Il est étonnant, quoique certain, & nous l'avons déjà dit, que la Greffe fasse quelque bon effet, qu'elle rende les fruits meilleurs. Nous nous en tenons à la cause rapportée en 1728, qui cependant est assés peu particularisée, mais qui, du moins jusqu'à présent, ne peut guère l'être davantage. Cela posé, on juge aisément qu'il faut un certain rapport entre le Sujet ou Arbre sur lequel on ente, & la Branche entée ou Greffe, que les diamètres, les orifices, les figures des tuyaux se conviennent de part & d'autre, & sur tout apparemment les Séves, c'est-à-dire, qu'il faut que la Séve qui montera du Sujet s'accorde avec celle que la Greffe apportoit d'abord avec elle, & soit propre ensuite à être son unique aliment. Or les Séves sont infiniment différentes entre elles, douces, acres, coulantes, visqueuses, aromatiques, fœtides, &c. Et l'on peut croire que de là vient en grande partie l'amélioration des fruits. Ni le Sujet, ni la Greffe n'avoient une Séve entièrement propre à produire un fruit d'une certaine qualité, il étoit nécessaire que la Séve du Sujet fût travaillée dans

d'autres organes que les siens , & on lui présente ceux de la Greffe , qui lui sont convenables , & n'auroient travaillé que sur une autre Sève moins bien conditionnée.

Ces rapports ne peuvent être que très-déliçats , le raisonnement ne peut jamais deviner entre quels Arbres il se trouveront , & l'expérience seule peut enseigner où ils se trouvent. Quoique déliçats ils ne sont pas uniques , un même Sujet peut presque toujours porter également à peu près différentes Greffes , & une même Greffe être appliquée à différents Sujets.

Voici les principales observations de M. du Hamel sur cette matière.

1.^o La Greffe qu'il a reconnuë pour réussir le mieux , est celle d'un Poirier sur un autre , ou d'un Cerisier sur un Merisier , & celle qui réussit le plus mal est du Prunier sur l'Orme ; le Prunier périt aussi-tôt. On voit bien qu'entre ces deux cas extrêmes la variété de tous les autres est infinie. Des Greffes qui réussiront les unes reprennent plus ou moins facilement que les autres , poussent du bois & des feuilles plus ou moins vite , &c. C'est la même chose renversée pour celles qui ne réussiront pas.

2.^o Outre le rapport inconnu qui doit être entre les Vaisseaux & les Sèves du Sujet & de la Greffe , il faut qu'il y en ait un , que l'on peut connoître à peu près , entre les temps où le Sujet & la Greffe ont les principaux symptômes de leur végétation , où ils poussent , où ils sont en Sève. Des Amandiers , greffés par M. du Hamel sur des Pruniers de petit Damas noir , donnerent pendant une année entière les plus belles espérances du monde , & après cela tombèrent tous en langueur , & la plupart périrent assés promptement. Il n'en faut point chercher la cause dans la disproportion des Vaisseaux , ni des Sèves , puisque la première année où cette disproportion auroit dû avoir son plus grand effet , fut si belle & si heureuse. D'ailleurs ce qui prouve beaucoup de conformité à cet égard entre le Prunier & l'Amandier , c'est qu'on greffe le Pelcher sur l'un & sur l'autre avec le même succès.

succès. Mais à l'égard des temps ou des Époques remarquables de la végétation, il y a une grande différence entre le Prunier & l'Amandier, l'Amandier est toujours de beaucoup plus avancé. De-là il arrive dans les Greffes dont il s'agit, que l'Amandier peut demander de la nourriture au Prunier dans des temps où celui-ci n'est pas en état de lui en fournir, ou de lui en fournir assés. La Greffe ayant été faite en Autonne, par ex. ils sont tous deux en repos pendant l'Hiver, l'un n'inquiète point l'autre, mais dès que l'Amandier a senti la première douceur du Printemps que le Prunier ne sent pas encore, toute la Sève qu'il avoit apportée avec lui se met en mouvement, & il suce de plus celle du Prunier, qui peut suffire à cette dépense, parce que la branche de l'Amandier est encore très-jeune, & se nourrit à peu de frais. Mais dès qu'elle est devenuë plus grosse au bout de l'année, elle demande trop de nourriture au Prunier, & la lui demande toujours à contre-temps, lorsqu'il n'est pas encore en Sève. Le Sujet trop sucé & affamé par la Greffe, la Greffe mal nourrie, ou qui ne l'a pas été à propos, périclent tous deux, au moins d'une mort lente.

Si au contraire le Prunier a été greffé sur l'Amandier, la même mesintelligence à l'égard des temps se retrouve, mais avec un effet opposé. L'Amandier dès le premier commencement du Printemps fournit une nourriture que le Prunier n'est pas encore disposé à recevoir, parce que ses Vaisseaux ne sont pas assés ouverts par une foible chaleur, que le ressort de ses fibres n'est pas assés animé, &c. Le Prunier meurt de réplétion & d'engorgement, au lieu que dans le cas précédent il mouroit d'inanition.

3.^o Dans ces deux expériences opposées, il se forme à l'endroit de l'insertion de la Greffe sur le Sujet une espece de bourlet, ou bien il s'y amasse une Gomme. Quelque mouvement que la Sève ait dans les Plantes, soit celui de circulation, soit tout autre, il faut toujours qu'elle se distribue librement du Sujet à la Greffe, & en général qu'elle ne demeure pas dans les Vaisseaux sans mouvement. Dans la

2^{de} expérience il est bien aisé de comprendre que l'Amandier fournissant au Prunier une Sève qu'il ne peut recevoir, elle s'arrête & fait une obstruction à l'endroit où elle devoit entrer dans le Prunier, c'est-à-dire, à l'endroit de l'insertion. Mais dans la 1^{re} expérience où le Prunier ne fournit pas assés à l'Amandier, & où l'Amandier tire trop, il ne paroît pas que ce soit la même chose, cependant cela revient au même. Dans le temps que l'Amandier tire trop, le Prunier se dessèche & s'amaigrit, ses Vaisseaux perdent de leur capacité, & lorsqu'ensuite il est en Sève, il en a plus que ses Vaisseaux n'en peuvent contenir à l'aise, elle ne s'y meut pas avec facilité, & il s'en fait des amas vers l'insertion, parce que c'est-là que finissent les vaisseaux du Sujet.

4.^o Ces bourlets, ces gommés, &c. sont tout au moins des maladies avec lesquelles les Arbres peuvent vivre, mais ce sont souvent des causes de mort, la Sève arrêtée se corrompt ordinairement, comme nôtre sang, & dans les deux exemples rapportés une assés prompte mort est presque infaillible.

5.^o Que la Greffe meure de la mort du Sujet, il n'y a rien là de remarquable. D'où pourroit-elle tirer sa subsistance ? Mais si la Greffe ne peut pas survivre au Sujet, le Sujet peut survivre à la Greffe, ou se porter bien, tandis qu'elle est malade. Ses Sucs qui n'entrent plus ou n'entrent qu'avec peine dans des Vaisseaux étrangers se meuvent librement dans les siens propres, & font de nouveaux développemens de parties, qui sont de nouveaux jets.

6.^o La Greffe peut être utile au Sujet, & le faire vivre plus long-temps, ce qui est une espèce de paradoxe. Cela vient de ce qu'elle lui ôte des qualités vicieuses, ou en empêche l'effet. Le Pescher de noyau est fort délicat, & en même temps abondant en productions inutiles qui l'épuisent, il pousse beaucoup de bois qu'il faut retrancher, il est presque toujours plein de bois mort, le tronc lui-même meurt aisément, & enfin l'Arbre dure peu d'années. M. du Hamel ayant fait enter sur des Peschers de cette espèce des Pruniers

de la Reine Claude, il y a déjà 18 ans que ces Arbres greffés durent, quoique languissans, & ils n'eussent certainement pas jôûi d'une si longue vie, si les Pêchers, qui abandonnés à eux-mêmes auroient eû une végétation excessive & indiscrete, n'en eussent trouvé le remède dans celle des Pruniers, qui la modéroit en ne tirant que les suc's qui se pouvoient dépenser utilement.

7.^o Quelques Arbres vivent plus long-temps greffés sur des Sujets foibles, & qui durent peu, que sur des Sujets plus robustes, & plus vivaces. Le Prunier dure plus que le Pêcher de noyau, cependant le Pêcher nain dure plus long-temps sur le Pêcher de noyau que sur le Prunier. C'est-là un effet bien sensible d'une convenance que l'on eût pû conjecturer sur les noms seuls de ces Plantes, mais il se trouve & il se trouvera encore à l'avenir une infinité de ces rapports, qui feront tout à fait imprévûs.

8.^o En général quelque rapport qu'il puisse y avoir entre le Sujet & la Greffe, M. du Hamel conclut de ses expériences que les Arbres greffés durent moins que s'ils ne l'avoient pas été. La Greffe raffine les suc's, & rend les fruits meilleurs, mais d'un autre côté elle fait toujours violence à la nature, en altérant la constitution organique de l'Arbre. Il n'est pas hors d'apparence que, toutes choses d'ailleurs égales, les peuples sauvages ne vivent plus, que ceux qui sont civilisés & polis.

SUR L'ANATOMIE DE LA POIRE.

L Es Plantes étant bien sûrement des corps organisés, les fruits qui en sont les parties les plus nobles, & celles pour lesquelles toutes les autres sont faites, ne peuvent manquer non seulement d'être organisés aussi, mais de l'être plus finement, & avec plus d'art. La difficulté n'est que de découvrir cette organisation. L'Anatomie des Animaux, dès qu'ils sont un peu grands, est en quelque sorte grossière &

V. les M.

P. 299.

facile, une charpente d'Os bien liés ensemble, de gros Vaisseaux sanguins, &c. se présentent d'eux-mêmes aux yeux, mais il n'en va pas ainsi d'une Pêche, d'un Abricot, d'une Pomme ; à l'exception des Noyaux, ou des Pépins, on n'y voit qu'une chair, un parenchime uniforme, qui n'a point de parties distinctes les unes des autres, & où la dissection ne paroît avoir aucune prise. Cependant quelques grands Observateurs ont entrepris de faire celle de la Poire, qu'ils ont peut-être préférée, parce que ce fruit, lorsqu'il est pierreux, a plus de diversité dans sa substance que beaucoup d'autres, & M. du Hamel a voulu marcher sur leurs pas.

Après qu'il a eu essayé différents moyens pour parvenir à disséquer des Poires, différentes liqueurs, qui par la macération rendissent leurs petits organes plus visibles, enfin il a trouvé que la liqueur la plus favorable étoit l'Eau commune. Mais pour donner une idée du travail, ou de la patience que demande l'opération, il nous suffira de dire que quelquefois il a fallu laisser macérer une Poire pendant deux ans, & que souvent quand on a commencé à en détacher bien adroitement avec un instrument très-fin un filet, qui est quelque Vaisseau, il faut pour achever de le détacher, remettre la Poire en macération encore quinze jours. La dissection a toujours été faite sur des fruits qui nageoient dans l'eau, afin de profiter autant qu'il étoit possible de leur augmentation de volume, quoique petite, & de la disposition que les différentes parties pouvoient prendre à se séparer. On juge bien que les meilleurs Microscopes ont été mis en usage.

Il ne s'agit encore présentement que de la peau de la Poire, par où M. du Hamel a commencé, le reste viendra dans les années suivantes. Nous avons fait en 1702 * une description abrégée de la peau du Corps humain composée de trois Membranes, qui s'enveloppent les unes les autres ; celle de la Poire l'est de quatre que M. du Hamel a eu l'art de distinguer. Il appelle la 1^{re} enveloppe *E'piderme*, la 2^{de} *Tissu muqueux*, à cause d'une certaine viscosité, la 3^{me} *Tissu pierreux*, & la 4^{me} *Tissu fibreux*.

* p. 30.
& suiv.
2^{de} E'dit.

L'Épiderme de la Poire a assés d'analogie avec celui de l'Homme. C'est une membrane d'une consistance plus ferme que celle du fruit, & par là destinée à le défendre des injures du dehors, elle réduit la transpiration du fruit à être de la quantité nécessaire, & parce que son tissu serré en empêche l'excès, & parce que le grand nombre de pores, dont elle est percée, ouvrent assés de passages. Cet Épiderme tombe par petites écailles comme celui de l'Homme, & se régénere de même sans laisser de cicatrice. On ne sçait pas encore si notre Épiderme est produit par l'épaississement de quelque suc arrivé à la superficie extérieure du corps, ou par l'expansion des derniers filets très-déliés de quelques Vaisseaux, à plus forte raison cette détermination ne sera-t-elle pas aisée à faire pour la Poire. M. du Hamel inclineroit à penser que son Épiderme est la dernière superficie du Tissu muqueux condensée par l'air.

Ce Tissu, immédiatement posé sous l'Épiderme, & très-difficile à en détacher, est apparemment formé par un entrelacement de Vaisseaux très-déliés, & pleins d'une liqueur un peu visqueuse. Il est vert naturellement, mais quand la Poire a pris du rouge par le Soleil, quelquefois cette couleur ne passe pas l'Épiderme, quelquefois elle pénètre jusqu'au Tissu muqueux, & le pénètre même tout entier. Il est sujet à des accidents & à des maladies, les coups de Grêle le meurtrissent & le desséchent, la trop grande humidité le corrompt, quelques Chenilles s'en nourrissent après avoir détruit l'Épiderme, une très-petite Mitte, qui n'a point entamé l'Épiderme, va le manger. Quand il est détruit dans toute son épaisseur, il ne se régénere point, il se forme à sa place une espece de Galle gommeuse.

La troisième enveloppe ou partie de la peau totale de la Poire est le Tissu pierreux. On sçait assés ce que c'est que ce qu'on appelle *pierres* dans la Poire, ces grumeaux plus durs que le reste de sa substance, tantôt plus, tantôt moins gros, & quelquefois amoncelés en petits Rochers. On nomme les Poires *cassantes*, ou *fondantes*, selon qu'elles en ont ou n'en

ont pas, ou en ont moins. Ces pierres n'appartiennent pas seulement à cette enveloppe qui est le Tissu pierreux, elles se trouvent répandues dans tout le reste du fruit, mais elles sont arrangées dans ce Tissu plus régulièrement les unes à côté des autres, & enfin elles le sont de manière à former une enveloppe, ce qui suffit ici. Comme elles sont de la même nature que les autres, il sera à propos de les considérer toutes ensemble.

Elles commencent dès la queue de la Poire, & s'étendent sur toute sa longueur, posées entre les Téguments de cette queue, & un faisceau de Vaisseaux qui en occupent l'axe. Quand elles sont entrées dans le fruit, il y en a une partie qui s'épanouit, & va former le Tissu pierreux en tapissant toute la surface intérieure du Tissu muqueux, l'autre partie se tient serrée le long de la queue prolongée, ou de l'axe de la Poire, & y forme comme un canal pierreux d'une certaine largeur. Ce canal arrivé à la région des Pépins se partage à droite & à gauche, prend plus de largeur de part & d'autre, & ensuite va se réunir au dessus des Pépins, & reprend la forme de canal pour aller aboutir à l'Ombilic, ou à la Tête de la Poire. Il y trouve le Tissu pierreux auquel il s'unit, & tous deux ensemble forment un Rocher très-sensible.

Cela n'empêche pas qu'il n'y ait des pierres jetées çà & là moins régulièrement dans le reste du corps de la Poire. Elles sont liées par une substance plus molle, & plus douce. Il y en a, mais de beaucoup plus petites, jusque dans les Poires qu'on appelle *fondantes*.

La difficulté est de sçavoir quelles parties organiques sont ces Pierres, & quel est leur usage. M. du Hamel croit le pouvoir conjecturer sur les observations suivantes, faites avec grand soin dans l'espérance de quelque éclaircissement. Les pierres ne sont pas sensibles dans les fruits nouvellement noués, ce ne sont que de petits grains blancs sans solidité, mais ils durcissent ensuite & grossissent à tel point que les fruits encore fort petits ne sont presque que des pierres, moins dures cependant qu'au temps de la maturité, mais en

plus grand nombre par rapport au volume du fruit , car à mesure que le fruit croît depuis un certain point , les pierres ou croissent moins , ou ne croissent plus , & même il en disparoit. Quand elles sont dans leur parfaite grosseur , on peut voir quantité de filets , ou qui y entrent , ou qui en sortent. Leur substance n'est point formée par lames ou par couches , mais par grains.

Sur tout cela M. du Hamel conjecture que les Pierres sont des Glandes végétales analogues aux Animales , & qui sont des sécrétions de suc. On fera aisément l'application de cette idée à ce qui vient d'être dit , seulement sera-t-il peut-être à propos d'expliquer comment les Pierres cessent de grossir tandis que le fruit grossit encore. C'est que des suc tartareux , & pierreux s'amassent facilement dans des conduits très-étroits , & n'y peuvent plus couler. La Glande ou Pierre ne croîtra donc plus , & même elle diminuera soit par une transpiration qui ne fera point réparée , soit par un reflux de suc dans le reste du fruit ; il continuera de croître en l'un & en l'autre cas.

M. du Hamel observe que le temps où le fruit nouë , & un peu après , étant précisément le temps où l'Arbre travaille le plus à la production des Pépins , partie si importante , les Glandes végétales sont alors & en plus grand nombre & plus molles , pour fournir mieux les suc nécessaires. Quand elles se sont obstruées , & qu'elles ont acquis leur dernière dureté , qui ne leur permet plus la fonction de filtrer , elles ne deviennent pas pour cela inutiles , elle prennent la fonction d'Os , & servent d'appui aux autres parties du fruit , qui ont moins de consistance.

Une chose qui convient encore fort heureusement à l'idée de Glandes appliquée aux Pierres , c'est cette Roche qu'on voit à l'Ombilic de la Poire , cet amas de pierres plus grand qu'en aucun autre endroit. C'étoit-là justement au temps de la fleur que les Etamines , & les Pétales prenoient naissance , c'étoit-là que se faisoient les plus importantes filtrations de suc , & que des Glandes étoient le plus nécessaires.

Il reste la quatrième enveloppe qui fait partie de la Peau de la Poire, & qui est posée sous le Tissu pierreux. M. du Hamel l'appelle *Tissu fibreux*, parce que, comme la peau proprement dite des Animaux, il est formé d'un entrelacement perpétuel de Vaisseaux anastomosés les uns avec les autres. Ce n'a pas été sans beaucoup d'art que ce dernier Téguement de la Poire a pû être démêlé d'avec les trois supérieurs ou plus extérieurs, mais il faudroit encore plus de sagacité d'esprit, & presque de la divination pour démêler précisément les usages particuliers de chacun des quatre. M. du Hamel ne s'est pas engagé dans un détail qui ne seroit pas assés fondé sur l'expérience, il est plus sage d'éviter les raisonnements où l'on n'est pas conduit par les faits.

OBSERVATIONS BOTANIKUES.

I.

M Benoît Stéhélin, de Bâle, Correspondant de l'Académie, a écrit à M. Danty d'Isnard qu'il avoit découvert dans la *Filicula Saxatilis, corniculata. Inst. R. H. 542*; que l'Anneau qui entoure l'Ovaire des Plantes Capillaires en doit être la partie spermatique, c'est-à-dire, celle où est renfermée cette poussière, qui féconde l'Ovaire. Car dans cette espèce l'Anneau est entouré de Zones transversales élastiques, qui en se rompant laissent échapper la matière qu'il contient, & cette matière a la couleur jaune des Spermés ou poussières des autres Plantes. Quand elle est sortie, on voit les Anneaux vuides, transparents, non colorés, plissés d'une infinité de plis presque imperceptibles; quelques-uns de ces Anneaux ont conservé leur première figure, & d'autres ont crevé. On ne peut observer la matière spermatique que dans le temps où les sillons des feuilles de la Plante, qui contiennent l'Anneau & l'Ovaire, sont encore fermés.

II.

Le même M. Stéhélin a vû un nouveau phénomène dans
l'*Equisetum*,

l'Equisetum, la Presse. Sa poussière, entourée de lames élastiques, est d'un vert foncé, & elle est d'un gris-pâle de cendre, quand ces lames se sont débandées. Qu'on la mette sur quelque chose d'humecté, elle redevient en un moment de son premier vert. Ainsi il paroît que c'est l'humidité des lames qui lui donne la verdure, & quand ces lames se dessèchent, elle doit la perdre, ou même en avoir plus ou moins, selon que les lames humides la ferreront & s'y appliqueront plus ou moins par un mouvement de contraction & de débandement.

III.

M. Sarrazin, Médecin de Quebec, Correspondant de l'Académie, a trouvé dans l'Amérique Septentrionale quatre espèces d'Érable, qu'il a envoyées au Jardin Royal, après leur avoir imposé des noms. La 4^{me} qu'il appelle *Acer Canadense Sacchariferum, fructu minori*, D. Sarrazin, est un Arbre qui s'élève de 60 ou 80 pieds, dont la Sève, qui monte depuis les premiers jours d'Avril jusqu'à la moitié de Mai, est assés souvent sucrée, ainsi que l'ont aisément reconnu les Sauvages & les François. On fait à l'Arbre une ouverture; d'où elle sort dans un Vase qui la reçoit, & en la laissant évaporer, on a environ la 20^{me} partie de son poids, qui est de véritable Sucre, propre à être employé en Confitures, en Sirops, &c. Un de ces Arbres qui aura 3 ou 4 pieds de circonférence, donnera dans un Printemps, sans rien perdre de sa vigueur, 60 ou 80 livres de Sève. Si on en vouloit tirer davantage, comme on le pourroit, il est bien clair qu'on affoiblirait l'Arbre, & qu'on avanceroit sa vieillesse.

Cette Sève pour être sucrée demande des circonstances singulières, qu'on ne devineroit pas, & que M. Sarrazin a remarquées par ses expériences. 1.^o Il faut que dans le temps qu'on la tire, le pied de l'Arbre soit couvert de Neige, & il y en faudroit apporter, s'il n'y en avoit pas. 2.^o Il faut qu'ensuite cette Neige soit fondue par le Soleil, & non par un air doux. 3.^o Il faut qu'il ait gelé la nuit précédente. Cette espece de manipulation, dont la Nature se sert pour faire le

Sucre d'Erable, ressemble affés à quelques opérations délicates de Chimie, où l'on fait des choses qui paroissent opposées, & où celles qui paroissent les plus semblables, ne sont pas équivalentes pour l'effet.

Encore une remarque curieuse de M. Sarrazin, c'est que la Sève de tel Erable qui ne sera point bonne à faire du Sucre, le deviendra une demi-heure, ou tout au plus une heure après que de la Neige, dont on aura couvert le pied de l'Arbre, aura commencé à fondre. Cette Neige s'est donc portée dans les tuyaux de l'Erable, & y a opéré avec une grande vitesse.

M. Sarrazin dit aussi que l'*Apocynum majus, Syriacum, rectum, Com. 90.* fournit un Suc dont on fait du Sucre en Canada. On ramasse la Rosée qui se trouve dans le fond des fleurs.

M. Marchant a lu la Description de la *Gentiana Alpina, magno flore. I. B. Tom. 3, p. 523, Gentiane.*

Et du *Doronicum radice Scorpii. C. B. p. 184. Doronic.*

M. Garfin, dont nous avons déjà parlé ci-dessus, a rapporté de son voyage des Indes Orientales, & a donné à l'Académie la description de deux Plantes de ce Pays-là, peu connues, & mal décrites par les Auteurs qui en ont parlé.

La première est le Mangoustan, Arbre pomifere des Isles Moluques, mais qu'on a transporté dans celle de Java, & dont on cultive aussi quelques pieds à Malaca, à Siam, & aux Manilles. Il a la touffe si belle, si régulière, si égale, qu'on le regarde aujourd'hui à Batavia comme le plus propre à orner un Jardin ; il y a bien de l'apparence que s'il peut vivre en nos Climats, il ne tardera pas beaucoup à y paroître, & en ce cas il déthrôneroit les Maronniers d'Inde. Ce qui aideroit beaucoup à son grand succès, c'est que son fruit est excellent, rafraichissant, & très-sain. Son écorce,

qui a les mêmes vertus que celle de la Grenade, est un remède pour les Dissenteries, que l'on débite à Batavia, en cachant ce que c'est. Pour le bois, il n'est bon qu'à brûler.

La seconde Plante, nommée par les Malabares, *Tadda Vaddi*, est un Héliotrope, & une Sensitive ou *Mimose*, comme disent les Botanistes, c'est-à-dire, *imitatrice* des mouvements animaux. Toutes ses feuilles disposées ordinairement sur un même plan, qui forme une *Ombelle*, ou Parasol, se tournent du côté du Soleil levant ou couchant, & se penchent vers lui, & à midi tout le plan est parallèle à l'horison. Cette Plante est aussi sensible au toucher que les Sensitives ou Mimoses qui le sont le plus, mais au lieu que toutes les autres ferment leurs feuilles en dessus, c'est-à-dire, en élevant les deux moitiés de chaque feuille pour les appliquer l'une contre l'autre, celle-ci les ferme en dessous; si lorsqu'elles sont dans leur position ordinaire, on les relève un peu avec les doigts pour les regarder de ce côté-là, elles se ferment aussi-tôt malgré qu'on en ait, & cachent ce qu'on vouloit voir. Elles en font autant au coucher du Soleil, & il semble qu'elles se préparent à dormir. Aussi cette Plante est-elle appelée tantôt *Chasse*, tantôt *Dormeuse*, mais outre ces noms, qui lui conviennent assez, on lui a donné quantité de vertus imaginaires, & il n'étoit guère possible que des Peuples ignorants s'en dispensassent.

Cette Plante aime les lieux chauds & humides, sur-tout les bois peu touffus, où se trouve une alternative assez égale de Soleil & d'ombre. M. Garfin en a reconnu deux especes.

Il a traité tout ce Sujet selon la méthode la plus exacte des Botanistes, au lieu que nous n'en avons pris que ce qu'il y a de plus intéressant pour la curiosité ordinaire.

G E O M E T R I E.

SUR UNE THEORIE GENERALE
DES LIGNES DU QUATRIEME ORDRE.

V. les M.
p. 158. &
363.
* p. 37.
& 44.

Nous avons déjà entamé cette matière en 1729 *, quoique légèrement, tant à l'occasion d'un Ecrit de M. Nicole sur les Lignes du 3^{me} ordre, que d'un autre de M. de Maupertuis sur une affection singulière de quelques-unes du 4^{me}. Mais une Théorie générale de ces dernières Lignes, entreprise par M. l'Abbé de Bragelongne, nous ouvre un champ, sans comparaison plus vaste, & nous pourrions dire, en changeant un seul mot dans un beau vers de Virgile;

Magnus ab integro Curvarum nascitur ordo.

car au pied de la lettre cet ordre contient un très-grand nombre de Courbes, & M. de Maupertuis, le seul qui y ait touché, jusqu'à présent, n'a touché qu'à une de leurs propriétés.

Elles sont les unes finies, ou rentrantes en elles-mêmes, comme le Cercle & l'Ellipse, les autres infinies comme la Parabole, & l'Hiperbole, les autres *mixtes* de ces deux especes. Les finies, qui ne doivent pas être si simples que le Cercle, se noient & se renoient plusieurs fois en forme de rubans, les infinies, ou n'ont pas des Asimptotes droites, non plus que la Parabole, mais en ce cas elles en ont de courbes, ou elles peuvent être *inscrites* ou *circonscrites* à leurs Asimptotes droites, ou *ambigènes*, ainsi que nous l'avons expliqué en 1729. Les Courbes mixtes après s'être renfermées dans un espace déterminé se noient, & portent leurs branches dans l'Infini. Quelquefois ces branches infinies ne partent pas de

cet espace déterminé & circonscrit, elles le rencontrent en leur chemin, & le traversent comme une branche d'Hypocycloïde traverseroit par une espèce de hasard un Cercle ou une Ellipse. Cependant ces espaces, ou plutôt ces Contours fermés, qu'on peut appeler en général des *Ovales*, appartiennent essentiellement à la Courbe, & en sont partie. Ils en sont même encore une partie essentielle, lorsqu'ils en sont entièrement détachés, & comme isolés. On les appelle alors *Ovales conjugués*, parce qu'elles se rapportent à la Courbe, quoique sans liaison sensible; si elles y étoient attachées de quelque façon que ce fût, comme lorsqu'elles seroient traversées par une branche de la Courbe, on les appelleroit *adhérentes*. Il y a plus, des points mathématiques, qui ne se trouvent dans aucun des contours de la Courbe, ne laissent pas de s'y rapporter, non pas comme des centres ou des foyers, mais comme des points qui seroient dans quelque contour de la Courbe, & cependant ils n'y sont pas, ils ont des Abscisses & des Ordonnées qui leur répondent, aussi-bien qu'à tous les autres points du cours de la Courbe, ils en sont des parties qui ne peuvent être aperçues par les yeux, mais seulement par une recherche subtile de l'esprit. Enfin si les Lignes du 3^{me} ordre peuvent avoir des Inflexions & des Rebroussements, à plus forte raison celles du 4^{me}, susceptibles par leur nature d'une plus grande complication, & qui à l'égard de ces deux affections la portent si loin, qu'elles peuvent quelquefois, ainsi qu'il a été dit, les avoir d'une manière invisible. On seroit frappé des variétés, & des bisarreries des Lignes du 4^{me} ordre, si on en voyoit les plus singulières & les plus dissemblables tracées sur le plan.

Il faut cependant que l'Algebre attrape & démêle par ses fines opérations toutes ces variétés, & ces bisarreries. Elle ne le peut qu'en développant avec industrie l'Equation, où toute la Courbe avec tout ce qui lui appartient est contenue, & pour ainsi dire, roulée à peu près comme une Plante dans son germe. Là sont renfermées toutes les droites qui ont rapport à la Courbe, & la déterminent, Abscisses, Ordonnées,

70 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE
Tangentes, Sécances, &c. Les Abcisses & les Ordonnées,
& toutes les autres qui en dépendent, sont représentées par
les Racines de l'Équation, égales ou inégales, positives, ou
négatives, ou imaginaires, & ces imaginaires mêmes sont
d'une grande utilité. Il s'agit donc de tirer d'une Équation
toutes ses Racines, de les combiner ensemble, & de voir
tout le jeu géométrique qu'elles peuvent produire.

En général une Ligne quelconque ne peut jamais être
coupée par une ligne droite, qu'en autant de points que le
plus haut Exposant de son Équation a d'unités. Ainsi une
ligne droite pouvant avoir, aussi-bien qu'une Courbe des
Abcisses & des Ordonnées, dont l'Équation ne peut avoir
pour Exposant que 1; une ligne droite ne peut être coupée
par une autre droite qu'en 1 point, les 4 Sections Coniques,
qui sont les premières Courbes, ne peuvent être coupées par
une droite qu'en 2 points, parce que leur Équation n'est
que du 2^d degré, les lignes du 3^{me} ordre en 3 points, &c.
En effet il est évident qu'une droite, qui a une fois coupé ou
rencontré une autre droite, ne peut plus à cause de la recti-
tude de son cours la rencontrer une 2^{de} fois; si l'on vouloit
qu'elle la rencontrât encore, il faudroit que cette droite cou-
pante changeât de nature, perdît sa rectitude, & alors en
se détournant de son premier cours elle pourroit revenir
trouver une 2^{de} fois la droite déjà coupée. Si l'on vouloit
qu'elle y revînt une 3^{me} fois, il faudroit altérer davantage
sa rectitude, & toujours ainsi de suite, d'où l'on voit que les
Courbes sont, selon cette idée, d'autant plus courbes qu'une
droite les peut couper en plus de points, & que leurs diffé-
rents ordres, en y comprenant même les lignes droites, ont
été légitimement établis sur ce fondement.

Toute droite n'est pas obligée à couper une Courbe en
autant de points qu'il y a d'unités dans l'Exposant de son
Équation, ou, ce qui est le même, de son ordre, il suffit
qu'il y ait quelque droite qui le fasse, & celle qui l'a une
fois fait ne peut plus rencontrer la Courbe en aucun autre
point.

L'interfection se fait par un seul point commun aux deux lignes quelconques, mais l'attouchement, qui ne peut être qu'entre une droite & une Courbe, ou entre deux Courbes, se fait par deux points communs aux deux lignes, & comme deux points déterminent la position d'une droite, de-là vient que la Tangente & la Courbe touchée ont la même position en ligne droite à l'endroit de l'attouchement, ou, ce qui revient au même, qu'une droite infiniment petite, qui est un côté de la Courbe, lui est commune avec la Tangente. Un attouchement, qu'on ne laisse pas d'appeler un point, vaut donc deux points d'interfection, & les Courbes, telles que les Sections Coniques, qui ne peuvent être coupées par une droite qu'en deux points, ne peuvent plus être ni coupées, ni absolument rencontrées par cette droite, dès qu'elle a été leur Tangente. Dans l'ordre suivant, qui est le 3^{me}, une Tangente pourroit bien être encore ensuite. Sécante de la Courbe, mais non pas Tangente une 2^{de} fois, car deux attouchemens vaudroient 4 points d'interfection, qui sont impossibles dans cet ordre.

Puisque dans une Inflexion deux côtés de la Courbe sont exactement posés bout à bout en ligne droite, la Tangente au point d'inflexion a donc ces deux côtés de la Courbe communs avec elle, & si le simple attouchement fait par un seul côté valoit deux points d'interfection, celui-ci fait par deux côtés doit valoir 3 points d'interfection, ce qui se voit encore en ce qu'à 1 côté répondent 2 Ordonnées, 3 à 2 côtés, &c. & que chaque Ordonnée ne répond naturellement qu'à un point de la Courbe. De ce que l'attouchement au point d'inflexion vaut 3 points d'interfection, il suit, & qu'on ne doit commencer à trouver des inflexions que dans le 3^{me} ordre, & que dans cet ordre une Tangente au point d'inflexion ne peut plus rencontrer la Courbe.

Si, comme nous l'avons expliqué en 1729 *, deux inflexions s'unissent & se confondent, il y aura 3 côtés mis exactement bout à bout en ligne droite, & par conséquent l'attouchement en ce point vaudra 4 points d'interfection;

* p. 44.

cette affection ne peut donc se trouver que dans le 4^{me} ordre, & les supérieurs, & la Tangente qui aura rencontré une ligne du 4^{me} en un point de cette espece, ne la rencontrera plus en aucun autre point.

On peut pousser aussi loin qu'on voudra l'idée de ces inflexions qui se confondent, de sorte qu'une inflexion sera simple, double, triple, quadruple, &c. & il est clair qu'à mesure que l'inflexion se compliquera, la Courbe sera d'un ordre plus élevé.

Il faut seulement remarquer que l'inflexion qui étoit invisible dans le cas de 1729, où elle n'étoit que double, ne sera pas invisible de même dans tous les autres cas, mais ne le sera qu'alternativement. Lorsqu'elle n'étoit que double, on imaginoit un arc concave, un convexe & un concave qui se suivoient, & l'arc convexe étant supprimé, les deux concaves s'unissoient, & par-là étoit effacée toute apparence d'inflexion. Si l'inflexion étoit triple, il faudroit imaginer un arc concave, un convexe, un concave & un convexe, & les deux du milieu étant supprimés, car il ne doit jamais rester que les deux extrêmes, un arc concave & un convexe s'uniront, ce qui est la forme naturelle de l'inflexion. Il est évident après cela que si l'inflexion est quadruple, elle redevient invisible, & toujours ainsi de suite, tant qu'elle aura une dénomination paire, au lieu qu'elle sera visible dans toutes les impaires.

Nous avons dit en 1729 que dans le cas de l'inflexion double, la plus simple des compliquées, l'arc supprimé de la Courbe devoit être conçu, non comme anéanti absolument, mais comme ayant tous les côtés infiniment petits du 1^{er} ordre réduits à n'être plus que du 2^d. Quand l'inflexion est triple, ou quadruple, &c. Il n'est nullement besoin de concevoir que les côtés des arcs supprimés soient réduits à une plus grande petitesse que celle du 2^d ordre, car une plus grande ou une moindre étendue supprimée ne fait rien à la chose, & on peut remarquer en passant que selon le Système de la Courbure établi dans la *Géométrie de l'Infini*, la courbure

courbure fera toujours infinie dans les inflexions dont nous traitons ici, & peut-être tout autre Système géométrique auroit-il eu de la peine à en rendre raison.

A mesure que les Courbes en s'élevant d'ordre deviennent plus compliquées, les droites qui s'y rapportent le deviennent aussi davantage, toutes droites qu'elles sont, c'est-à-dire, que les fonctions qu'elles ont par rapport aux Courbes se compliquent. Ainsi la fonction la plus générale & la plus simple des droites par rapport aux Lignes d'ordres quelconques étant de les rencontrer, une droite ne peut rencontrer une Ligne du 1^{er} ordre ou une autre droite qu'en un seul point, où elle sera la Sécante ; dans le 2^d ordre la droite peut être ou la Sécante d'une Section Conique en deux points différents, ou la Tangente par deux points infiniment proches, & elle ne peut être l'un & l'autre ; dans le 3^{me} ordre une droite peut être ou Sécante d'une Courbe en trois points différents, ou Tangente en deux infiniment proches, & Sécante en un autre différent, ou Tangente en trois infiniment proches, auquel cas ces trois points font une inflexion simple. En voilà assez pour faire voir comment la fonction de *rencontrer* qui appartenait à une droite par rapport aux Lignes d'ordres quelconques, se complique toujours selon que les ordres sont plus élevés, car il sera très-aisé de suivre cette idée si loin qu'on voudra.

Quand la fonction de la droite se complique, elle devient équivalente à plusieurs différentes droites selon le nombre de ses complications. Une Tangente est équivalente à deux droites sécantes, & parce que les deux points où elle rencontre la Courbe sont infiniment proches, elle ne peut être équivalente qu'à 2 lignes égales. Si elle est la Tangente d'une inflexion simple, elle sera équivalente à 3 lignes égales, à 4, si elle est Tangente d'une inflexion double, à 5, si elle l'est d'une inflexion triple, &c. Si outre qu'elle est simple Tangente, ou Tangente d'une inflexion quelconque, elle est encore Sécante en 1, en 2, &c. autres points, elle sera équivalente à autant de droites égales que le simple attouchement,

ou que l'inflexion en demandera, & de plus à autant de droites inégales qu'il y aura de points d'interfection. Dans le 4^{me} ordre, que nous traitons ici, une droite pouvant être ou Sécante en 4 points, ou simple Tangente, & ensuite Sécante en 2 points, ou simple Tangente, & ensuite encore simple Tangente, ou Tangente d'une inflexion simple, & ensuite Sécante en 1 point, ou Tangente d'une inflexion double, cette droite pourra être équivalente ou à 4 droites inégales, ou à 2 égales, & encore à 2 autres égales différentes des 1^{res}, ou à 3 égales, & à 1 inégale, ou à 4 égales.

C'est-là ce que l'Algebre sent, pour ainsi dire, avec une extrême finesse. Si on a, par exemple, l'expression algébrique d'une droite qui doit rencontrer une Ligne du 4^{me} ordre ou Courbe du 3^{me}, cette expression sera une Equation du 4^{me} degré, qui par conséquent aura quatre Racines. Ces Racines seront autant de valeurs de la droite, dont il s'agit, & cette droite sera par-là équivalente à quatre grandeurs. Il arrivera précisément selon les différents cas, que nous venons de marquer, que ces quatre grandeurs ou racines seront, ou toutes quatre inégales, ou qu'il y en aura deux égales, & deux autres différentes, égales entre elles, ou trois égales & une inégale, ou quatre égales. L'Algebre représentera exactement le caractère de chaque cas particulier.

Tout ce que nous avons dit sur les Inflexions s'applique sans peine aux Rebroussements, il n'y a qu'à concevoir des arcs directs & rebroussements, au lieu d'arcs concaves & convexes. On verra comment la suppression de certaines portions de la Courbe qui a produit des inflexions multiples, & les a rendus alternativement visibles & invisibles, fera les mêmes effets sur les rebroussements. Puisque le Rebroussement simple, ainsi qu'il a été prouvé dans la *Géométrie de l'Infini*, est formé par deux côtés infiniment petits exactement posés l'un sur l'autre, ou l'un à côté de l'autre, la Tangente en cet endroit sera équivalente à trois droites égales, ou aura trois racines égales, quatre si le rebroussement est double, parce qu'il y aura trois côtés, & toujours ainsi de

suite. La Tangente pourra encore être ou Tangente, ou Sécante en un autre endroit selon l'ordre de la Courbe, & l'égalité ou l'inégalité de ses valeurs ou racines. Il faut concevoir aussi que la suppression de quelque portion de la Courbe, qui a causé le rebroussement multiple, n'a été que la réduction de ses côtés au 2^d ordre d'infiniment petit.

Nous n'avons employé jusqu'ici que les Tangentes pour faire entendre plus nettement de quelle manière une droite devient équivalente à plusieurs par la multiplication de la fonction, car comme cette équivalence détermine les principales affections des Courbes, & qu'elle se découvre par l'Algebre, c'est-là que toutes les recherches doivent tendre. Mais ce ne sont pas les Tangentes que les Equations Algébriques des Courbes expriment directement, ce ne sont que les Abscisses & les Ordonnées, dont le rapport perpétuel constitue la nature de la Courbe, & il faut voir comment ces droites-là peuvent être multiples. Nous ne prendrons plus ce mot de multiples que dans un sens plus étroit, & nous ne le donnerons qu'aux lignes, soit Abscisses, soit Ordonnées, qui ayant plusieurs valeurs, les auront toutes égales.

Il est certain déjà qu'une Ordonnée ou Abscisse pouvant être Tangentes de la Courbe, elles seront multiples de la même multiplicité dont une Tangente pourra l'être selon le cas. Mais il faut approfondir un peu plus cette matière.

Une Ordonnée ou Abscisse est multiple, quand sa fonction naturelle d'Ordonnée ou d'Abscisse est multipliée, ou ce qui est à peu près le même, quand elle fait seule ce que faisoient en d'autres cas plusieurs différentes lignes de la même espece.

Que l'on conçoive un demi-Cercle rapporté à une droite extérieure, qui en sera à quelque distance, & vers laquelle il tournera sa convexité, de cette droite comme Axe partiront des Ordonnées terminées à tous les points du demi-Cercle. La fonction naturelle d'une Ordonnée étant de se terminer à un point de la Courbe, toutes ces Ordonnées seront simples, hormis celles des deux extrémités du demi-

Cercle, car ces deux-là seront Tangentes, & se termineront chacune à deux points du demi-Cercle infiniment proches, tandis que toutes les autres ne se termineront qu'à un seul. Ces deux seront donc des Ordonnées doubles.

La fonction des Abscisses est de porter à leur extrémité une Ordonnée, & ici afin que deux Abscisses portent deux Ordonnées égales, il faut qu'elles soient inégales. Mais si l'on conçoit que cette inégalité ou différence des deux Abscisses diminue toujours, & devienne enfin nulle, il y aura par conséquent un point où une seule Abscisse fera la fonction de deux. Ce point est celui qui répond au milieu du demi-Cercle. L'Abscisse de ce point sera donc double, toutes les autres étant simples. Et en effet si le demi-Cercle venoit se poser sur l'axe, cette Abscisse seroit la seule Tangente.

Pour s'assurer encore plus que la duplicité de l'une de ces deux lignes, Abscisse ou Ordonnée, n'emporte point nécessairement celle de l'autre, on peut remarquer que dans le 1^{er} cas, qui est celui de l'Ordonnée double, toutes les Abscisses étoient constamment simples, tant celles des deux Ordonnées Tangentes que de toutes les autres, & qu'il n'est arrivé aucun changement à ces Abscisses, parce qu'on a considéré en quoi quelques Ordonnées différoient des autres. De même dans le 2^d cas, où l'on a trouvé une Abscisse double, l'Ordonnée qui y répondoit étoit constamment simple, & n'a reçu nul changement par la considération qu'on a faite de ce que son Abscisse avoit de particulier.

Ce qu'on a dit ici de la duplicité suffit pour donner une idée générale de la multiplicité.

Il y a encore une manière dont la fonction de l'Ordonnée peut être multipliée, c'est lorsque l'Ordonnée se termine à un point où se coupent deux ou plusieurs branches de la Courbe, car alors chaque branche ayant sa suite d'Ordonnées qui lui appartient, distincte d'une autre suite, l'Ordonnée qui se trouve au point d'intersection des branches, appartient en même temps à ces différentes Suites, & fait autant de

fois selon leur nombre la fonction d'Ordonnée, elle a autant de racines égales. S'il arrive qu'elle soit en même temps Tangente d'une branche, elle aura une racine égale de plus. Si l'attouchement se fait à une inflexion ou rebroussement simple ou multiple de la branche touchée, on verra sans peine par la simplicité ou multiplicité de l'inflexion ou du rebroussement, combien le nombre des racines égales doit augmenter.

Tout cela suppose que les racines d'une Ordonnée soient affectées du même Signe plus ou moins, car si elles sont affectées de différents Signes, elles ne sont plus la même Ordonnée, fussent-elles égales; celles qui ont plus ou les positives étant au dessus de l'Axe, celles qui ont moins ou les négatives sont au dessous.

L'Abcisse est autant de fois multiple, que sa fonction de porter une Ordonnée est multipliée. Elle est donc multiple dans le cas qui vient d'être exposé, non pas autant de fois que le seroit son Ordonnée par être Tangente simple ou multiple de quelque branche, cela est absolument étranger à l'Abcisse, mais autant de fois seulement que l'Ordonnée sera multiple par être au point d'intersection de plusieurs branches, car l'Abcisse sera autant de fois Abcisse, qu'il y aura d'Ordonnées différentes, quoiqu'égales, qui viendront se placer sur le même point de l'Axe.

Par cette même raison, l'Abcisse qui répond à un point de Rebroussement simple est deux fois Abcisse, car elle porte deux Ordonnées, dont l'une appartient à la suite des Ordonnées du cours direct, & l'autre à la suite des Ordonnées du cours rebrousant. Il est évident que cette idée ne s'appliqueroit pas aux Inflexions, quoique d'ailleurs les Inflexions & les Rebroussements aient coutume d'aller ensemble, & de suivre les mêmes loix dans les Théories qui les regardent. Les Ordonnées de l'arc concave, & celles de l'arc convexe ne sont que la même suite d'Ordonnées, & par conséquent l'Abcisse d'un point d'Inflexion n'est qu'une Abcisse simple. Celle d'un point de Rebroussement double seroit triple, &c.

On sous-entend assés que les Abscisses doubles, triples, &c. ou qui auront 2, 3, &c. valeurs égales, auront aussi bien que les Ordonnées le même signe, sans cela toutes les Abscisses, quoiqu'égales, ne seroient pas la même, puisqu'elles ne seroient pas toutes posées de même côté par rapport à l'Origine de l'Axe.

L'Abscisse auroit pû être Ordonnée, & l'Ordonnée Abscisse, aussi les Géometres appellent-ils *Coordonnées* ces deux lignes prises ensemble, & il est arbitraire de donner à l'une ou à l'autre l'une des deux dénominations. Par conséquent une Abscisse, qui comme on l'a vû, ne sera pas multiple parce qu'elle portera une Ordonnée multiple, le sera dans le cas où elle eût été multiple, si on l'eût prise pour Ordonnée, car elle n'a rien perdu de sa nature pour avoir reçu un autre nom. Ainsi lorsqu'une Abscisse est telle qu'étant prise pour Ordonnée elle eût été Tangente simple ou multiple de la Courbe, elle est Abscisse ou 2 fois ou un plus grand nombre de fois quelconque. Or on prend une Abscisse pour Ordonnée, lorsque par le point de la Courbe où se termine l'Ordonnée supposée on tire une droite parallèle à l'axe, car cette parallèle, qui a la même position que l'Abscisse, en a les propriétés, & représente parfaitement l'Abscisse.

Non seulement une droite est susceptible de l'idée de multiplicité selon les sens que nous avons expliqués, mais un point en est susceptible aussi, non pas un point qui seroit un Élément de Courbe, car ce seroit une vraie droite, quoiqu'infinitement petite, mais un point mathématique, & absolu. Une Courbe étant décrite sur un plan, autant de fois qu'elle passe par un même point mathématique de ce plan, autant de fois ce point est multiple. Le point d'intersection de 2 branches, de 3 branches, &c. est un point double, triple, &c.

Un point d'attouchement, un point d'inflexion quelconques, ne sont point des points multiples, puisque la Courbe ne passe point plusieurs fois par un même point du plan, & qu'au contraire elle s'étend toujours d'un point à un autre

contigu. Mais par la même raison un point de rebroussement simple est un point double, car on conçoit naturellement que la Courbe arrivée au dernier point de son cours direct repart de ce même point pour commencer son cours rebrousant. Il est vrai que selon l'idée que nous avons prise des Rebroussements, & de toute la formation des Courbes, ce point n'est pas mathématique, ce sont deux droites infiniment petites exactement posées l'une sur l'autre, & c'est par une étendue infiniment petite du plan que la Courbe passe deux fois. Mais pourvu, ce qu'il faut bien observer, que l'on n'ait point d'égard à la position de cette petite étendue par rapport à quelque autre droite, elle ne sera plus qu'un point mathématique.

Il y a une autre espèce de points beaucoup plus singulière. Ces Ovals conjuguées, dont nous avons parlé, deviennent quelquefois infiniment petites, l'Équation de la Courbe permet qu'on égale à Zéro, ou qu'on anéantisse les grandeurs dont elles dépendent, elles sont alors des points qui ne tiennent à aucune des parties de la Courbe, des points absolument invisibles aux yeux, si ce n'est aux yeux Géomètres; mais quelle sorte de points seront elles? Si je veux concevoir un Cercle infiniment petit, je conçois son diamètre infiniment petit du 1^{er} ordre, sa circonférence de ce même ordre, & un peu plus que triple; il n'y a point là de point multiple, ni rien qui y ressemble.

Mais je puis concevoir la chose tout autrement. L'Ovale conjuguée ou le Cercle, car cela revient au même, n'avoit que sa place déterminée sur le plan de la Courbe, mais non aucune position par rapport à un Axe, ce Cercle n'étoit ni parallèle, ni perpendiculaire, ni oblique à un Axe, mais tout cela à la fois dans ses différentes parties, & parce qu'il avoit toutes les positions, il n'en avoit aucune. Je ne dois donc le concevoir réduit à aucune grandeur infiniment petite d'aucun ordre, mais au seul point mathématique, qui étoit son centre. D'un autre côté il faut que ce Cercle se réduise à quelque trace de ce qu'il étoit, mais la moindre qu'il

se puisse, & je ne puis lui en imaginer une moindre qu'en concevant que deux de ces diametres, qui se coupoient à angles droits, si l'on veut, ont décrû jusqu'à n'avoir plus que le point central où ils se coupoient. Ces deux diametres conservent au Cercle l'idée de ce qu'il a été Cercle, & comme ils ne sont plus que le point d'intersection de deux lignes, c'est un point mathématique double. Il est évident que ce fera la même chose pour une Ovale, ou Courbe fermée quelconque.

En effet, si ce point là n'étoit pas double, il ne seroit pas triple, car pourquoi triple plutôt que quadruple? pourquoi quadruple plutôt que quintuple, &c.? Il seroit donc multiple d'une multiplicité infinie, ce qui est absurde.

Les Ovales adhérentes peuvent aussi-bien que les conjuguées devenir infiniment petites. Alors elles sont aussi des points doubles, parce qu'elles étoient Ovales, mais parce qu'elles étoient adhérentes il reste nécessairement un point de la Courbe pour l'adhérence, & par conséquent le point total est triple. M. l'Abbé de Bragelongne est le premier qui ait découvert & examiné ces sortes de points.

Ainsi des Ovales devenües infiniment petites les premières sont des points qui sont sur le plan de la Courbe, mais sans appartenir à aucune de ses branches, sans faire partie d'aucun de ses contours; les secondes sont des points qui sont partie de quelqu'un de ses contours, de quelqu'une de ses branches, mais sans paroître en faire autrement partie que tous leurs autres points. Des premières proviennent des points multiples absolument invisibles aux yeux, & des secondes des points multiples dont la multiplicité n'est qu'en partie invisible.

Les points multiples de la 1^{re} espece, qui n'appartiennent à aucune partie de la Courbe, lui appartiennent pourtant réellement, & de telle sorte qu'ils ont leurs Abscisses & leurs Ordonnées, à plus forte raison ceux de la 2^{de} espece. De plus une droite tirée par quelqu'un de ces points est censée avoir rencontré la Courbe dans le nombre de points désigné par la

la multiplicité du point multiple, & elle ne peut plus la rencontrer que dans le nombre de points permis par l'Équation de la Courbe, ce qui marque bien combien ils en sont essentiellement partie. Cela sera vrai encore à plus forte raison des points multiples d'Intersection ou de Rebroussement, & il suffira de le faire voir des points multiples provenus des Ovals.

Une droite qui a passé par un point mathématique, car ceux dont il s'agit en sont, peut encore passer par tel autre point qu'on voudra. Ainsi celle qui a passé par un point double invisible peut encore couper la Courbe au moins en un point simple, ce qui en fait trois, & par conséquent une Section Conique ne pouvant être rencontrée par une droite qu'en 2 points, il ne peut y avoir de points doubles dans ce 2^d ordre des Lignes, ils ne peuvent commencer à paroître que dans le 3^{me}, où il est clair qu'il ne peut y avoir que celui qui sera provenu d'une Ovale conjuguée. La droite qui aura passé par ce point ne peut être que Sécante en un autre.

Dans le 4^{me} ordre il ne peut y avoir de point plus que triple, car il doit rester à la droite qui y auroit passé encore un point de la Courbe où elle seroit Sécante. Puisque nous ne parlons ici que de points multiples provenus d'Ovals, celui-ci viendra d'une Ovale adhérente. Sans doute il peut y avoir dans cet ordre des points doubles. La droite qui passera par un de ces points, peut encore être Sécante de la Courbe en 2 points, ou Tangente en 1, elle peut même passer encore par un autre point double, après quoi elle ne pourra plus du tout rencontrer la Courbe. Il peut donc y avoir au moins deux points doubles dans une Courbe de cet ordre, car ce que nous venons de dire ne prouve pas qu'il ne puisse y en avoir trois, qui ne pourroient être tous trois sur une même droite.

La multiplicité des points provenus d'Ovals peut augmenter par leur complication avec d'autres points multiples, qui seront provenus d'Intersections ou de Rebroussements. Un point double provenu d'une Ovale conjuguée ne peut

par ce moyen devenir plus multiple, parce que l'Ovale génératrice, pour ainsi dire, ayant été détachée de tout le reste de la Courbe, rien de tout ce qui forme cette Courbe ne passera par ce point.

Mais un point triple provenu d'une Ovale adhérente peut devenir plus que triple dans un ordre supérieur au 4^{me}, parce que l'Ovale adhérente l'aura été à plus d'une branche de la Courbe, &, si l'on veut, à un point de Rebroussement, même multiple.

Les points multiples provenus d'Ovales ont une place déterminée sur le plan de la Courbe, & par conséquent une Abscisse & une Ordonnée, qui font chacune leur fonction autant de fois que le point est multiple, 2 fois si le point est provenu d'une Ovale conjuguée, 3 fois s'il est d'une Ovale adhérente, ce qui n'empêche pas que dans ce 2^d cas le point ne puisse encore être multiple d'ailleurs, comme il vient d'être dit.

Mais il faut se souvenir que ces points, précisément autant que provenus d'Ovales, sont des points mathématiques, qui n'ont aucune position, & par conséquent on ne peut dire que l'Ordonnée d'un point double lui soit parallèle, ou perpendiculaire, ni pareillement son Abscisse, ou la parallèle à l'axe. Elles ne peuvent toutes les deux être traitées que de Sécantes en ces points, & jamais de Tangentes. Si le point est triple, l'Ordonnée ou l'Abscisse y pourront être Tangentes seulement parce qu'elles le feront à la branche qui passe par ce point, & le rend triple; on jugera assés par là des points qui seroient plus que triples.

Il est évident que puisque ces points sont multiples, leurs Abscisses & leurs Ordonnées le sont aussi, & de la même multiplicité.

Toutes ces idées fondamentales, & en quelque sorte Métaphisiques, étant établies, il faut voir maintenant comment le Calcul géométrique s'y prend à démêler dans les Courbes du 4^{me} ordre, dont il s'agit ici, les affections, qui peuvent naître de ces principes. Comme M. l'Abbé de Bragelongne ne traite

encore entre ces Courbes que celles qui ont des points multiples, c'est là que doit tendre toute nôtre recherche, qui ne fera elle-même qu'une espece de Théorie du Calcul.

L'Équation de la Courbe étant donnée, c'est de la combinaison des Abscisses & des Ordonnées, du différent jeu de cette combinaison, que l'on doit tout tirer.

L'Abscisse étant simple, l'Ordonnée est communément simple, alors l'Ordonnée & la parallele à l'axe terminée à cette Ordonnée sont Sécantes de la Courbe.

L'Abscisse étant simple, l'Ordonnée peut être multiple, ou avoir plusieurs valeurs. Si toutes ces valeurs sont inégales, elle sera Sécante de la Courbe en autant de points; si elles sont égales, elle sera ou simple Tangente, ce qui la rendra double, ou Tangente à un point d'inflexion quelconque, ce qui la rendra multiple selon la multiplicité de ce point, triple pour une inflexion simple & visible, quadruple pour l'inflexion invisible, &c. S'il y a des valeurs inégales, & d'autres égales, il est aisé de voir ce qui en arrivera.

L'Abscisse multiple ne peut avoir que des valeurs égales, car ce n'est jamais qu'une même Abscisse que l'on considere, prise sur une certaine étendue de l'axe.

L'Ordonnée étant simple, l'Abscisse peut être multiple, & alors l'Ordonnée n'est Sécante de la Courbe qu'en un point, & la parallele à l'axe en est une Tangente autant de fois multiple que l'Abscisse a de valeurs, c'est-à-dire, simple Tangente, ou Tangente à un point d'inflexion quelconque, car il ne peut pas y avoir là un point de rebroussement, qui empêcheroit l'Ordonnée d'être simple selon la supposition.

Si l'Abscisse & l'Ordonnée sont doubles, l'Ordonnée se termine à un point double, qui sera ou un point d'intersection de deux branches, ou un point de rebroussement; ou un point provenu d'une Ovale conjuguée. L'Abscisse est double dans ces cas, & ne l'est avec l'Ordonnée qu'en ces cas.

Si l'Abscisse & l'Ordonnée sont triples, l'Ordonnée se terminera à un point triple qui sera ou un point d'intersection

84 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE
de trois branches, ou un point de double rebroussement ,
ou un point provenu d'une Ovale adhérente.

En général l'égalité de multiplicité de l'Abcisse & de l'Ordonnée signifiera toujours ces trois cas indéterminément, c'est-à-dire, qu'il y aura un point multiple de l'une des trois especes.

Si l'Abcisse & l'Ordonnée toutes deux multiples ne le sont pas également, le cas des trois points multiples indéterminément marqués, qui étoit *pur*, & ne signifioit rien de plus, devient *mixte*, & signifie qu'outre un point multiple, il y a là un attouchement simple ou multiple. Cet attouchement appartient à celle des deux grandeurs, Abcisse, ou Ordonnée, dont la multiplicité excède l'autre. Ainsi si l'Abcisse est double, & l'Ordonnée triple, il y a là un point double, parce que l'Abcisse & l'Ordonnée sont doubles toutes deux, mais parce que l'Ordonnée a un degré de multiplicité de plus, il faut qu'en se terminant à ce même point double, elle soit Tangente d'une branche de la Courbe. Si c'étoit l'Abcisse qui eût cet excès de multiplicité, ce seroit la parallèle à l'axe qui seroit Tangente. Si l'excès de multiplicité est de 2 degrés, la Tangente le fera à un point d'inflexion, &c.

Dans le 4^{me} ordre des Lignes où un point multiple ne peut être plus que triple, & l'Abcisse ou l'Ordonnée plus que quadruple, il est facile de voir ce qui résultera des différentes combinaisons de l'une & de l'autre. Le cas le plus compliqué sera celui de l'Abcisse triple, & de l'Ordonnée quadruple. Il y aura là un point triple, & l'Ordonnée qui s'y terminera sera Tangente d'une branche. On pourroit prendre pour un cas aussi compliqué celui de l'Abcisse double, & de l'Ordonnée quadruple, parce que le point double sera accompagné d'une inflexion ordinaire & visible.

Les points multiples, que nous trouvons dans toute cette recherche, demeurent encore indéterminés entre trois especes; & il faut ensuite déterminer à laquelle ils appartiennent. Jusqu'ici le Calcul de l'Algebre commune a opéré, & a suffi.

L'Équation de la Courbe contenoit le rapport général & invariable des Abcisses & des Ordonnées exprimées par des grandeurs indéterminées & variables, on a déterminé une Abcisse arbitrairement, quoique le plus souvent il vaille mieux y apporter un certain choix, & en mettant cette grandeur connue dans l'Équation de la Courbe à la place de l'Indéterminée ou Inconnue qui représentoit les Abcisses, on a une nouvelle Équation, où il ne reste que l'Indéterminée ou Inconnue des Ordonnées, qui répondent à l'Abcisse supposée. Ces deux Équations ont chacune autant de racines, ou valeurs, soit réelles, soit imaginaires, qu'il y a d'unités dans leur plus haut Exposant, & c'est là ce qui donne la multiplicité des Abcisses & des Ordonnées, que l'on n'a plus qu'à comparer, & dont nous avons fait voir les conséquences. Quand on est arrivé par-là à reconnoître qu'il y a des points multiples de l'une des trois especes, le Calcul Algébrique ordinaire qui a donné les valeurs égales, tant de l'Abcisse que de l'Ordonnée, ne va pas plus loin, mais parce que malgré cette égalité, qui jusque-là confond les trois especes, les Tangentes ou Soutangentes des différents points multiples sont différentes, il faut, pour lever l'indétermination, prendre le Calcul des Tangentes, qui est différentiel, & transcendant.

Quand le point multiple est formé par l'intersection de plusieurs branches, autant qu'il y a de branches, autant il y a de Tangentes à la Courbe en ce même point qui sont inégales, ou s'il y en a d'égales, affectées de différents Signes.

Quand le point est un point de rebroussement, toutes les Tangentes sont égales.

Quand le point est provenu d'une Ovale conjuguée, il a deux Tangentes égales, mais imaginaires, égales parce qu'il est double, imaginaires parce que c'est un point mathématique, qui n'a point de position, & par conséquent point de Tangente, qui détermine toujours une position. Si le point est provenu d'une Ovale adhérente, il a deux Tangentes imaginaires, & une réelle à cause de la branche à

laquelle il est adhérent. C'est proprement la Tangente de cette branche. On voit combien cela s'accorde avec un principe d'Algebre, que les racines imaginaires vont toujours deux à deux.

Voilà donc les trois especes de points multiples bien distinguées pour le Calcul. Comme la Soutangente d'un point simple d'une Courbe se trouve par une 1^{re} Différentiation de l'Abcisse & de l'Ordonnée, ou, ce qui est le même, par le rapport de l'Infiniment petit de l'Abcisse à celui de l'Ordonnée, la Soutangente d'un point double se trouvera par une 2^{de} Différentiation, celle d'un point triple par une 3^{me}, &c. & l'Équation qui vient de la Différentiation convenable à la multiplicité de chaque point, renferme toutes les valeurs réelles ou imaginaires des Soutangentes, qui détermineront l'espece de chacun.

M. l'Abbé de Bragelongne applique toute sa Théorie des points doubles à un grand nombre de Lignes du 4^{me} ordre, qui ont été presque toutes inconnues jusqu'à présent. Il finit par un Théoreme curieux. Une ligne du 3^{me} ordre ne peut avoir qu'un point double, une ligne du 4^{me} n'en peut avoir qu'un triple, & en ce cas elle n'en aura point de double, mais une autre ligne du même ordre, qui n'aura point de point triple, pourra en avoir un ou plusieurs doubles. Si une ligne du 5^{me} ordre, qui pourroit avoir un point quadruple, ne l'a pas, elle en pourra avoir de doubles, & en plus grand nombre, que si elle n'étoit que du 4^{me} ordre, & ainsi de suite. Il s'agit de sçavoir seulement pour les points doubles, qui se trouveront dans tous les ordres, combien il s'en trouvera au plus dans chacun. M. l'Abbé de Bragelongne démontre que le nombre des points doubles étant 1 pour le 3^{me} ordre, il sera 3 pour le 4^{me}, 6 pour le 5^{me}, 10 pour le 6^{me}, 15 pour le 7^{me}, & toujours ainsi selon la suite des Nombres Triangulaires. Le fait est bien prouvé, mais quel rapport ces Nombres Triangulaires ont-ils, plutôt qu'une infinité d'autres, aux points doubles des différents ordres de Courbes? on trouve assés souvent en Géométrie de ces sortes

de marches réglées, sans qu'on apperçoive la nécessité précise de leur règle particulière. Cela vient en général de ce qu'on en a toujours mis quelqu'une dans le sujet que l'on considère, on la connoît puisqu'on l'a établie soi-même, mais celle-là en produit d'autres imprévûes, qui y étoient renfermées sans que nous le sçussions, & sans que nous sçachions même comment elles y étoient, après les en avoir vû sortir.

SUR LES COURBES TAUTOCRONES.

LA Cycloïde est fort fameuse chés les Géometres, principalement par son isocronisme. On sçait que cette Courbe étant posée verticalement & renversée de sorte que ce qui étoit son sommet soit son point le plus bas, un Corps qui tombera le long de sa concavité jusqu'à ce sommet, tombera toujours en des temps égaux, soit qu'il ait commencé à tomber d'un point plus ou moins élevé. Cette propriété suppose que le corps tombe dans le Vuide, ou dans un Milieu qui ne lui fasse aucune résistance, & comme l'Air n'en fait qu'une insensible, du moins dans des chûtes de peu de hauteur, on n'a point eu besoin pour la pratique de chercher d'autres Courbes qui rendissent égaux les temps des chûtes inégales. V. les M. p. 78.

Mais ce qui ne seroit pas nécessaire pour la pratique l'est pour la Théorie, sur-tout pour celle qui cherche des difficultés à vaincre, & M. Bernoulli en a trouvé une occasion heureuse dans l'entreprise d'étendre l'isocronisme, ou pour nous servir comme lui d'une expression équivalente, le *tautochronisme* de la Cycloïde à d'autres Courbes parcourûes dans des Milieux résistants. Il ne les suppose résistants que selon les quarrés de la vitesse du Corps tombant, hypothèse la plus vrai-semblable, la plus communément reçûe, & peut-être la seule, qui rende possible la solution du Probleme, tant il est difficile. Il ne tiendra qu'aux Géometres d'éprouver combien

il l'est encore dans cette hypothèse-là même, & il faudra être habile pour le bien sentir. Cette raison nous empêche absolument de pouvoir donner aucune idée des finesſes & des subtilités du Calcul de M. Bernoulli, & nous ſommes obligés de nous contenter de quelques vûes générales, & plus communes.

Un axe vertical, qui ſe termine au point le plus bas, ou ſommet de la Cycloïde renverſée étant poſé, & diviſé en une infinité de parties infiniment petites égales, d'où partent les Ordonnées de la Cycloïde, j'appelle *instants* les temps infiniment petits pendant leſquels ſont parcourus chacun des petits côtés de la Courbe, correſpondants à une diviſion de l'axe. A la fin de chaque instant le Corps tombant a une certaine vîteſſe, toujours plus grande d'inſtant en inſtant, & la même que ſ'il fût tombé juſque-là le long de la ligne droite verticale, car il ne tire l'accélération de ſa vîteſſe que de ce qu'il y a de vertical dans ſon mouvement, & nullement de ce qu'il y a d'horizontaſ. Quoique la vîteſſe par laquelle il parcourt pendant chaque instant un petit côté de la Cycloïde ſoit la même que celle par laquelle il eût parcouru la partie droite verticale correſpondante, cela n'empêche pas que l'inſtant par la Cycloïde ne ſoit plus long, parce que tous les petits côtés de la Cycloïde étant inclinés à l'Horizon, excepté le premier & plus élevé, ils ſont plus grands que les petites droites verticales correſpondantes, & ne peuvent être parcourus qu'en plus de temps. Si dans une 1^{re} chute le corps eſt tombé du point le plus élevé de la Cycloïde; & que dans une 2^{de} chute il ne ſoit tombé que de ſon point du milieu, j'entends par-là celui qui répond au point du milieu de l'axe vertical, il eſt viſible que la ſomme des inſtants de la 1^{re} chute eſt deux fois plus forte par le nombre que celle des inſtants de la 2^{de}, & que de ce chef les temps totaux des deux chûtes ſont bien éloignés de l'égalité; mais les inſtants de la 2^{de} chute ont été plus longs par deux raiſons, 1^o parce que cette chute n'ayant pas commencé de ſi haut, la vîteſſe n'y a jamais été ſi grande que dans la 1^{re}, 2^o parce que les côtés de

de la Courbe ont été plus inclinés dans sa 2^{de} moitié. Il est donc possible que les deux sommes d'instants malgré leur première inégalité se retrouvent égales, & ces deux chûtes seront tautocrones. Mais afin que la Courbe porte ce nom, il faut qu'elles le soient toutes de quelque point qu'elles commencent pour aller se terminer au point le plus bas.

Alors comme il y a toujours un certain nombre de côtés de la Courbe communs à une chûte quelconque & à une plus basse, il faut que ces côtés communs, les seuls qui seront parcourus par la chûte basse, soient de telle grandeur qu'ils allongent les instants de la quantité nécessaire, & que quand dans la chûte élevée ils seront parcourus après des côtés supérieurs, & par conséquent avec plus de vitesse, ils n'allongent plus les instants qu'autant qu'il faudra. Or leur grandeur dépend de leur position par rapport à l'Horison; & le tout ensemble de leur position mutuelle ou respective; qui est ce qui fait la nature ou l'essence de la Courbe. Voilà d'où naît la Cycloïde dans un milieu non résistant, seule Courbe tautocrone connue jusqu'ici.

Mais si l'on considère la résistance du Milieu, uniforme en elle-même, parce que le Milieu sera également dense en toutes ses parties, & cependant croissante parce que la vitesse du Corps, qui pénètre le Milieu, croît toujours, & croissante selon les quarrés de cette vitesse, alors il faut faire de nouvelles considérations pour trouver une Courbe tautocrone. La résistance allonge le temps total de la chûte, & tous les instants qui le composent, puisqu'elle retranche toujours quelque portion de la vitesse que produisoit ce qu'il y avoit de vertical dans la chûte de quelque instant. Ce ne sont point les quarrés de la vitesse primitive, produite par le vertical de la chûte, ce sont les quarrés de la vitesse diminuée de chaque instant, auxquels la résistance se proportionne. Or cette vitesse diminuée l'est d'autant plus que la force absolue de la résistance est plus grande, & au contraire; & par conséquent les instants sont allongés selon une certaine raison, dans laquelle doit entrer, outre le quarré de

chaque vîtesse, la force absolüe de la résistance du Milieu: Cette force étant différente pour chaque Milieu, le temps total de la chute & les instants seront donc aussi différemment allongés, & comme les côtés d'une Tautocrone doivent être, & chacun en particulier & tous par rapport les uns aux autres, posés de la manière que demande la durée des instants, il y aura dans la seule hypothèse de la résistance du Milieu proportionnée aux quarrés de la vîtesse croissante; autant de différentes Tautocrones que de différentes résistances absolües possibles pour différens Milieux, c'est-à-dire, qu'il y aura une infinité de Tautocrones, au lieu que la Cycloïde étoit unique pour le Vuide.

M. Bernoulli comprend toutes les Tautocrones de son hypothese dans une Equation générale, où entrent l'infiniment petit d'un Arc quelconque, celui de l'Abcisse correspondante, & deux Indéterminées constantes, dont l'une est la résistance absolüe du Milieu, & l'autre a rapport au temps total de la chute, le tout combiné avec l'Arc quelconque, & l'Abcisse.

Si dans cette Equation on suppose la résistance du Milieu nulle, on voit renaître aussi-tôt la Cycloïde. On ne peut pas supposer cette résistance infinie, il n'y auroit point de chute.

* p. 58.
& suiv.

Si on suppose le temps total infini, car on ne peut pas le supposer nul, la Tautocrone devient la Traëtice, dont nous avons parlé assés au long en 1711*. Cette Courbe a une Asymptote, & par conséquent un cours infini, & son point le plus élevé est infiniment éloigné du plus bas. Qu'un Corps, en suivant la concavité de la Traëtice, tombe ou de ce point le plus élevé, ou de celui qui sera, par ex. à la moitié de l'étendue de la Courbe, ou au tiers, &c. jusqu'au point le plus bas, il tombera toujours dans le même temps infini, parce qu'à proportion qu'il tombera d'un point moins élevé, & acquerra par conséquent moins de vîtesse, la résistance du Milieu diminuëra moins aussi son mouvement. Que si le Corps ne tomboit que d'un point de la Courbe finiment éloigné du point le plus bas, la chute demanderoit encore

le même temps infini, ce qui est nécessaire pour le Tautocronisme, & paroît cependant un violent paradoxe. Mais on l'expliquera aisément, en prenant les idées exposées dans la *Géométrie de l'Infini* sur les Courbes qui ont des Asymptotes. La portion finie de la Tractrice que le Corps auroit à parcourir dans le cas présent, seroit nécessairement selon ces idées presque absolument parallèle à l'Horison, & telle que la pesanteur du Corps ne pourroit lui en faire parcourir une partie infiniment petite qu'en un temps fini, & par conséquent le tout en un temps infini, que la position particulière des petits côtés de la Courbe rendroit égal aux autres temps infinis déjà trouvés.

Il est bon de remarquer que comme la Cycloïde est la seule Tautocrone du Vuide, la Tractrice est la seule Tautocrone du temps infini, & la seule par conséquent d'une étendue infinie.

Quand un Corps tombe dans un Milieu résistant, il reçoit des accroissements continuels de vitesse par la continuation de sa chute selon ce qu'elle a de vertical, & en même temps des décroissements continuels à cette même vitesse par la résistance du Milieu. Les accroissements sont toujours égaux à chaque instant selon le système de la Pesanteur, & les décroissements au contraire toujours plus grands, à cause que la résistance croît dans la raison des quarrés des vitesses. Les accroissements plus grands d'abord que les décroissements; parce que les quarrés de la vitesse sont fort petits, ne sont donc plus grands que de moins en moins, ce qui amene nécessairement les uns & les autres à l'égalité, après quoi les décroissements sont les plus grands. Il y aura dans la Courbe parcourue un point de la plus grande vitesse du Corps.

Qu'après ce point le Corps continue de tomber jusqu'au point le plus bas de cette Courbe, cela n'a rien qui la doive empêcher d'être tautocrone; ce point de la plus grande vitesse baissera toujours à mesure que le Corps tombera d'une moindre hauteur jusqu'au point le plus bas qui est fixe, & la vitesse;

plus diminuée par la résistance du Milieu qu'augmentée par l'action continuelle de la pesanteur, sera dans le même cas que si elle n'étoit diminuée que par la position des côtés de la Courbe, ce qui non seulement n'est pas contraire au tautocronisme, mais y est nécessaire.

Nous n'avons considéré jusqu'à présent qu'une partie du Probleme résolu par M. Bernoulli, les descentes tautocrones d'un Corps; il faut de plus pour le parfait Tautocronisme que ce Corps arrivé au point le plus bas remonte en vertu de sa vitesse jusqu'à une certaine hauteur par une seconde branche de la Courbe, & cela en un temps égal à celui d'une descente quelconque. L'Equation générale de M. Bernoulli renferme ces deux conditions ensemble au moyen d'un simple changement du Signe de quelques termes.

Dans la Cycloïde le Corps arrivé au point le plus bas avec une vitesse entière, & qui n'a essuyé aucune résistance, remonte à la même hauteur d'où il étoit descendu, en un temps égal, & par une seconde branche de la Courbe égale & semblable à la première, ce qu'on voit évidemment qui doit être à cause de la parfaite égalité de tout de part & d'autre. Mais il n'en est pas de même dans une Tautocrone, où se trouve un point de la plus grande vitesse, qui n'est pas, comme dans la Cycloïde, son point le plus bas. Ce Corps ne peut remonter qu'avec cette vitesse diminuée qu'il a au dernier point ou instant de sa descente, par conséquent il ne peut remonter à une aussi grande hauteur que celle d'où il est descendu, & comme il faut qu'il remonte en un temps égal à celui de la descente, il faut que l'Arc remonté ait par rapport à l'Horison l'obliquité nécessaire pour employer tout ce temps-là, d'où il suit que les deux branches de la Courbe, l'une descendüe, l'autre remontée, ne seront ni égales, ni semblables; seulement la branchë descendüe, prise depuis l'origine de la chute jusqu'au point de la plus grande vitesse, sera égale, mais non semblable, à la branche remontée, ainsi que M. Bernoulli le démontre.

Nous avons dit d'après feu M. Varignon en 1708* & 1709* qu'un Corps qui tomberoit en ligne droite dans un Milieu dont la résistance suivroit, ou la raison simple des vîteses, ou celle de leurs quarrés n'acqueroit dans l'un & l'autre cas au bout d'un temps infini qu'une vîtesse finie; mais beaucoup moindre dans le second cas. Si l'on applique cette proposition à la Traëtrice qui est la Tautocrone d'un temps infini dans un Milieu résistant selon la raison des quarrés, le Corps qui parcourt la Traëtrice aura une vîtesse finie au bout d'un temps & d'un cours infini. Il arrivera en un temps fini au point de sa plus grande vîtesse, car il faudroit que la résistance du Milieu fût infiniment petite ou foible pour ne pouvoir qu'au bout d'un temps infini diminüer plus la vîtesse que la pesanteur ne l'augmente continuellement. Du point de la plus grande vîtesse au point le plus bas, il y aura donc une distance infinie. La Courbe aura une seconde branche égale à la portion de la première déterminée par la plus grande vîtesse, & par conséquent finie, & presque entièrement horisontale pour ne pouvoir être parcourüe, ainsi qu'il a été dit, qu'en un temps infini.

* p. 126.

* p. 99.

La Cycloïde & la Traëtrice sont les deux Tautocrones extrêmes & les plus opposées. Elles le sont parfaitement sur la position du point de la plus grande vîtesse dans la première branche; il est dans la Cycloïde à l'extrémité de cette branche, puisqu'il est le même que le point le plus bas, & dans la Traëtrice il est infiniment éloigné du point le plus bas, d'où il suit par analogie que dans toutes les Tautocrones moyennes le point de la plus grande vîtesse ne se confondra jamais avec le point le plus bas, & en sera toujours à une distance finie.

Il suit encore que puisque la Cycloïde a ses deux branches égales & semblables, & que la Traëtrice les a infiniment inégales & dissemblables, les Tautocrones moyennes les auront d'autant moins inégales & dissemblables qu'elles approcheront plus de la Cycloïde, & au contraire. Or elles approcheront d'autant plus de la Cycloïde que les Milieux

94 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE
feront moins résistants, & d'autant plus de la Traëtrice qu'elles
auront besoin pour être Tautocrones d'être parcourûes en un
temps plus long.

Nous ne disons rien des différens Problemes résolus par
M. Bernoulli sur la détermination du point de la plus grande
vitesse, sur la comparaison des différens Arcs de la Courbe,
sur les constructions, &c. Non-content des difficultés natu-
relles du sujet, quoique très-embarrassantes, il y en a même
fait entrer d'étrangères. On reconnoîtra par-tout une extrême
adresse, soit à éviter des labyrinthes de Calcul, soit à se dé-
mêler de ceux qui étoient inévitables.

S U R L A C O U R B E

aux approches égales.

V. les M.
p. 233.

LES Courbes Tautocrones sont telles parce que le Corps
tombe toujours en un temps égal, soit qu'il tombe d'un
point plus ou moins élevé, & il est visible qu'en ce temps
égal il ne s'est pas également approché du point le plus bas
de la Courbe, ou, ce qui est le même, de l'Horison, car
certainement il s'en est d'autant plus approché qu'il est tombé
de plus haut. M. Leibnits imagina de chercher une Courbe
telle que le Corps qui la parcourroit, s'approchât toujours
également de l'Horison en un temps égal, par exemple, en
une seconde. Il l'appella la Courbe *accessus æquabilis*, *aux*
approches égales. Puisque dans une chute faite selon une droite
verticale, la vitesse augmenteroit toujours, & feroit que dans
un temps égal le Corps décriroit toujours une plus grande
portion de cette verticale, & par conséquent s'approcheroit
davantage de l'Horison, il est nécessaire que la Courbe mo-
dère cette augmentation de vitesse, & se dispose de façon que
ce que la chute aura de vertical soit plus court, & ce qu'elle
aura d'horizontal plus long, à mesure qu'elle avancera davan-
tage vers son terme; & cela selon une certaine raison précise;
quoique changeante à chaque instant. M^{rs} Leibnits, Bernoulli

& Varignon, comme nous l'avons dit en 1699*, ont trouvé * p. 68.
que cette Courbe étoit une 2^{de} Parabole cubique, posée de & suiv.
manière que son point de rebroussement fût le plus élevé.

Mais quoique M. Varignon eût porté selon sa coutume ce problème à une grande universalité, en y mettant de nouvelles conditions, les *approches*, par exemple, inégales en telle raison qu'on voudroit, il étoit demeuré renfermé à un autre égard dans des bornes très-étroites; les chûtes se faisoient toujours dans le Vuide, ou dans un Milieu non résistant; ou, ce qui revient au même, dans un Milieu dont la résistance fût toujours uniforme, & indépendante de la vitesse du Corps.

M. de Maupertuis a élevé ce Problème à l'universalité qui lui manquoit, on trouvera toujours une Courbe aux approches égales, selon quelque puissance des vitesses que les Milieux puissent résister. S'ils ne résistent point, c'est la 2^{de} Parabole cubique déjà trouvée, & c'est encore elle s'ils résistent selon la raison simple des vitesses, mais renversée, c'est-à-dire, s'ils résistent moins en même raison que la vitesse devient plus grande. Cette hypothèse ne paroît guère conforme à la Nature, mais enfin cela est analogue à ce que la Cycloïde, qui est la Tautocrone du Vuide, ou du Milieu non résistant, l'est aussi du Milieu qui ne résisteroit que selon la raison simple directe des vitesses. Toutes les autres hypothèses de résistance des Milieux donnent des Courbes d'approches égales fort différentes de la Parabole cubique. L'hypothèse de la résistance proportionnelle aux quarrés des vitesses suffiroit seule pour donner à M. de Maupertuis tout le plaisir qu'il a recherché dans des difficultés de Calcul, soit différentiel, soit intégral. Non-seulement il y a de ces Courbes que l'on ne construit, ou dont on ne peut avoir les Abscisses & les Ordonnées que par des quadratures d'autres Courbes; mais encore ces autres Courbes se trouvent être des Exponentielles, c'est-à-dire, transcendantes par rapport à celles qu'on a nommées d'abord transcendantes par rapport aux Courbes algébriques.

* p. 52.

Cette année, M. de Cury, dont nous avons déjà parlé en 1728*, a lû à l'Académie un Mémoire qu'elle a approuvé, sur la Courbure des Courbes. *Les Eléments de la Géométrie de l'Infini* ont donné pour la détermination de cette Courbure, une méthode géométrique, différente de la méthode ordinaire, qui procède par les Rayons des Développées, Courbes étrangères à celles que l'on examine. La nouvelle méthode prend la Courbure des Courbes en elles-mêmes, & la détermine par les Sinus des Angles de Contingence. Mais elle a le défaut d'être bornée aux Courbes dont les Ordonnées sont parallèles, les plus communes de toutes, à la vérité, & de beaucoup les plus communes, mais non pas les seules; il restoit celles dont les Ordonnées sont concourantes en un point. M. de Cury a trouvé le moyen de rendre la méthode de la *Géométrie de l'Infini* absolument générale, & telle que sur les mêmes principes on y trouve la courbure des deux especes de Courbes; elle est pour les Courbes à Ordonnées concourantes, & par un léger changement elle est pour les Courbes à Ordonnées parallèles. Il a donné des exemples de la 1^{re} espece de Courbes, car il y en avoit assés de la 2^{de} dans l'Ouvrage cité, sur la Spirale ordinaire de tous les degrés, & sur la Spirale Parabolique.

* p. 45.

M. Clairaut, frere cadet de celui dont nous avons parlé en 1726* a lû aussi à l'Académie une Méthode qu'il a trouvée pour former tant de Triangles qu'on voudra; avec cette condition, que la somme des quarrés de deux côtés soit double, triple, quadruple, &c. du quarré de la base; & comme ce qui est dit des quarrés convient à toutes les figures semblables, il prend, au lieu de quarrés, des Segments de Cercles semblables, & découvre par-là les quadratures de quelques especes de Lunules. Il rend plus étendue & plus générale la Méthode de M. de l'Hôpital, pour quarrer quelque

quelque portion de la Lunule d'Hippocrate de Chio *, & il
 quarre encore quelques autres portions de la Lunule, par une
 méthode différente de celles de M^{rs} Wallis, & Tschirnhaus.
 Il a 14 ans, & ce seroit bien assés qu'il entendît les décou-
 vertes de ces grands Géometres, sans y rien ajouter, & sans
 renchérir sur eux; mais on a déjà vû que la Géométrie est
 extrêmement précoce dans cette Famille.

* V. l'Hist.
 de 1701.
 p. 79. & suiv.
 2^{de} Edit.

Nous renvoyons entièrement aux Mémoires
 Deux Ecrits de M. Nicole sur quelques Questions
 qui regardent les Jeux.

V. les M.
 p. 45. &
 331.
 V. les M.
 p. 508.

L'Ecrit de M. Mahieu sur de nouvelles propriétés de
 l'Hiperbole.



ASTRONOMIE.

SUR LA COMETE DE M. DCCXXIX. ET DE M. DCCXXX.

V. les M.
p. 284.
* p. 68.
& suiv.

LA Comete dont nous avons parlé en 1729 *, qui n'a fait aucun bruit dans le monde, & n'a été connue que des Observateurs de profession, & apparemment même d'un petit nombre d'entre eux, est cependant une des plus remarquables & des plus singulières dont on ait mémoire, & sur-tout des mieux conditionnées par rapport à l'établissement d'un système général de ces grands Phénomènes.

Elle avoit commencé à paroître, ou du moins à être aperçûe le 31 Juillet 1729, nous en avons rendu compte jusqu'au 10 Nov. de la même année, & on l'a vûe jusqu'au 21 Jan. 1730, encore ne la perdit-on qu'à cause du mauvais temps, & du clair de Lune, de sorte qu'elle a été visible près de 6 mois, & auroit pû l'être davantage. Il y a plus de 100 ans qu'il n'a paru de Comete d'une si longue durée.

Elle a toujours été d'Orient en Occident, ou contre la suite des Signes depuis la première apparition jusqu'au 19 ou 20 Oct. après quoi elle a été d'Occident en Orient, c'est-à-dire, qu'elle a été rétrograde & puis directe à la manière des Planètes; & comme selon le calcul de M. Cassini elle avoit dû être en opposition avec le Soleil le 8 Août, temps où elle n'étoit pas encore observée à Paris, on a dû voir ici son mouvement rétrograde diminuer toujours, ainsi qu'auroit fait celui d'une Planete qui a passé l'opposition, & c'est en effet ce qu'on a vû. Il est naturel de supposer que le temps de la première rétrogradation, c'est-à-dire, de celle qui a précédé l'opposition, ait été égal à celui de la seconde, & sur

ce pied-là elle auroit commencé à être rétrograde dans les derniers jours de Mai 1729, & l'auroit été en tout près de 5 mois. C'étoit-là un temps bien suffisant pour son apparition totale, & s'il n'avoit pas été plus long, on auroit jugé qu'elle n'avoit qu'un mouvement d'Orient en Occident; qu'elle alloit donc contre la direction du Tourbillon Cartésien, & que cela étant impossible à la longue, ce Tourbillon n'existoit point. Il ne faut donc pas se presser de croire que les Tourbillons soient détruits par les mouvements des Comètes, qui y sont opposés, & il y a au contraire une forte présomption, qu'ils se rétabliront parfaitement par l'explication de M. Cassini, que la Comète de cette année favorise à fouhait.

En vertu de la rétrogradation & de la direction, qui a suivi, cette Comète a été vûë dans le même lieu du Ciel en deux temps différents, ce qui est un avantage rare & considérable pour les déterminaisons astronomiques, mais nous ne pouvons que le faire entrevoir.

L'Orbe de la Terre autour du Soleil, quoiqu'il ait un diametre de 66 millions de Lieües, est si petit par rapport à la distance des Fixes, qu'il peut n'être compté que pour un point, & que la Terre, qui lorsqu'elle est à l'extrémité d'un diametre, voit, par exemple, une Fixe au Zénit, l'y verra encore lorsqu'elle sera à l'autre extrémité; s'il y a une différence ou parallaxe, il sera bien difficile de l'appercevoir. Ainsi toutes les lignes, qui de la Terre placée en différents points de son Orbe iront à une même Etoile fixe, seront censées parallèles à cause de la distance presque infinie, & les arcs de l'Orbe compris entre deux parallèles consécutives, ou plutôt les cordes de ces arcs, seront les distances de ces parallèles entre elles, & les bases de triangles infiniment aigus, dont le sommet seroit infiniment éloigné. Si outre l'Etoile supposée au Zénit la Terre en regarde une autre de différents points de son Orbe, elle la verra encore par des lignes toutes parallèles entre elles, mais inclinées aux premières, plus ou moins selon la position des deux Etoiles.

Si un autre Astre qu'une Fixe est vû au même point du Ciel par la Terre placée en deux différents points de son Orbe, ou, ce qui est le même, en deux différents temps, il est à cet égard dans le même cas qu'une Fixe, & il est vû par deux paralleles, mais si cet Astre se meut, comme fait certainement une Comete, il est impossible qu'il soit vû dans les deux temps par les deux paralleles, à moins qu'il ne se soit mû selon la même direction que la Terre, qu'il aura suivie pour se retrouver à son égard dans la même position que s'il eût été fixe. Il n'importe quelle ligne il ait décrite entre les deux paralleles, courbe ou droite, perpendiculaire ou inclinée à ces paralleles, mais enfin pour passer de la première à la seconde, il faut puisqu'il s'est mû, qu'il se soit mû du même sens que la Terre, il n'y a que cette condition qui puisse faire l'effet de l'immobilité d'une Fixe. La Comete s'est donc mûe réellement d'Occident en Orient pendant tout l'intervalle compris entre les deux temps, où elle a été vûe au même lieu du Ciel, c'est-à-dire, aussi-bien pendant la rétrogradation que pendant la direction, & par-là M. Cassini amene à la certitude géométrique ce qui n'étoit auparavant que très-probable. C'est la Comete vûe deux fois dans le même lieu du Ciel qui a fondé la démonstration.

Ces deux paralleles, par lesquelles la Comete a été vûe au même lieu en deux observations différentes, ne peuvent déterminer ni quelle route la Comete a tenue entre elles, ce qui est clair, ni quelle est sa distance à la Terre, car puisqu'elles sont paralleles elles ne font point d'angles, & à quelque distance très-grande qu'on suppose la Comete, ce sera toujours la même chose. Mais si on prend une 3^{me} observation, où la Comete aura été vûe dans un autre lieu du Ciel, & que du point de l'Orbe de la Terre d'où cette observation aura été faite on tire une ligne à la Comete, cette ligne sera nécessairement inclinée aux deux paralleles, puisque la Comete est vûe dans un autre lieu, & l'inclinaison sera d'autant plus grande, ou l'angle de la nouvelle ligne avec les deux premières d'autant plus petit, que la dis-

tance de la Comete à la Terre sera plus grande. Voilà le principe fondamental de la détermination de cette distance, qui demande pourtant encore assés de Géometrie & de calcul. Il faut se servir des distances connües de la Terre au Soleil dans les trois observations, prendre entre les lignes tirées de la Terre à la Comete d'autres lignes proportionnelles aux arcs décrits par la Terre sur son Orbe d'une observation à l'autre, ou aux temps écoulés, &c. Enfin tout cela fait, M. Cassini trouve la Comete entre Mars & Jupiter, comme il l'avoit déjà avancé en 1729. Il seroit inutile d'avertir que si nous n'avons supposé ici que trois observations, ce n'a été qu'afin de réduire tout au plus simple, un Astronome qui en a un plus grand nombre ne manque certainement pas de les employer, sur-tout dans des déterminations très-déliçates & très-épineuses. M. Cassini croit qu'en posant la distance moyenne de sa Comete au Soleil un peu plus de quatre fois plus grande dans les six mois qu'on l'a apperçüe, que celle de la Terre, il approche presque autant du vrai que l'on ait fait pour la distance d'aucune Planete. On n'a peut-être pas vû jusqu'à présent de Comete dont la distance soit aussi exactement trouvée.

La même méthode, qui fournit la distance par le moyen des trois observations supposées, fournit aussi l'inclinaison, & par conséquent la longueur de la route de la Comete entre les deux paralleles & la 3^{me} ligne inclinée, pourvû que cette route soit une ligne droite, & cette ligne qui se trouve nécessairement divisée en deux parties donne par le rapport de ces parties celui du mouvement de la Comete entre les observations, pourvû que ce mouvement soit uniforme. Mais ni l'une ni l'autre de ces deux conditions ne se trouve dans la réalité; on peut cependant les supposer légitimement toutes deux, & dans une fort petite portion de l'Orbe de la Comete, & dans un temps fort court par rapport à celui de sa révolution entière. Or on est toujours, ou bien on peut aisément se mettre dans l'un & l'autre de ces deux cas.

Cette méthode n'est donc bonne que pour trouver le

mouvement de la Comete, qui a répondu à trois observations, par ex. peu éloignées. Si l'on en prenoit trois autres peu éloignées entre elles, mais éloignées des premières, on trouveroit une autre quantité de mouvement, de même qu'en prenant la Comete dans des points de son cours éloignés, on lui trouvera différentes distances au Soleil & à la Terre.

Les distances de la Comete au Soleil & plus précisément à la Terre, font varier l'apparence de son mouvement, une plus grande proximité la rend plus grande, & au contraire, mais les distances au Soleil doivent faire varier le mouvement réel comme celui des Planetes, si les Cometes sont des Planetes Solaires, & il se trouve dans la Comete dont il s'agit, que la différence de son mouvement, vû en deux points éloignés de son cours, a été double de la différence de sa distance au Soleil dans ces mêmes points, ainsi qu'on le trouve précisément dans les Planetes les mieux connûes. Une moitié de cette différence du mouvement observé n'étoit qu'apparente, & dûë à une distance, moindre, si l'on veut, l'autre moitié étoit réelle, & véritablement causée par cette distance, parce qu'elle étoit moindre.

Si la Comete dans le temps qu'elle a été visible a été 4 fois plus éloignée du Soleil que la Terre, & si l'on suppose que dans la Région du Ciel, ou dans la couche du Tourbillon Solaire où elle se trouvoit elle ait pris la vitesse qui selon la Règle de Képler conviendrait à une Planete placée au même lieu, on verra sans peine que sa vitesse réelle devoit être 2 fois moindre que celle de la Terre, car ces vitesses réelles des Planetes sont en raison renversée des racines quarrées de leurs distances au Soleil, or ici la distance de la Terre étant 1, celle de la Comete est 4, dont la racine est 2. Si la Terre qui fait sur son Orbe un degré en 24 heures avoit 2 fois moins de vitesse, elle ne feroit que 30', donc la Comete avec cette même vitesse employée à parcourir un Orbe 4 fois plus grand que celui de la Terre ne doit faire en 24 heures que le quart de 30', ou 7' 30".

Cependant M. Cassini par ses calculs trouve ce même

mouvement de $9' 40''$, ce qui est trop différent pour la précision dont l'Astronomie est aujourd'hui, mais ce qui rectifie & corrige cette différence, c'est qu'en supposant que la Comete parcouroit une Ellipse, ainsi qu'il est nécessaire, si c'étoit une Planete, il suit de cette figure qu'au temps de sa première apparition elle avoit un peu passé son Périhélie & alloit à une de ses moyennes distances, où par conséquent son mouvement, qui est alors véritablement le moyen, & réel, eût été moindre que $9' 40''$. En suivant l'idée de l'Ellipse M. Cassini détermine le mouvement dans l'Aphélie d'un peu moins de $4'$, & de tout cela résulte pour tout l'Orbe le véritable mouvement moyen de $6'$.

M. Cassini n'ose déterminer absolument l'espece de l'Ellipse que décrit la Comete, parce qu'il ne juge pas que dans les différentes observations ses distances au Soleil, qui seroient un fondement nécessaire, ayent pû être connus avec une assez grande précision. Il ne laisse pas néanmoins de croire qu'on représentera assez exactement son cours en supposant que sa moyenne distance au Soleil est à celle de la Terre comme 24 à 5. Il suit de-là que sa révolution entière est d'environ 10 années selon la Règle de Képler, à laquelle cette Comete se trouve merveilleusement conforme, ce qui est & une nouvelle gloire pour la Règle qui ne s'étendoit pas encore jusque-là, & une forte preuve que quelques Cometes tout au moins sont des Planetes Solaires.

L'inclinaison de l'Orbe de cette Comete sur le plan de l'Ecliptique est, selon les calculs de M. Cassini, de plus de 76 degrés, ce qui excède de beaucoup la plus grande inclinaison de toutes les Planetes connues, celle de Mercure, qui n'est que de 7, mais il ne sera pas étonnant qu'une Comete, qui quoique Planete Solaire seroit toujours d'une condition différente des autres, s'en écarte beaucoup à quelques égards, qui ne changeroient rien à leur nature générale. Le Nœud de son Orbite avec l'Ecliptique a été entre le 10 & le 11^{me} degré d'Aquarius.

Selon son mouvement & le temps de sa révolution déterminés par M. Cassini, elle a dû se retrouver en opposition avec le Soleil au mois de Sept. 1730, temps le plus favorable pour l'observer, si elle a pû l'être, mais elle ne l'a pû, apparemment parce qu'elle étoit alors trop éloignée de la Terre. Il ne faut pas s'attendre que tout s'accorde si promptement à donner un système général des Comètes, ni même celui d'aucune Comète en particulier. Des Philosophes trop impatientes auroient à revenir sur leurs pas.

*SUR UNE OBSERVATION
de l'Eclipse de Lune du 8 Août 1729, faite à la
Nouvelle Orléans dans la Louïsiane.*

* p. 344.
& 346.

L'ECLIPSE totale de Lune du 8 Aoust 1729, dont les Observations faites à Paris ont été rapportées dans les Mémoires de cette même année *, fut aussi observée à la Nouvelle Orléans dans la Louïsiane par M. Baron, envoyé dans ce Pays-là par le Roy pour des recherches d'Histoire Naturelle & des observations Astronomiques. Nous rendons particulièrement compte de celle-ci, parce qu'elle servit à décider une difficulté qui s'étoit élevée dans l'Académie.

Le P. Laval, dans son voyage de la Louïsiane en 1720, avoit donné par ses observations la différence de Longitude entre Paris & l'Isle Dauphine, située à l'embouchure de la Rivière de la Mobile, plus petite de 11 degrés que celle de la Carte d'Amérique de M. Delisle, publiée en 1722. Le P. Laval se tenoit sûr de l'exactitude de son observation, & son habileté n'étoit pas contestée, celle de M. Delisle ne l'étoit pas non plus, & il étoit armé d'un grand nombre de raisons très-fortes, qu'il exposa à l'Académie, & ils différoient tous-deux à tel point qu'on ne pouvoit les concilier en supposant que l'un ou l'autre seroit tombé dans quelque légère erreur.

Enfin

Enfin le doute fut levé par l'Eclipse dont il s'agit. Elle fut vûë à Paris pendant toute sa durée, & à la Nouvelle Orléans vers sa fin seulement, & M. Cassini ayant comparé les temps des Phases observées par lui & par M. Baron, ou s'étant servi de quelques autres observations faites en France, a trouvé qu'il en résulloit entre les deux Lieux une différence de Méridiens assés conforme à celle que M. Delisle avoit posée.

Nous renvoyons entièrement aux Mémoires
L'Ecrit de M. Godin sur la solution d'un Probleme, V. les M.
d'où l'on tire une Méthode nouvelle de déterminer les Nœuds p. 26.
des Planetes.

L'Observation de M. Cassini de l'Eclipse Solaire du 15 V. les M.
Juillet. p. 450.





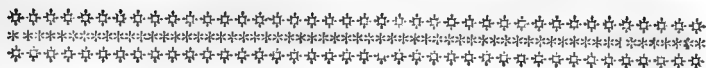
G É O G R A P H I E.

MBUACHE, employé à travailler au Dépôt des Cartes de la Marine établi en 1721, ayant profité pour l'avancement de la Géographie de tout ce qu'il avoit sous les yeux, apporta à l'Académie une Carte qu'il avoit dressée du Golphe de Mexique & des Isles de l'Amérique. Cette partie du Nouveau Monde est la plus fréquentée par les Navigateurs François, & les erreurs des Cartes en deviennent d'autant plus dangereuses. Celle de Pieter Goos, dont les Pilotes se servent ordinairement, se trouva par les recherches de M. Buache assés éloigné du vrai. Il rendoit sensible à l'œil par des contours d'une couleur différente combien elle différoit de la nouvelle Carte. Celle-ci différoit même assés considérablement de la Carte du Mexique de feu M. Delisse, mais beaucoup moins de la dernière Édition en une feuille de l'Amérique du même Auteur. M. Buache faisoit gloire d'être Disciple de M. Delisse, mais il avoit eu l'avantage de travailler sur quantité de Mémoires que le Maître n'avoit pas connus. Plus on en a devant soi, plus on peut approcher de la vérité dans les déterminations, mais aussi le travail se multiplie à proportion par le grand nombre d'attentions, de réflexions, & de combinaisons nécessaires.

V. les M.
p. 562.

Nous renvoyons entièrement aux Mémoires Les Remarques de M. de Mairan sur la comparaison de Paris & de Londres.





M É C H A N I Q U E.

S U R L E S V O Û T E S.

M. COUPLET continuë la Théorie des Voûtes, qu'il n'avoit donnée en 1729 *, que dans l'hypothèse purement géométrique & réellement fausse, que les Voussoirs fussent parfaitement polis. Ici il reprend la réalité, les Voussoirs s'engrènent par leurs surfaces les uns dans les autres, & il y faut même ajouter ce qui n'est pas tout-à-fait réel, qu'ils s'engrènent de façon à ne pouvoir céder à aucune force, dont l'effet ne seroit que de faire glisser une surface sur une autre ; car la Géométrie ne peut jamais s'allier à la Méchanique, qu'en y supposant quelque chose de plus absolu & de plus précis que le vrai.

V. les M.
P. 117.
* V. l'Hist.
de 1729.
p. 75. & suiv.

Une Voûte étant construite, dont je suppose pour plus de facilité que l'intrados & l'extrados sont deux demi-Cercles concentriques, si l'on conçoit une ligne tirée du milieu de la Clef sur un pied-droit, & qui représentera l'action ou l'effort de la Voûte sur ce pied-droit, cette ligne en cas qu'elle passe toute entière dans l'épaisseur de la Voûte fera deux effets différents, selon l'hypothèse des Voussoirs polis, ou non polis. Dans l'une & l'autre hypothèse, elle est nécessairement inclinée au pied-droit, mais dans la première, elle fera glisser le dernier Voussoir par ce qu'elle a d'horizontale dans son effort, & le Voussoir auroit besoin d'une pesanteur infinie pour lui résister, mais dans la 2^{de} hypothèse, elle ne peut le faire glisser, & à cet égard la Voûte seroit inébranlable. Que si la ligne n'étoit pas toute entière dans l'épaisseur de la Voûte, & qu'elle coupât le Quart de Cercle de l'intrados, il est visible que l'action de la Voûte manquant d'appui dans une

partie de son étenduë, & tombant, pour ainsi dire, à vuide, la Voûte se démentiroit aisément.

Dans cette 2^{de} hypothese où le dernier Vouffoir ne peut glisser sur le pied-droit, il ne laisse pas pour cela de pouvoir être renversé du dedans de la Voûte en dehors, & c'est ce qu'il y a ici de plus important à expliquer.

M. Couplet partage en quatre Vouffoirs égaux la Voûte demi-circulaire, que nous avons supposée. Il suffit d'en considérer une moitié, qui n'a donc que deux Vouffoirs. Le 1^{er} Vouffoir ou le supérieur tend à tomber par une ligne verticale tirée de son centre de gravité. Cette verticale est la diagonale d'un parallélogramme, dont deux côtés sont horizontaux, & les deux autres inclinés à l'horison. Des deux horizontaux, le supérieur ne fait que pousser selon sa direction le 1^{er} Vouffoir de l'autre moitié de la Voûte, qui lui résiste avec un effort égal, l'horizontal inférieur pousse le 2^d Vouffoir sur lequel le 1^{er} est posé, & le pousse de façon qu'il tend à le renverser du dedans de la Voûte en dehors. Les deux côtés inclinés du parallélogramme n'agissent que par ce qu'ils ont de vertical, & par-là ne tendent qu'à affermir le 2^d Vouffoir sur le pied-droit, & par conséquent le 1^{er} Vouffoir ne tend à renverser le 2^d qu'autant qu'il a un effort horizontal plus grand que le vertical. D'un autre côté le 2^d Vouffoir tend à tomber en dedans de la Voûte selon une verticale tirée de son centre de gravité, & cet effort est contraire à celui que le 1^{er} Vouffoir fait contre lui. Il faut pour l'équilibre, que ces deux efforts opposés, ou plutôt ces deux énergies soient égales, je dis *énergies*, parce que tout effort se rapportant à un point fixe auquel il se dirige, il faut considérer la distance de la direction de chaque effort à ce point fixe, ou, ce qui est le même, son bras de levier, toujours, comme l'on sçait, d'autant plus avantageux qu'il est plus long.

Une Voûte, telle qu'on l'a supposée, demande donc pour être bien construite, & aussi durable qu'elle peut l'être, que cet équilibre se trouve entre les deux Vouffoirs de chacune de ses moitiés. Il ne peut s'y trouver, sans mettre une certaine

proportion entre les parties de la Voûte ; si elle est d'une certaine ouverture, ou pour parler plus précisément, si le diamètre du demi-Cercle de son intrados est d'une certaine grandeur, il faudra qu'elle ait une certaine épaisseur, ou que son intrados & son extrados soient à une certaine distance l'un de l'autre, & comme ce sont ici deux demi-Cercles concentriques, cette distance sera par-tout égale. Il est visible qu'elle sera en même temps la moindre qu'il se puisse, & que la Voûte n'aura que l'épaisseur absolument nécessaire, puisque tout dépendra de l'équilibre des Vouffoirs, qui consiste en un point indivisible. M. Couplet cherche par l'Algebre quelle sera cette épaisseur de la Voûte, tout le reste étant connu, & il ne parvient à cette détermination que par des calculs qui, sans tomber dans les grandes difficultés de l'Art, sont cependant fort longs & fort pénibles. Si le diamètre de l'intrados est de 28 pieds, l'épaisseur uniforme de la Voûte sera de 1 pied & environ $\frac{1}{2}$.

Mais si on suppose que la Voûte, au lieu d'être formée de deux demi-Cercles concentriques, ou de deux arcs de 180 degrés, le soit de deux arcs de 120 seulement, & que son ouverture ou la corde de l'intrados soit encore de 28 pieds, on trouvera que l'épaisseur uniforme sera beaucoup moindre, & la raison en est que les leviers par lesquels agiront les efforts des Vouffoirs inférieurs seront plus longs, & que par conséquent les poids absolus n'auront pas besoin d'être si grands, ce qui emporte une moindre épaisseur de la Voûte.

En effet, si l'on conçoit une Voûte formée de quatre Vouffoirs, comme celles que nous considérons ici, mais infiniment platte, de sorte que l'étendue, tant de l'intrados, que de l'extrados, soit égale à la corde de l'intrados, à 28 pieds, si l'on veut, & si l'on conçoit encore dans les Vouffoirs les mêmes efforts que dans les précédents, on verra sans peine que ces efforts rapportés à leurs points fixes, agiront par des bras de levier plus longs qu'en toute autre supposition, & que si on vient à courber l'intrados & l'extrados en augmentant leur longueur, mais en conservant l'ouverture ou corde

de 28 pieds, les bras de leviers s'accourcissent toujours, à mesure que la courbure sera plus grande. De deux Voûtes, qui, sur une même ouverture ou corde de l'intrados, ont l'une 120 degrés, l'autre 180, la première est certainement la plus plate, ou la moins courbe, donc c'est celle où les efforts agiront par les plus longs bras de leviers, & où la pesanteur absolue des Vouffoirs devra être la moindre.

Une Voûte peu épaisse en paroîtra plus hardie, & pourra faire plus d'honneur à l'Architecte; cependant M. Couplet avertit que ce n'est pas là une gloire dont il faille trop se picquer. Quand une Voûte est mince, les efforts des Vouffoirs agissent trop près de la surface extérieure, où ils ont nécessairement leurs points d'appui, ils tendent à écraser les arrêtes des Vouffoirs, & les écrasent à la fin, d'où s'ensuit la ruine de la Voûte, du moins en partie. Ainsi par rapport à cet inconvénient, & pour éloigner de la surface extérieure les appuis des efforts, & les mettre en lieu de sûreté, il faut une plus grande épaisseur de Voûte que celle que demandoit précisément l'équilibre, & M. Couplet va jusqu'à la tripler.

Avec la Théorie qu'il a en main, il résout quelques autres Problemes, il détermine, par exemple, quelle est dans l'hypothèse présente de l'engrènement, la poussée horizontale d'une Voûte, comment on peut diriger vers un point donné de la base du pied-droit l'effort total résultant de tous les efforts particuliers, &c. On voit assez comment tout cela se lie, soit avec ce qui a été dit ici, soit avec les Théories précédentes de M. Couplet, qui paroît s'être mis particulièrement en possession de ces sortes de sujets.

SUR LE MOUVEMENT DES EAUX.

V. les M.

p. 536.

* p. 80.

& suiv.

* p. 137.

& suiv.

* p. 81.

& suiv.

CEUx qui ont quelque idée de la Méchanique, qui regardent les Eaux, ne seront pas étonnés qu'après ce que nous en avons dit en 1725*, en 1727*, & en 1729* pour exposer les vûes de M. Pitot, nous y revenions encore sur les pas du même Auteur, il y aura toujours lieu à de

nouveaux éclaircissements sur cette matière, à mesure qu'on s'y appliquera davantage, & on s'y est appliqué plus que jamais dans ces derniers temps à cause de l'utilité que quelques Mécaniciens en ont attendue.

On sçait par expérience qu'un Corps pesant qu'on laisse tomber librement dans l'air y parcourt 14 pieds dans la 1.^{re} Seconde de sa chute, les espaces des Secondes suivantes se trouveront aisément par le système de Galilée. Tout le monde sçait que selon le même système, si ce Corps qui par un mouvement accéléré est tombé de 14 pieds en une Seconde vient ensuite à se mouvoir d'un mouvement uniforme avec cette vitesse acquise à la fin de sa chute, il parcourra en chaque Seconde le double du premier espace, c'est-à-dire, 28 pieds. On sçait encore que la vitesse acquise à la fin d'une chute est proportionnelle à la racine quarrée de la hauteur d'où le Corps est tombé, ou, ce qui est le même, s'exprime par cette racine. Donc la racine de 14 exprime la vitesse acquise à la fin de la 1.^{re} Seconde par le Corps dont le mouvement s'est toujours accéléré, & 28 exprime la vitesse qu'il auroit pendant chaque Seconde, s'il prenoit un mouvement uniforme dont la vitesse fût égale à celle du dernier instant de sa chute.

Ce rapport de la racine de 14 & de 28 n'est pas seulement pour une chute faite en une Seconde, il se retrouvera encore dans toutes les autres. Que le Corps soit tombé pendant 2 Secondes, il aura parcouru 4 fois 14 pieds, & la racine de cette nouvelle hauteur d'où il sera tombé est 2 fois la racine de 14. D'un autre côté la vitesse acquise à la fin de la nouvelle chute sera double de la vitesse de la première; donc la vitesse uniforme, qu'on suppose toujours qu'il prendra, sera 2 fois 28. Or 2 racines de 14, & 2 fois 28 ont le même rapport que la racine de 14 & 28. Il en ira de même si le Corps tombe pendant 3 Secondes, pendant 4, &c. Donc la Règle de M. Pitot est vraie, que la vitesse acquise par une chute faite d'une hauteur quelconque, ou, ce qui est le même, la racine de cette hauteur est à la vitesse

uniforme que le Corps prendroit ensuite, comme la racine de 14 à 28.

De-là il suit évidemment que si une Eau qui est tombée d'une hauteur quelconque vient ensuite à couler horizontalement ou à peu près, & par conséquent d'un mouvement uniforme, le quarré de sa vitesse uniforme est égal à 56 fois la hauteur d'où elle est tombée. On voit assés tout ce qui se peut tirer de cette formule générale.

On conçoit toujours que la quantité de l'Eau qui sort, ou plus précisément, tombe d'un Réservoir ou d'un Tuyau, est plus grande en même raison que sa vitesse, qui dépend de la hauteur d'où elle tombe, est plus grande, & de-là vient que si on oppose à cette eau tombante une surface perpendiculaire à la direction de sa chute, elle fait sur cette surface une impression, qui est selon le quarré de sa vitesse. Mais; ce qu'on n'auroit peut-être pas crû, cette proposition reçûe de tous les Mécaniciens n'est vraie qu'avec une modification, tant ces matières là sont délicates, & tant en général toutes celles qui sont examinées de près le deviennent. Si on prend l'eau à sa sortie du Réservoir ou du Tuyau, & qu'on lui oppose une surface, la proposition sera exactement vraie, & la quantité d'eau d'autant plus grande que sa vitesse à sa sortie sera plus grande. Si on ne lui oppose la surface que plus loin de l'ouverture par où elle sort, sa vitesse sera certainement plus grande puisqu'elle se fera toujours accélérée hors du tuyau, & d'autant plus que l'espace parcouru dans l'air aura été plus grand, cependant il est certain aussi que la quantité d'eau ne sera pas plus grande dans ce 2^d cas que dans le 1^{er}, & ce qui le prouve bien évidemment, c'est que si après une certaine quantité d'eau écoulée, on fermoit l'ouverture du tuyau, cette eau qui en seroit sortie accéléreroit toujours sa vitesse dans l'air, & n'en seroit pas en plus grande quantité. Que si on supposoit le tuyau prolongé jusqu'au point où se terminoit la chute de l'eau dans l'air, alors la quantité d'eau redeviendra proportionnelle à sa dernière vitesse. Quelle est cette bisarrerie apparente? Quelle est, comme

comme dit M. Pitot, la vertu des parois du tuyau pour rendre la quantité d'eau plus grande! Voici le dénoûement qu'on peut donner à cette difficulté.

La quantité d'eau n'est plus grande à raison de la vitesse que quand l'eau se meut d'un mouvement uniforme, & non quand elle se meut d'un mouvement accéléré, car il est visible que pour lui faire parcourir plus vite un certain espace dans un certain temps, le mouvement accéléré ne touche point à sa quantité, & la laisse telle qu'elle étoit, au lieu que pour le même effet il est impossible que le mouvement uniforme ne fasse augmenter sa quantité. Or tant que l'eau se meut dans le tuyau, elle a un mouvement uniforme, & tombe comme un cylindre d'eau continu dont les parties supérieures & inférieures n'ont que la même vitesse, ainsi que nous l'avons dit plus au long en 1703*. Mais quand elle est sortie du tuyau elle a un mouvement accéléré. La conséquence s'offre d'elle-même. Nous pouvons remarquer ici en passant que quoique l'eau ne se meuve dans le tuyau que d'un mouvement uniforme, sa vitesse à la sortie est la même que si elle y avoit eu un mouvement accéléré, & que celui qu'elle a ensuite en tombant dans l'air est le même que s'il étoit la continuation d'un mouvement accéléré précédent dans le tuyau.

Sur ce fondement M. Pitot ne manque pas d'avertir que quand il sera question de calculer la force d'une eau qui étant sortie d'un réservoir aura parcouru quelque espace dans l'air avant que de choquer une surface, on se trompera, si, comme il pourroit arriver fort naturellement, on suppose sa quantité proportionnelle à la dernière vitesse acquise par sa chute, on trouvera la force plus grande qu'elle ne l'est effectivement, & afin que ce calcul soit bon il faut prendre l'eau à sa sortie du réservoir, ou si proche que la différence puisse être négligée.

Après tout cela, M. Pitot applique sa Théorie aux Rivières. Pour les considérer géométriquement, il faut supposer d'abord des choses qui ne se trouvent pas dans la réalité, que leurs lits

* p. 125.
& 126.
2^{de} E'dit.

sont formés de trois plans droits & uniformes, l'un inférieur incliné à l'Horison, les deux autres verticaux, que l'inclinaison de l'inférieur est par tout la même, & qu'enfin une Rivière n'en reçoit point d'autre. Voici ce qui s'ensuivroit de ces hypothèses.

1.^o Il seroit très-aisé de trouver quelle seroit la dernière vitesse de la Rivière, celle avec laquelle elle se présenteroit pour entrer dans la Mer, pourvû que l'on connût la pente ou l'inclinaison de son lit. Cette vitesse seroit exprimée par la racine de la hauteur qu'auroit la source de la Rivière à l'égard du niveau de la Mer.

2.^o Comme la vitesse des Rivières s'accéléroient toujours, elles ne demanderoient toujours qu'un lit moins large, parce que la même quantité d'eau mûe plus vite peut passer dans un temps égal par un espace plus étroit, & comme elles se font leurs lits elles-mêmes, elles n'en auroient donc que d'ainsi conditionnés.

Ceci n'est point contraire à ce qui a été dit ci-dessus, que le mouvement accéléré n'augmentoît point la quantité d'eau. Il s'agissoit d'un mouvement vertical, ici c'est un mouvement incliné, dans la composition duquel entre l'horizontal uniforme aussi-bien que le vertical accéléré. Comme ils sont liés ensemble, l'horizontal devient plus grand avec le vertical.

3.^o Ce qu'on a dit de la largeur des lits, il faut le dire de la profondeur, elle diminueroit toujours.

4.^o Les Rivières seroient toujours plus étroites, moins profondes, & plus rapides à mesure qu'elles avanceroient dans leur cours.

Heureusement pour nous, c'est le contraire dans la nature. Les Rivières seroient très-peu navigables, soit à cause de leur trop grande rapidité, soit à cause du peu de profondeur. Les inégalités tant de leurs bords que de leur fond, les frottements qu'elles y souffrent, ralentissent beaucoup la vitesse qu'elles auroient naturellement, & dans l'état, pour ainsi dire, géométrique. Nous avons expliqué dans un assés grand détail en 1710 * comment elles élargissent nécessairement leur

* p. 159.
& suiv.

lit, & en même temps le creusent de manière à en rendre le fond presque horizontal.

M. Pitot ajoute une nouvelle considération, c'est l'entrée des Rivières dans la Mer. En supposant une surface plane mise entre deux fluides qui la poussent avec des directions contraires, & des vitesses inégales, il est certain qu'elle entrera avec une certaine vitesse dans le fluide dont la vitesse est la moindre, il trouve l'expression algébrique de la vitesse de la surface; c'est la même que celle d'un fleuve plus rapide qui entreroit dans un plus lent, dont le cours seroit directement opposé. Mais comme la Mer n'a point de cours, il faut supposer nulle la vitesse moindre du second fleuve, & alors la formule donne précisément pour la vitesse du fleuve qui entre dans la Mer, la moitié de celle qu'il avoit quand il a rencontré la Mer.

Quand un fleuve est arrivé de sa source au quart de son cours, il a, selon le système de Galilée, la moitié de la dernière vitesse qu'il aura à son embouchure. Donc, suivant ce qui vient d'être dit, il a la même vitesse, & au quart de son cours, & à l'extrémité, donc il ne peut pas y avoir grande variation dans tout l'entre-deux, le cours devient assés horizontal, & le mouvement assés uniforme. La Mer est un obstacle qui attend toujours le fleuve, arrête & suspend ses eaux jusqu'à un certain point, & a une espece d'effet rétroactif qu'il n'est pas difficile de comprendre.

*MACHINES OU INVENTIONS
APPROUVÉES PAR L'ACADEMIE
EN M. DCCXXX.*

I.

UNE espece de Martinet de Forge présenté par M. Compagnot, pesant 300 livres, que deux Hommes élèvent assés facilement, par la disposition des pieces de la

Machine, & qui retombe ensuite par son propre poids. On a trouvé assés ingénieuse la manière dont la force des Hommes est appliquée, aussi-bien que celle dont agissent deux Étriers de fer, qui engagent & laissent échapper alternativement le Martinet. Le reste a paru conforme à la plûpart des Machines où l'on employe le secours des Hommes. On a crû que cette Machine pourroit être utile dans les endroits où il est absolument impossible de se servir du cours des Rivières, mais non pas pour élever des Eaux, ou faire mouvoir différents Moulins.

II.

Une Machine Arithmétique de M. de Boissendeau, qui a assuré qu'il ne connoissoit point celle de M. Pascal, & qui étoit effectivement assés jeune pour n'en avoir pas encore entendu parler. On a trouvé beaucoup de génie & d'industrie dans l'invention & dans l'exécution. Les mouvements sont simples & doux. Les opérations arithmétiques se font sans qu'il soit besoin de rien écrire, on pourroit même opérer sur toutes sortes de fractions au moyen d'un changement de Rouë aisé à faire sur le champ.

III.

Un Flambeau ou Chandelier présenté par M^{lle} du Château, dont la Bobèche est garnie d'un fond mobile, qui se hausse ou se baisse, en faisant tourner la tige brisée, qui y est adaptée, le tout pour pousser à volonté la Chandelle que l'on y enfonce, soit pour l'en ôter aisément, soit pour la faire brûler jusqu'au bout. Quoique l'on ait déjà appliqué la même Méchanique à des Canifs, & autres Outils pour un semblable usage, ce Chandelier a paru simple, & utile.



E' L O G E

DE M. DE VALINCOURT.

JEAN-BAPTISTE HENRY DU TROUSSET DE VALINCOURT, nâquit le 1 Mars 1653, de Henry du Trouffet, & de Marie du Pré, la famille étoit noble & honorable, originaire de St Quentin en Picardie. Ayant perdu son Pere à l'âge de 6 ou 7 ans, il demeura entre les mains d'une Mere propre à remplir seule tous les devoirs de l'éducation de ses Enfants.

Il ne brilla point dans ses Classes, ce Latin & ce Grec qu'on y apprend n'étoient pour lui que des sons étrangers, dont il chargeoit sa mémoire, puisqu'il le falloit; mais ses humanités finies, s'étant trouvé un jour seul à la Campagne avec un Tércence pour tout amusement, il le lût d'abord avec assés d'indifférence, & ensuite avec un goût, qui lui fit bien sentir ce que c'étoit que les belles Lettres. Il n'avoit point été picqué de cette vanité si naturelle de surpasser ses compagnons d'étude, sans sçavoir à quoi il étoit bon de les surpasser, mais il fut touché de la valeur réelle & solide, jusqu'à la inconnüe, de ce qu'on avoit proposé à leur émulation. Déjà sa raison seule avoit droit de le remüier.

Il répara avec ardeur la nonchalance du temps passé, il se mit à se nourrir avidement de la lecture des bons Auteurs anciens & modernes. Il lui échappa quelques petits ouvrages en Vers, fruits assés ordinaires de la jeunesse de l'Esprit, qui est alors en sa fleur, s'il en doit avoir une. M. de Valincourt ne regardoit pas ses Vers assés sérieusement, pour en faire parade, ni même pour les désavoüer. Il a conservé jusqu'à la fin l'habitude de cette langue, qu'il ne parloit qu'à l'oreille de quelques Amis, & en badinant.

La fameuse Princesse de Cleves ayant paru, ouvrage d'une

espece qui ne peut naître qu'en France, & ne peut même y naître que rarement, M. de Valincourt en donna une Critique en 1678, non pour s'opposer à la juste admiration du Public, mais pour lui apprendre à ne pas admirer jusqu'aux défauts, & pour se donner le plaisir d'entrer dans des discussions fines & délicates. Ce dessein intéressoit le Censeur à faire valoir lui-même, comme il a fait, les beautés, au travers desquelles il avoit sçu démêler les imperfections. Au lieu de la bile ordinaire, il répand dans son discours une gayeté agréable, & peut-être seulement pourroit-on croire qu'il va quelquefois jusqu'au ton de l'Ironie, qui, quoique léger, est moins respectueux pour un Livre d'un si rare mérite, que le ton d'une Critique sérieuse, & bien placée.

On répondit avec autant d'aigreur & d'amertume, que si on avoit eu à défendre une mauvaise cause. M. de Valincourt ne repliqua point. Les honnêtes gens n'aiment point à s'engager dans ces sortes de combats, trop désavantageux pour ceux qui ont les mains liées par de bonnes mœurs, & par les bien-séances, & le Public lui-même, malgré sa malignité, se lasse bien-tôt de ce spectacle. Après avoir vu une ou deux Joutes, il laisse les deux Champions se battre sur l'Arène sans témoins.

Un homme de mérite n'est pas destiné à n'être qu'un Critique, même excellent, c'est-à-dire, habile seulement à relever des défauts dans les productions d'autrui, impuissant à produire de lui-même. Aussi M. de Valincourt se tournant-il bien vite d'un autre côté plus convenable à ses talents, & à son caractère. Il donna en 1681, la *Vie de François de Lorraine Duc de Guise*, petit morceau d'Histoire, qui remplit tout ce qu'on demande à un bon Historien, des recherches qui, quoique faites avec beaucoup de soin, & prises quelquefois dans des sources éloignées, ne passent point les bornes d'une raisonnable curiosité, une narration bien suivie, & animée, qui conduit naturellement le Lecteur, & l'intéresse toujours, un stile noble & simple, qui tire ses ornements du fond des choses, ou les tire d'ailleurs bien fixement,

nulle partialité pour le Héros, qui pouvoit cependant inspirer de la passion à son Ecrivain.

Un Avertissement de l'Imprimeur à la tête de ce petit Livre annonce d'autres ouvrages du même genre, & sans doute de la même main, mais M. de Valincourt n'eut pas le loisir de les finir, l'illustre Evêque de Meaux, qui ordinairement fournissoit aux Princes les gens de mérite dans les Lettres, dont ils avoient besoin, le fit entrer en 1685 chés M. le Comte de Toulouse, Amiral de France. Ce ne fut encore qu'en qualité de Gentilhomme attaché à sa suite, mais quelque temps après le Secrétariat général de la Marine étant venu à vaquer, il fut donné à M. de Valincourt. Le Prince le fit aussi Secrétaire de ses Commandements, & quand S. A. S. eut le Gouvernement de Bretagne, ce fut encore un nouveau fond de travail pour le Secrétaire, dont les occupations se multiplioient à proportion des dignités de son Maître. Ses anciennes études l'avoient préparé, sans qu'il y pensât, à des fonctions si importantes, les nouvelles connoissances dont il eut besoin entrèrent plus aisément, & se placèrent mieux dans un esprit, où elles en trouvoient déjà d'autres, qu'elles n'eussent fait dans un esprit entièrement vuide.

Lorsqu'en 1704, M. l'Amiral gagna la Bataille de Malaga contre les Flottes Angloise & Hollandoise jointes ensemble, M. de Valincourt, qui n'étoit point Officier de Marine, & ne prétendoit nullement aux récompenses militaires, fut toujours à ses côtés, jusqu'à ce qu'il eut reçu une blessure à la jambe de l'éclat d'un coup de Canon, qui tua un Page. Cet attachement si fidelle, porté jusqu'aux occasions où il étoit si périlleux, & en même temps tout-à-fait inutile, avoit pour objet un Maître, qui sçavoit se faire aimer, & dont la justice & la droiture feroient un mérite & un nom à un homme du commun. Aussi M. de Valincourt a-t-il été honoré de la même confiance & des mêmes bontés sans interruption, sans trouble, sans essuyer aucun orage de Cour, sans en craindre, & cela pendant 45 ans. Cependant il n'étoit

point flateur, un Prince du même Sang lui rend hautement ce témoignage. Il est vrai qu'il avoit un art de dire la vérité, mais enfin il osoit la dire, & l'adresse ne servoit qu'à rendre le courage utile. Peu à peu la nécessité d'employer cette adresse diminüe, & les droits de l'homme de bien se fortifient toujours.

Tout le temps, que les emplois de M. de Valincourt lui laissoient libre, étoit donné à des études de son goût, & principalement à celles qui avoient rapport à ses emplois, car son devoir déterminoit assés son goût. La Marine tient à la Phisique, & encore plus essentiellement aux Mathématiques, & il ne manqua pas d'ajouter aux belles Lettres, qui avoient été sa première passion, ces Sciences plus élevées & plus abstraites. Ainsi il se trouva en état de remplir dignement une place d'Honoraire, à laquelle l'Académie le nomma en 1721. Il étoit de l'Académie Françoisè dès 1699. Je l'ai vû dans l'une & dans l'autre, j'ai été témoin de sa conduite, & de ses sentiments. Il ne croyoit pas que ce fût assés de voir son nom écrit dans les deux Listes, qu'il en retireroit toujours, sans y rien mettre du sien, l'honneur qui lui en pouvoit revenir, que tout le reste lui devoit être indifférent, & que des titres, qui par eux-mêmes laissent une grande liberté, laissent jusqu'à celle de ne prendre part à rien. Il avoit pour ces Compagnies une affection sincere, une vivacité peu commune pour leurs intérêts, & en effet une Académie est une espece de Patrie nouvelle, que l'on est d'autant plus obligé d'aimer qu'on l'a choisie, mais il faut convenir que ces obligations délicates ne sont pas pour tout le monde.

Il avoit travaillé toute sa vie à se faire dans une Maison de campagne qu'il avoit à St Cloud, & où il se retiroit souvent, une Bibliothèque choisie. Elle montoit à 6 ou 7000 Volumes, lorsqu'elle fut entièrement consumée, il y a près de 5 ans, par le feu qui prit à la Maison, ses Recueils, fruits de toutes ses lectures, des Mémoires importants sur la Marine, des Ouvrages, ou ébauchés ou finis, tout périt en même temps, & il en fut le spectateur. La Philosophie, qui auroit
été

été plus rigide sur une perte de biens, lui permettoit d'être sensiblement affligé de celle d'un Trésor amassé par elle-même, & où elle se complaisoit, mais son courage ne se démentit point, *je n'aurois guère profité de mes Livres*, disoit-il, *si je ne sçavois pas les perdre*. Il étoit encore soutenu par une Philosophie bien supérieure, par la Religion, dont il fut toujours vivement pénétré.

Vers la fin de sa vie il fut de temps en temps attaqué de diverses maladies, qui le mirent encore à de plus grandes épreuves. Enfin il mourut le 4 Janv. 1730, âgé de 77 ans.

On s'appercevoit aisément dans son commerce ordinaire qu'il étoit plein de bonnes lectures. Il en ornoit volontiers sa conversation & ses lettres, mais à propos, avec nouveauté, avec grace, conditions nécessaires, & peu observées. Un certain sel qu'il avoit dans l'esprit l'eût rendu fort propre à la raillerie, mais il s'est toujours défendu courageusement l'usage d'un talent dangereux pour qui le possède, injuste à l'égard des autres.

Il a été ami particulier de la plupart de ceux qui ont brillé dans les Lettres, principalement de M^{rs} Racine & Despreaux; & par cette raison il fut choisi après la mort de M. Racine pour être associé à M. Despreaux dans le travail ou le dessein de l'Histoire du feu Roi. Apparemment sa liaison avec ce grand Satirique lui fit adopter quelques-uns de ses jugemens; tels que celui qu'il portoit contre le premier de nos Poètes Liriques, jugement insoutenable sur le Parnasse, & recevable seulement dans un Tribunal infiniment plus respectable, où le Satirique lui-même n'eût pas d'ailleurs trouvé son compte. Cependant M. de Valincourt ne se laissa point emporter à l'excessive chaleur que mirent ses Amis dans des disputes littéraires, qui ont fait assés de bruit. Il continua de vivre en amitié avec ceux qui refusoient l'adoration aux Anciens, il négocia même des reconciliations, & donna des exemples rares de modération & d'équité, quoique dans une bagatelle.

Mais il n'a pas eu seulement des amis dans les Lettres, il en a eu dans les premières places de l'Etat, non pas simplement

comme un homme d'esprit dont la conversation peut délasser, mais comme un homme d'un grand sens, à qui on peut parler d'affaires. Il ne s'est jamais fait valoir de ces commerces si flatteurs & si dangereux pour la vanité, il les cachoit autant qu'il étoit possible, & ce qu'il cachoit encore avec plus de soin, c'est l'usage qu'il en a fait toutes les fois que la justice ou le mérite ont eu besoin de son crédit.

Il n'étoit point marié, & jouïssoit d'un revenu considérable. Sa famille publie hautement sa générosité pour elle, & ses bienfaits toujours prévenants, mais elle crandroit d'offenser sa vertu, & d'aller contre ses intentions, si elle révéloit ce qu'il a fait d'ailleurs par des motifs plus élevés.





E L O G E

DE M. DU VERNEY.

GUICHARD-JOSEPH DU VERNEY nâquit à Feurs en Forez le 5 Août 1648 de Jacques du Verney Médecin de la même Ville, & d'Antoinette Pittre. Ses Classes faites il étudia en Médecine à Avignon pendant 5 ans, & en partit en 1667 pour venir à Paris, où il se sentoît appelé par ses talents.

A peine arrivé dans cette grande Ville, il alla chés le fameux Abbé Bourdelot, qui tenoit des Conférences de Gens de Lettres de toutes les especes. Il leur fit une Anatomie du Cerveau, & d'autres ensuite chés M. Denys sçavant Médecin, où l'on s'assembloit aussi. Il démonstroît ce qui avoit été découvert par Sténon, Swammerdam, Graaf, & les autres grands Anatomistes, & il eut bien-tôt une réputation.

Outre ses connoissances déjà grandes & rares par rapport à son âge, ce qui contribua beaucoup à le mettre promptement en vogue, ce fut l'éloquence avec laquelle il parloit sur ces matières. Cette éloquence n'étoit pas seulement de la clarté, de la justesse, de l'ordre, toutes les perfections froides que demandent les sujets dogmatiques, c'étoit un feu dans les expressions, dans les tours, & jusque dans la prononciation, qui auroit presque suffi à un Orateur. Il n'eût pas pû annoncer indifféremment la découverte d'un Vaisseau, ou un nouvel usage d'une partie, ses yeux en brilloient de joye, & toute sa personne s'animoit. Cette chaleur ou se communique aux Auditeurs, ou du moins les préserve d'une langueur involontaire, qui auroit pû les gagner. On peut ajouter qu'il étoit jeune, & d'une figure assés agréable. Ces petites circonstances n'auront lieu, si l'on yeut, qu'à l'égard d'un

certain nombre de Dames, qui furent elles-mêmes curieuses de l'entendre.

A mesure qu'il parvenoit à être plus à la mode, il y mettoit l'Anatomie, qui renfermée jusque-là dans les Ecoles de Médecine, ou à St Cosme, osa se produire dans le beau monde, présentée de sa main. Je me souviens d'avoir vû des gens de ce monde là, qui portoient sur eux des pièces sèches préparées par lui, pour avoir le plaisir de les montrer dans les Compagnies, sur-tout celles qui appartennoient aux sujets les plus intéressants. Les Sciences ne demandent pas à conquérir l'Univers, elles ne le peuvent, ni ne le doivent, elles sont à leur plus haut point de gloire, quand ceux qui ne s'y attachent pas les connoissent assez pour en sentir le prix, & l'importance.

Il entra en 1676 dans l'Académie, qui ne comptoit encore que 10 années depuis son établissement. On crut réparer par lui la perte que la Compagnie avoit faite de M^{rs} Gayent & Pecquet, tous deux habiles Anatomistes, mais le dernier plus fameux par la découverte du Réservoir du Chile, & du Canal Thorachique. Du caractère dont étoit M. du Verney il n'avoit pas besoin de grands motifs pour prendre beaucoup d'ardeur. Il se mit à travailler à l'Histoire Naturelle des Animaux, qui faisoient alors une partie des occupations de l'Académie, & il tient beaucoup de place dans l'Histoire Latine de M. du Hamel.

Quand ceux qui étoient chargés de l'éducation de M. le Dauphin, ayeul du Roi, songerent à lui donner des connoissances de Physique, on fit l'honneur à l'Académie de tirer de son corps ceux qui auroient cette fonction, & ce furent M. Roëmer pour les Expériences générales, & M. du Verney pour l'Anatomie. Celui-ci préparoit les parties à Paris, & les transportoit à St Germain, ou à Versailles. Là il trouvoit un Auditoire redoutable, le Dauphin environné de M. le Duc de Montausier, de M. l'Evêque de Meaux, de M. Huet depuis Evêque d'Avranches, de M. de Cordemoi, qui tous, en ne comptant pour rien les titres, quoiqu'ils

faisent toûjours leur impression, étoient fort sçavants, & fort capables de juger même de ce qui leur eût été nouveau. Les démonstrations d'Anatomie réussirent si bien auprès du jeune Prince, qu'il offrit quelquefois de ne point aller à la Chasse, si on les lui pouvoit continuer après son dîner.

Ce qui avoit été fait chés lui se recommençoit chés M. de Meaux avec plus d'étendue & de détail. Il s'y assembloit de nouveaux Auditeurs, tels que M. le Duc de Chevreuse, le P. de la Chaîse, M. Dodart, tous ceux que leur goût y attiroit, & qui se sentoient dignes d'y paroître. M. du Verney fut de cette sorte pendant près d'un an l'Anatomiste des Courtisans, connu de tous, & presque ami de ceux qui avoient le plus de mérite. Ses succès de Paris l'avoient porté à la Cour, & il en revint à Paris avec ce je ne sçai quoi de plus brillant que donnent les succès de la Cour.

Les fatigues de son métier, très-pénible par lui-même, & plus pénible pour lui que pour tout autre, lui causèrent un mal de Poitrine si violent, qu'on lui crut un Ulcere au Poumon. Il en revint cependant, bien résolu à se ménager davantage à l'avenir, mais comment executer cette résolution? Comment résister à mille choses qui s'offroient, & qui forçoient ses regards, & ses recherches à se tourner de leur côté? Comment leur refuser ses nuits, même après les jours entiers? Souvent l'Anatomie ne souffre pas de délais, mais quand elle en eût souffert, en pouvoit-il prendre?

En 1679 il fut nommé Professeur d'Anatomie au Jardin Royal, & il alla en basse Bretagne pour y faire des dissections de Poissons, envoyé dans cette vûe avec M. de la Hire, qui devoit avoir d'autres occupations. Ils furent envoyés tous deux l'année suivante sur la Côte de Bayonne pour les mêmes desseins. Il entra dans une Anatomie toute nouvelle, mais il ne put qu'ébaucher la matière, & depuis son retour la seule structure des Oüies de la Carpe lui coûta plus de temps que tous les Poissons qu'il avoit étudiés dans ses deux voyages.

Il mit les exercices Anatomiques du Jardin Royal sur un

piec où ils n'avoient pas encore été. On vit avec étonnement la foule d'Ecoliers, qui s'y rendoit, & on compta en une année jusqu'à 140 Etrangers. Plusieurs d'entre eux retournés dans leurs Pays, ont été de grands Médecins, de grands Chirurgiens, & ils ont semé dans toute l'Europe le nom & les loüanges de leur Maître. Sans doute ils ont souvent fait valoir son autorité, & se sont servis du fameux, *il l'a dit*. Nous avons rapporté dans l'Eloge de M. Lémery* qu'il faisoit ici en même temps des Cours de Chimie avec le même éclat. Une Nation, qui auroit pris sur les autres une certaine supériorité dans les Sciences, s'appercevroit bientôt que cette gloire ne seroit pas stérile, & qu'il lui en reviendrait des avantages aussi réels, que d'une marchandise nécessaire & précieuse, dont elle seroit seule le commerce.

Il publia en 1683 son *Traité de l'Organe de l'Oüie*, qui fut traduit en Latin dès l'année suivante, & imprimé à Nuremberg. Cette traduction a été insérée dans la Bibliothèque Anatomique de Manget. On sera surpris que ce soit là le seul Livre qu'ait donné M. du Verney, vû le long-temps qu'il a vécu depuis, mais quand on le connoîtra bien, on sera surpris au contraire qu'il l'ait donné. Jamais il ne se contentoit pleinement sur un sujet, & ceux qui ont quelque idée de la Nature le lui pardonneront. Il faisoit d'une partie qu'il examinoit toutes les Coupes différentes qu'il pouvoit imaginer pour la voir de tous les sens, il employoit toutes les Injections, & cela demande déjà un temps infini, ne fût-ce qu'en tentatives inutiles. Mais il arrivoit ce qui arrive presque toujours des discussions poussées dans un grand détail, elles ne levent guere une difficulté sans en faire naître une autre, cette nouvelle difficulté, qu'on veut suivre, produit aussi sa difficulté incidente, & on se trouve engagé dans un Labyrinthe. De plus un premier travail, qui auroit voulu être continué, est interrompu par un autre, que quelques circonstances, ou, si l'on veut, la simple curiosité rendent indispensable. Une connoissance acquise comme par hasard aura une espece d'effet rétroactif, qui détruira ou modifiera

* V. l'Hist.
de 1715.
p. 74. & 75.

beaucoup de connoissances précédentes qu'on croyoit absolument sûres. Ajoutés à ce fond d'embarras, que produit la nature de l'Anatomie, une peur de se méprendre, une frayeur des jugemens du Public, qui ne peut guere être excessive, & l'on concevra sans peine qu'un très-habile Anatomiste peut n'avoir pas imprimé. Il faut pourtant avouer qu'un trop grand amour de la perfection, ou une trop grande délicatesse de gloire, feront perdre au Public une infinité de vûes & d'idées, qui pour être d'une certaine utilité n'auroient pas eû besoin d'une entière certitude ou d'une précision parfaite.

M. du Verney fut assés long-temps le seul Anatomiste de l'Académie, & ce ne fut qu'en 1684 qu'on lui joignit M. Méry *. Ils n'avoient rien de commun qu'une extrême passion pour la même Science & beaucoup de capacité; du reste presque entièrement opposés, sur-tout à l'égard des talents extérieurs. Si l'on pouvoit quelquefois craindre que par le Don de la parole M. du Verney n'eût la facilité de tourner les faits selon ses idées, on étoit sûr que M. Méry ne pouvoit que se renfermer dans une sévère exactitude des faits, & que l'un eût tenu en respect l'éloquence de l'autre. Le grand avantage des Compagnies résulte de cet Equilibre des caractères. On remarqua que M. du Verney prit un nouveau feu par cette espece de rivalité. Elle n'éclata jamais davantage que dans la fameuse question de la Circulation du sang du Fœtus, dont nous avons tant parlé. Elle le conduisit à examiner d'autres sujets qui pouvoient y avoir rapport, la Circulation dans les Amphibies, tels que la Grenouille, car le Fœtus qui vit d'abord sans respirer l'air, & ensuite en le respirant, est une espece d'Amphibie; ceux-là le conduisoient à d'autres animaux approchans sans être Amphibies, comme le Crapaud, & enfin aux Insectes, qui font un Genre à part, & offrent un spectacle tout nouveau.

Aussi excelloit-il dans l'Anatomie comparée, qui est l'Anatomie prise le plus en grand qu'il soit possible, & dans une étendue où peu de gens la peuvent embrasser. Il est vrai que pour nous & pour nos besoins la structure du Corps humain

* V. l'Hist.
de 1722.
P. 130.

paroîtroit suffire, mais on le connoît mieux, quand on connoît aussi toutes les autres Machines faites à peu près sur le même dessein. Après celles-là il s'en présente d'autres d'un dessein fort différent, il y aura moins d'utilité à les étudier à cause de la grande différence, mais par cette raison là même la curiosité sera plus picquée, & la curiosité n'a-t-elle pas ses besoins ?

Dans les premiers temps de ses exercices du Jardin Royal il faisoit & les démonstrations des parties qu'il avoit préparées, & les discours qui expliquoient les usages, les maladies, les cures, & résolvoient les difficultés. Mais la foiblesse de poitrine, qui se faisoit toujours sentir, ne lui permit pas de conserver les deux fonctions à la fois. Un habile Chirurgien choisi par lui faisoit sous lui les démonstrations, & il ne lui restoit plus que les discours, dans lesquels il avoit de la peine à se renfermer. C'est lui qui a le premier enseigné en ce lieu là l'Ostéologie, & les maladies des Os.

De son Cabinet, où il avoit étudié des Cadavres & des Squelètes, il alloit dans les Hôpitaux de Paris, où il étudioit ceux dont les maux avoient rapport à l'Anatomie. Si la Machine du Corps disséquée & démontrée présente encore tant d'Enigmes très-difficiles & très-obscurcs, à plus forte raison la Machine vivante, où tout est sans comparaison moins exposé à la vûë, plus enveloppé, plus équivoque. C'étoit-là qu'il appliquoit sa Théorie aux faits, & qu'il apprenoit même ce que la seule Théorie ne lui eût pas appris. En même temps il étoit d'un grand secours, & aux Malades, & à ceux qui en étoient chargés. Quoiqu'il fût Docteur en Médecine, il évitoit de s'engager dans aucune pratique de Médecine ordinaire, quelque honorable, quelque utile qu'elle pût être, il prévoyoit qu'un cas rare de Chirurgie, une opération singulière, lui auroit causé une distraction indispensable, & il s'acquittoit assés envers le Public de son devoir de Médecin, non-seulement par les instructions générales qu'il donnoit sur toute l'Anatomie, mais par l'utilité dont il étoit dans les occasions particulières.

Loin

Loin d'avoir rien à se reprocher sur cet article, il ne se reprochoit que d'être trop occupé de sa profession. Il craignoit que la Religion, dont il avoit un sentiment très-vif, ne lui permît pas un si violent attachement, qui s'emparoit de toutes ses pensées, & de tout son temps. L'Auteur de la Nature, qu'il admiroit & reveroit sans cesse dans ses Ouvrages si bien connus de lui, ne lui paroissoit pas suffisamment honoré par ce culte sçavant, toujours cependant accompagné du culte ordinaire le plus régulier. L'âge qui s'avançoit, les infirmités qui augmentoient, contribuoient peut-être à ce scrupule, sans lui donner pourtant le pouvoir de s'y livrer entièrement.

Les mêmes raisons l'empêcherent pendant plusieurs années de paroître à l'Académie. Il demanda à être Vétéran, & sa place fut remplie par M. Petit Docteur en Médecine. Il paroissoit avoir oublié l'Académie, lorsque tout d'un coup il se réveilla à l'occasion de la réimpression de l'Histoire Naturelle des Animaux, à laquelle il avoit eu anciennement beaucoup de part. Il reprit à 80 ans des forces, de la jeunesse pour revenir dans nos Assemblées, où il parla avec toute la vivacité qu'on lui avoit connue, & qu'on n'attendoit plus. Une grande passion est une espèce d'Ame, immortelle à sa manière, & presque indépendante des Organes.

Il ne perdoit aucun des intervalles que lui laissoient des souffrances, qui redoubloient toujours, & qui le mirent plusieurs fois au bord du tombeau. Il revoyoit avec M. Vinslou son Traité de l'Oreille dont il vouloit donner une 2^{de} Edition, qui se seroit bien sentie des acquisitions postérieures. Il avoit entrepris un Ouvrage sur les Insectes, qui l'obligeoit à des soins très-pénibles; malgré son grand âge, par exemple, il passoit des nuits dans les endroits les plus humides du Jardin, couché sur le ventre sans oser faire aucun mouvement, pour découvrir les allures, la conduite des Limaçons, qui semblent en vouloir faire un secret impénétrable. Sa santé en souffroit, mais il auroit encore plus souffert de rien négliger. Il mourut le 10 Sept. 1730, âgé de 82 ans.

Hist. 1730.

. R

Il étoit en commerce avec les plus grands Anatomistes de son temps, Malpighi, Ruysch, Pitcarne, Bidloo, Boerhave. J'ai vû les Lettres qu'il en avoit reçues, & je ne puis m'empêcher d'en traduire ici une de Pitcarne écrite en Latin, datée de l'an 1712, à cause de son caractère singulier.

Très-illustre du Verney, voici ce que t'écrit un homme qui te doit beaucoup, & qui te rend graces de ces discours divins, qu'il a entendus de toi à Paris il y a 30 ans. Je te recommande Thomson mon ami, & E'cossois. Je t'envoyerai bien-tôt mes Dissertations où je résoudrai ce Problème, Une Maladie étant donnée trouver le Remède. A E'dimbourg, &c. Celui qui s'élevoit à de pareils Problèmes, & dont effectivement le nom est devenu si célèbre, se faisoit honneur de se reconnoître pour Disciple de M. du Verney. On voit de plus par des Lettres de 1698 que lui qui auroit pû instruire parfaitement dans l'Anatomie un frere qu'il avoit, il l'envoyoit d'Angleterre à Paris, pour y étudier sous le plus grand Maître.

En général il paroît par toutes ces Lettres que la réputation de M. du Verney étoit très-brillante chés les E'trangers, non-seulement par la haute idée qu'ils remportoient de sa capacité, mais par la reconnoissance qu'ils lui devoient de ses manières obligeantes, de l'intérêt qu'il prenoit à leurs progrès, de l'affection dont il animoit ses Leçons. Ceux qui lui adressoient de nouveaux Disciples, ne lui demandoient pour eux que ce qu'ils avoient éprouvé eux-mêmes. Ils disent tous que son Traité de l'Oüie leur a donné une envie extrême de voir les Traités des quatre autres Sens qu'il avoit promis dans celui-là, ils l'exhortent souvent à faire part à tout le Public de ses richesses, qu'il ne peut plus tenir cachées après les avoir laissé appercevoir dans ses Discours du Jardin Royal, ils le menacent du péril de se les voir enlever par des gens peu scrupuleux, & on lui cite même un exemple où l'on croit le cas déjà arrivé, mais il a toujours été ou peu sensible à ce malheur, ou trop irrésolu à force de sçavoir.

On lui donne assés souvent dans ces Lettres une première

place entre tous les Anatomistes. Il est vrai que dans ce qu'on écrit à un homme illustre, il y entre d'ordinaire du compliment, on peut mettre à un haut rang celui qui n'est pas à un rang fort haut, mais on n'ose pas mettre au premier rang celui qui n'y est pas ; la louange est trop déterminée, & on ne pourroit sauver l'honneur de son jugement.

Il est du devoir de l'Académie de publier un bien-fait qu'elle a reçu de lui. Il lui a légué par son Testament toutes ses préparations Anatomiques, qui sont & en grand nombre, & de la perfection qu'on peut imaginer. Cela joint à tous les Squelètes d'Animaux rares, que la Compagnie a depuis long-temps dans une Salle du Jardin Royal, composera un grand Cabinet d'Anatomie, moins estimable encore par la curiosité, que par l'utilité dont il sera dans les recherches de ce genre.





E' L O G E

DE M. LE COMTE MARSIGLI.

LOÛIS FERDINAND MARSIGLI nâquit à Bologne le 10 Juillet 1658 du Comte Charles François Marsigli, issu d'une ancienne Maison Patricienne de Bologne, & de la Comtesse Marguerite Cicolani. Il fut élevé par ses parents selon qu'il convenoit à sa naissance, mais il se donna à lui-même, quant aux Lettres, une éducation bien supérieure à celle que sa naissance demandoit. Il alla dès sa première jeunesse chercher tous les plus illustres Sçavants d'Italie, il apprit les Mathématiques de Geminiano Montanari, & d'Alphonse Borelli, l'Anatomie de Marcel Malpighi, l'Histoire Naturelle des observations que son génie lui fournissoit dans ses voyages.

Mais ils eussent été trop bornés, s'ils se fussent renfermés dans l'Italie. Il alla à Constantinople en 1679 avec le Bayle que Venise y envoyoit. Comme il se destinoit à la Guerre, il s'informa, mais avec toute l'adresse, & les précautions nécessaires, de l'état des Forces Ottomanes, & en même temps il examina en Philosophe le Bosphore de Thrace, & ses fameux Courants. Il écrivit sur l'un & l'autre de ces deux sujets. Le Traité du Bosphore parut à Rome en 1681 dédié à la Reine Christine de Suede, & c'est le premier qu'on ait de lui. L'autre intitulé *Del incremento e decremento dell' Imperio Ottomano* doit paroître présentement imprimé à Amsterdam avec une traduction Françoisse.

Il revint de Constantinople dès l'an 1680, & peu de temps après, lorsque les Turcs menaçoient d'une irruption en Hongrie, il alla à Vienne offrir ses services à l'Empereur Leopold,

qui les accepta. Il lui fut aisé de prouver combien il étoit au dessus d'un simple Soldat par son intelligence dans les Fortifications, & dans toute la Science de la Guerre, il fit avec une grande approbation des Généraux des Lignes & des travaux sur le Rab pour arrêter les Turcs, & il en fut récompensé par une Compagnie d'Infanterie en 1683, quand les Ennemis parurent pour passer cette Rivière. Ce fut là qu'après une action assés vive, il tomba blessé & presque mourant entre les mains des Tartares, le 2 Juillet, jour de la Visitation; ce n'est pas sans raison que nous ajoutons le nom de cette Fête à la date du jour. Il a fait de sa captivité une Relation, où il a bien senti que l'art n'étoit point nécessaire pour la rendre touchante. Le Sabre toujours levé sur sa tête, la mort toujours présente à ses yeux, des traitements plus que barbares, qui étoient une mort de tous les moments, feront frémir les plus impitoyables, & l'on aura seulement de la peine à concevoir comment sa jeunesse, sa bonne constitution, son courage, la résignation la plus Chrétienne, ont pû résister à une si affreuse situation. Il se crut heureux d'être acheté par deux Turcs, freres, & très-pauvres, avec qui il souffrit encore beaucoup, mais plus par leur misere que par leur cruauté, il comptoit qu'ils lui avoient sauvé la vie. Ces maîtres si doux le faisoient enchaîner toutes les nuits à un Pieu planté au milieu de leur chétive cabane, & un troisième Turc, qui vivoit avec eux, étoit chargé de ce soin.

Enfin, car nous supprimons beaucoup de détails, quoiqu'intéressants, il trouva moyen de donner de ses nouvelles en Italie, & de se faire racheter, & le jour de sa liberté fut le 25 Mars 1684, jour de l'Annonciation. Ses réflexions sur ces deux dates de sa captivité & de sa délivrance font la plus remarquable partie de son Eloge, puisqu'elles découvrent en lui un grand fonds de piété. Il conçut, & ce sont ici ses paroles, que dans deux jours où l'auguste Protectrice des Fidelles est particulièrement honorée, elle lui avoit obtenu deux graces du Ciel, l'une consistoit à le punir salutairement

de les fautes passées, l'autre à faire cesser la punition.

Remis en liberté, il alla à Bologne se montrer à ses Concitoyens, qui avoient pleuré sa mort, & qui versèrent d'autres larmes en le revoyant, & après avoir jouï de toutes les douceurs d'une pareille situation, il retourna à Vienne se présenter à l'Empereur, & reprendre ses emplois militaires. Il fut chargé de fortifier Strigonie, & quelques autres Places, & d'ordonner les travaux nécessaires pour le Siège de Bude, que méditoient les Impériaux. Il eut part à la construction d'un Pont sur le Danube, ce qui lui donna occasion d'observer les ruines d'un ancien Pont de Trajan sur ce même Fleuve. Il fut fait Colonel en 1689.

En cette même année l'Empereur l'envoya deux fois à Rome pour faire part aux Papes Innocent XI & Alexandre VIII des grands succès des armes Chrétiennes, & des projets formés pour la suite.

Lorsqu'après une longue guerre, funeste aux Chrétiens mêmes, qui en remportoient l'avantage, l'Empereur & la République de Venise d'une part, & de l'autre la Porte, vinrent à songer à la Paix, & qu'il fut question d'établir les Limites entre les Etats de ces trois Puissances, le Comte Marfigli fut employé par l'Empereur dans une affaire si importante, & comme un homme de guerre qui connoissoit ce qui fait une bonne Frontière, & comme un Sçavant bien instruit des anciennes possessions, & comme un habile Négociateur, qui sçauroit faire valoir des droits. Se trouvant sur les confins de la Dalmatie Vénitienne, il reconnut à quelque distance de-là une Montagne, au pied de laquelle habitoient les deux Turcs, dont il avoit été Esclave. Il fit demander dans le pays Turc s'ils vivoient encore, & heureusement pour lui ils se retrouvèrent. Il eut le plaisir de se faire voir à eux environné de Troupes qui lui obéissoient, ou le respectoient, & le plaisir encore plus sensible de soulager leur extrême misère, & de les combler de présents. Il crut leur devoir encore sa rançon, parce que l'argent qu'ils en avoient

reçu leur avoit été enlevé par le Commandant Turc sous ce prétexte extravagant que leur Esclave étoit un fils ou un proche parent du Roi de Pologne, qu'ils auroient dû envoyer au Grand Seigneur. Il fit encore plus pour eux, persuadé presque que c'étoient des Libérateurs généreux, qui pour son seul intérêt l'avoient tiré des mains des Tartares. L'emploi qu'il avoit pour régler les Limites le mettant à portée d'écrire au grand Visir, il lui demanda pour l'un de ses deux Turcs un Timariot, benefice militaire, & en obtint un beaucoup plus considérable que celui qu'il demandoit. Sa générosité fut sentie par ce Visir, comme on auroit pû souhaiter qu'elle le fût par le premier Ministre de la Nation la plus polie, & la plus exercée à la vertu.

Les différentes opérations d'une Guerre très-vive, suivies de toutes celles qui furent nécessaires par un reglement de Limites, doivent suffire pour occuper un homme tout entier. Cependant au milieu de tant de tumulte, d'agitation, de fatigues, de périls, M. Marsigli fit presque tout ce qu'auroit pû faire un Sçavant, qui auroit voyagé tranquillement pour acquérir des connoissances. Les armes à la main, il levoit des Plans, déterminoit des positions par les méthodes Astronomiques, mesuroit la vitesse des Rivières, étudioit les Fossiles de chaque Pays, les Mines, les Métaux, les Oiseaux, les Poissons, tout ce qui pouvoit mériter les regards d'un homme qui sçait où il les faut porter. Il alloit jusqu'à faire des Epreuves Chimiques, & des Anatomies. Le temps bien ménagé est beaucoup plus long que n'imaginent ceux qui ne sçavent guere que le perdre. Le métier de la Guerre a des vuides fréquents, & quelquefois considérables, abandonnés ou à une oisiveté entière, ou à des plaisirs qu'on se rend témoignage d'avoir bien mérités. Ces vuides n'en étoient point pour le Comte Marsigli, il les donnoit à un métier presque aussi noble, à celui de Philosophe & d'Observateur, il les remplissoit comme auroit fait Xénophon. Il amassa un grand Recüeil, non-seulement d'Ecrits, de Plans, de Cartes,

136 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE
mais encore de curiosités d'Histoire Naturelle.

La succession d'Espagne ayant rallumé en 1701 une Guerre qui embrasa l'Europe, l'importante Place de Brisac se rendit par capitulation à feu M^r le Duc de Bourgogne le 6 Septembre 1703, après 13 jours de Tranchée ouverte. Le Comte d'Arco y commandoit, & sous lui M. Marfigli, parvenu alors au grade de Général de Bataille. L'Empereur, persuadé que Brisac avoit été en état de se défendre, & qu'une si prompte capitulation s'étoit faite contre les regles, nomma des Juges pour connoître de cette grande affaire. Ils prononcèrent le 4 Fév. 1704 une Sentence par laquelle le Comte d'Arco étoit condamné à avoir la tête tranchée, ce qui fut executé le 18 du même mois, & le Comte Marfigli *à être déposé de tous honneurs & charges, avec la rupture de l'Epee.* Un coup si terrible lui dut faire regretter l'esclavage chés les Tartares.

Il est presque impossible que de pareils coups fassent la même impression sur le coupable, & sur l'innocent; l'un est terrassé malgré lui-même par le témoignage de sa conscience, l'autre en est soutenu & relevé. Il alla à Vienne pour se jeter aux pieds de l'Empereur, & lui demander la révision du procès, mais il ne put en huit mois approcher de S. M. I. Grace en effet très-difficile à obtenir du Prince le plus juste, à cause des conséquences, ou dangereuses, ou tout au moins defagréables. Il eut donc recours au Public, & remplit l'Europe d'un grand Mémoire imprimé pour sa justification. Par bonheur pour lui un Anonime, & ce ne fut qu'un Anonime, y répondit, ce qui lui donna lieu de lever jusqu'aux moindres scrupules, que son Apologie auroit pû laisser. Le fond en est que long-temps avant le Siège de Brisac il avoit représenté très-instamment que la Place ne pourroit se défendre, & il le fait voir par les États de la Garnison, des Munitions de guerre, &c. Pièces dont on ne lui a pas contesté la vérité. On lui avoit refusé, sous prétexte d'autres besoins, tout ce qu'il avoit demandé de plus nécessaire & de plus indispensable.

fable. Il n'étoit point le Commandant, & il n'avoit fait que se ranger à l'avis entièrement unanime du Conseil de Guerre. Mais cette grande briéveté, à laquelle nous sommes obligés de réduire ses raisons, lui fait tort, & il vaut mieux nous contenter de dire, que le Public, qui sçait si bien faire entendre son jugement sans le prononcer en forme, ne soufcrivit pas à celui des Commissaires Impériaux. Les Puissances mêmes alliées de l'Empereur, intéressées par conséquent à la conservation de Brisac, reconnurent l'innocence du Comte Marfigli, & la Hollande nommément permit qu'on en rendît témoignage dans des Écrits qui furent publiés. Parmi tous ces suffrages favorables, nous en avons encore un à compter, qui n'est à la vérité que celui d'un particulier, mais ce particulier est M. le Maréchal de Vauban, dont l'autorité auroit pû être opposée, s'il l'eût fallu, à celle de toute l'Europe, comme l'autorité de Caton à celle des Dieux. Sur le fond de toute cette affaire, il parut généralement qu'on avoit voulu au commencement d'une grande Guerre donner un exemple effrayant de sévérité, dont on prévoyoit le besoin dans beaucoup d'autres occasions pareilles; la Morale des États se résout pour de si grands intérêts à hasarder le sacrifice de quelques Particuliers.

M. Marfigli envoya en 1705, toutes ses pièces justificatives à l'Académie, comme à un Corps dont il ne vouloit pas perdre l'estime, & il est remarquable dans la Lettre qu'il lui écrivit, qu'après avoir parlé en peu de mots de sa malheureuse situation, il ne pense plus qu'à des projets d'Ouvrages, & les expose assés au long, principalement l'idée qu'il avoit d'établir le véritable cours de la Ligne de Montagnes, qui commence à la Mer noire, va parallèlement au Danube jusqu'au Mont St Gothard, & continue jusqu'à la Méditerranée.

Dans l'impression de ses Apologies, il met pour Vignette une espece de Devise singulière, qui a rapport à son aventure: C'est une *M*, première lettre de son nom, qui porte de part

& d'autre entre les deux jambes les deux tronçons d'une Epée rompië, avec ces mots, *fractus integro*. Eût-il imaginé, eût-il publié cette représentation affligeante, s'il se fût crû flétri, & n'eût-il pas crû l'être, si la voix publique ne l'eût pleinement rassuré ?

Il chercha sa consolation dans les Sciences, dont il s'étoit ménagé le secours, sans prévoir qu'il lui dût être un jour si nécessaire. Ce qui n'avoit été pour lui qu'un Lieu de plaïssance devint un Asile. Il conserva la pratique d'étudier par les voyages, dont il avoit contracté l'habitude, & c'est réellement la meilleure pour l'Histoire Naturelle, qui étoit son grand objet. Il alla en Suisse, où la Nature se presente sous un aspect si différent de tous les autres, & ce Pays l'intéressoit particulièrement parce qu'il vouloit faire un Traité de la Structure organique de la Terre, & que les Montagnes sont peut-être des especes d'Os de ce grand Corps. Il vint ensuite à Paris, où il ne trouva pas moins de quoi exercer sa curiosité, quoique d'une manière différente ; de-là il parcourut la France, & s'arrêta à Marseille pour étudier la Mer.

Étant un jour sur le Port, il reconnut un Galérien Turc, pour être celui qui l'attachoit toutes les nuits au Pieu, dont nous avons parlé. Ce Malheureux, frappé d'un effroi mortel, se jetta à ses pieds pour implorer sa miséricorde, qui ne devoit consister qu'à ne pas ajouter de nouvelles rigueurs à sa misère présente. M. Marfigli écrivit à M. le Comte de Pontchartrain, pour le prier de demander au Roi la liberté de ce Turc, & elle fut accordée. On le renvoya à Alger, d'où il manda à son Libérateur qu'il avoit obtenu du Bacha des traitements plus doux pour les Esclaves Chrétiens. Il semble que la Fortune imitât un Auteur de Roman, qui auroit ménagé des rencontres imprévûës & singulières, en faveur des vertus de son Héros.

Le Comte Marfigli fut rappelé de Marseille en 1709 ; par les ordres du Pape Clément XI, qui dans les conjonctures d'alors crut avoir besoin de Troupes, & lui en donna

le commandement, tant l'affaire de Brisac lui avoit laissé une réputation entière, car la valeur & la capacité les plus réelles n'auroient pas suffi, il faut toujours dans de semblables choix compter avec l'opinion des hommes. Quand ce commandement fut fini par le changement des conjonctures, le Pape voulut retenir M. Marfigli auprès de lui, par l'offre des emplois militaires les plus importants, dont il disposât, & même; pour n'épargner aucun moyen, par l'offre de la Prélatrice, qui auroit pû le relever si glorieusement, & le porter à un rang si haut; mais il refusa tout pour aller reprendre en Provence les délicieuses recherches qu'il y avoit commencées. Il en envoya à l'Académie en 1710 une assés ample Relation, dont nous avons rendu compte*, & la belle découverte des Fleurs du Corail y est comprise. Cet Ouvrage a été imprimé à Amsterdam en 1715, sous le titre d'*Histoire Physique de la Mer*. Des affaires domestiques le rappellerent à Bologne, & là il commença l'exécution d'un dessein qu'il méditoit depuis long-temps, digne d'un homme accoutûmé au grand pendant tout le cours de sa vie.

Entre toutes les Villes d'Italie, Bologne est célèbre par rapport aux Sciences, & aux Arts. Elle a une ancienne Université pareille aux autres de l'Europe, une Académie de Peinture, de Sculpture, & d'Architecture, nommée *Clementine*, parce qu'elle a été établie par Clément XI, enfin une Académie des Sciences, qui s'appelle l'Académie des *Inquiets*, nom assés convenable aux Philosophes modernes, qui n'étant plus fixés par aucune autorité cherchent & chercheront toujours. Le Comte Marfigli voulut encore orner de ce côté-là sa Patrie, quoique déjà si ornée. Il avoit un fonds très-riche de toutes les différentes Pièces, qui peuvent servir à l'Histoire Naturelle, d'Instrumens nécessaires aux observations Astronomiques, ou aux expériences de Chimie, de Plans pour les Fortifications, de Modèles de Machines, d'Antiquités, d'Armes étrangères, &c. Le tout non-seulement acquis à grands frais, mais transporté encore à plus grands frais de

* V. l'Hist.
de 1710.
p. 23. 48.
& 69.

différents lieux éloignés jusqu'à Bologne, & il en fit une donation au Sénat de cette Ville par un acte authentique du 11 Janv. 1712, en formant un Corps qui eût la garde de tous les fonds donnés, & qui en fit à l'avantage du Public l'usage réglé par les conditions du Contrat. Il nomma ce Corps *l'Institut des Sciences & des Arts de Bologne*. Sans doute il eut des difficultés à vaincre de la part des Compagnies plus anciennes, différents intérêts à concilier ensemble, des caprices mêmes à effuyer, mais il n'en reste plus de traces, & c'est autant de perdu pour sa gloire, à moins qu'on ne lui tienne compte de ce qu'il n'en reste plus de traces. Il subordonna son Institut à l'Université, & le lia aux deux Académies. De cette nouvelle disposition faite avec toute l'habileté requise, & tous les ménagements nécessaires, il en résulte certainement que la Philosophie & les Mathématiques ont aujourd'hui dans Bologne des secours & des avantages considérables qu'elles n'y avoient jamais eûs, & dont le fruit doit se communiquer par une heureuse contagion. Le Sénat donna à l'Institut un Palais, tel que le demandoient les grands fonds reçûs de M. Marfigli, qu'il falloit distribuer en différents Appartements selon les Sciences. Dans ce Palais habitent six Professeurs, chacun dans le quartier de la Science qui lui appartient. On croit voir l'Atlantide du Chancelier Bacon exécutée, le songe d'un Sçavant réalisé. Il sera facile de juger qu'on n'a pas oublié un Observatoire. Il est occupé par M. Eustachio Manfredi, Astronome de l'Institut, si ce n'est pas lui faire tort que de le désigner par cette seule qualité, lui qui allie aux Mathématiques les talents qui leur sont les plus opposés.

L'Institut s'ouvrit en 1714 par une Harangue du P. Hercule Corazzi, Religieux Olivetan, Mathématicien de la nouvelle Compagnie. Le Comte Marfigli, qui n'avoit pas voulu permettre que son nom parût dans aucun Monument public, ne pût échapper aux justes loüanges de l'Orateur. Comment séparer le Fondateur d'avec la Fondation? Les loüanges

refusées sçavent bien revenir avec plus de force, & il est peut-être aussi modeste de leur laisser leur cours naturel, en ne les prenant que pour ce qu'elles valent.

En 1715 l'Académie des Sciences ayant proposé au Roi, selon sa Règle, pour une place vacante d'Associé Etranger, deux Sujets, qui furent M. le Duc d'Escalonne, Grand d'Espagne, & M. Marfigli, le Roi ne voulut point faire de choix entre eux, & il ordonna que tous deux seroient de l'Académie, parce que la première place d'Associé Etranger qui vaqueroit, ne seroit point remplie. N'eût-il pas sans hésiter donné la préférence à un homme du mérite & de la dignité du Duc d'Escalonne, pour peu qu'il fût resté de tache au nom de son Concurrent, & cette tache n'eût-elle pas été de l'espece la plus odieuse aux yeux de ce grand Prince? M. Marfigli étoit aussi de la Société Royale de Londres, & de celle de Montpellier. Ce n'étoit pas un honneur à négliger pour les différentes Académies que de compter parmi leurs membres le Fondateur d'une Académie.

Elle l'occupoit toujours, & il se livroit volontiers à toutes les idées qui lui venoient sur ce sujet, quelques soins, & quelques dépenses qu'elles demandassent. Il mit sur pied une Imprimerie, qui devoit être fournie non-seulement de Caractères Latins & Grecs, mais encore Hébreux & Arabes, & il fit venir de Hollande des Ouvriers habiles pour les fondre. Il eut des raisons pour ne pas donner ce grand fonds à l'Institut directement, mais aux Peres Dominicains de Bologne, à condition que tous les Ouvrages, qui partiroient de l'Institut seroient imprimés en remboursant seulement les frais. Il donna à cette Imprimerie le nom d'Imprimerie de St Thomas d'Aquin, dont il invoquoit la protection pour cet établissement, & pour tout l'Institut. Le Protecteur étoit bien choisi, car St Thomas dans un autre siècle, & dans d'autres circonstances étoit Descartes. Nous passons sous silence des Processions, où il vouloit que l'on portât huit Bannières, qui auroient représenté les principaux événements

de la vie du Saint, & auxquelles on jugea à propos de substituer la Châsse de ses Reliques. La dévotion d'Italie prend assés souvent une forme, qui n'est guere de nôtre goût d'aujourd'hui.

Ce qui en sera certainement davantage, c'est l'établissement qu'il fit d'un Tronc dans la Chapelle de l'Institut pour le rachat des Chrétiens, & principalement de ses Compatriotes esclaves en Turquie. Il n'oublia rien pour animer cette charité; il se souvenoit de ses malheurs utilement pour les autres Malheureux. Par le même souvenir il ordonna une Procession solennelle de l'Institut tous les vingt-cinq ans le jour de l'Annonciation. Ces Fêtes, ces cérémonies fondées sur la piété pouvoient aussi avoir une politique sensée & légitime, elles lioient l'Institut à la Religion, & en assûroient la durée.

Il manquoit encore à la Collection d'Histoire Naturelle; dont l'Institut étoit en possession, quantité de choses des Indes, car ce qui y dominoit c'étoit l'Europe, & il jugea qu'il ne pouvoit avoir promptement ces curiosités qu'en les allant chercher en Angleterre & en Hollande. Il s'embarqua à Livourne pour Londres, quoique dans un âge déjà fort avancé, & il alla de Londres à Amsterdam finir ses sçavantes emplettes. Là il donna à imprimer son grand ouvrage du *Cours du Danube* dont il a paru à la Haye en 1726 une Edition magnifique en 6 vol. in fol. Et il négocia avec les Libraires un nombre de bons Livres destinés à son Institut. Quand toutes ses nouvelles acquisitions furent rassemblées dans Bologne, il en fit la donation en 1727.

Tout cela fini, tous ses projets heureusement terminés; il imita en quelque sorte Solon, qui après avoir été le Législateur de son Pays, & n'ayant plus de bien à lui faire; s'en exila. Il alla en 1728 retrouver sa retraite de Provence, pour y reprendre ses recherches de la Mer, & suivre en liberté ce génie d'observation qui le possédoit. Mais il eut en 1729 une légère attaque d'Apopléxie, & les Médecins le

renvoyèrent dans l'air natal. Il ne fit qu'y languir jusqu'au 1 Nov. 1730. qu'une seconde attaque l'emporta. Tout Bologne fit parfaitement son devoir pour un pareil Citoyen , qui à l'exemple des anciens Romains avoit uni en même degré les Lettres & les Armes, & donné tant de preuves d'un amour singulier pour sa Patrie.



Fautes à corriger dans l'Histoire de 1729.

*P*Age 1. ligne 6. cessé encore, lisés encore peu brillé.
Page 36. l. 5. foliis, lisés petalis. Et Raii, lisés Rei.
Ligne 7. Et, lisés Ou.



MEMOIRES DE MATHEMATIQUE ET

DE PHYSIQUE,
*TIRES DES REGISTRES
de l'Academie Royale des Sciences.*

De l'Année M. DCCXXX.

OBSERVATIONS METEOROLOGIQUES FAITES A AIX

Par M. DE MONTVALON, Conseiller au Parlement d'Aix.

Comparées avec celles qui ont été faites à Paris.

Par M. CASSINI,

Observations sur la quantité de Pluie de l'année 1729.

	A Paris.	A Aix.
EN Janvier	13 lignes $\frac{1}{2}$	10 lignes $\frac{16}{24}$
Février	5 $\frac{4}{6}$	8 $\frac{16}{24}$
Mars.....	8 $\frac{1}{6}$	5 $\frac{1}{24}$
Mem. 1730.		A

A Paris.

A Aix.

En Avril.....	19 lignes $\frac{5}{6}$	24 lignes $\frac{1}{24}$
Mai.....	43 $\frac{5}{6}$	18 $\frac{11}{24}$
Juin.....	8 $\frac{5}{6}$	24 $\frac{1}{2}$
Juillet.....	22 $\frac{1}{6}$	4 $\frac{13}{24}$
Août.....	28 $\frac{3}{6}$	2 $\frac{13}{24}$
Septembre....	20	14 $\frac{9}{24}$
Octobre.....	13 $\frac{3}{6}$	19 $\frac{1}{2}$
Novembre....	8 $\frac{3}{6}$	73 $\frac{2}{3}$
Décembre....	12 $\frac{1}{6}$	13 $\frac{4}{24}$

Somme totale de la Pluie tombée en l'année 1719.
à Paris 204 lign. $\frac{2}{6}$ à Aix... 219 lign. $\frac{1}{6}$
ou 17 pouces $\frac{2}{6}$ ou 18 pouc. 3 lign. $\frac{2}{3}$

En comparant ensemble ces Observations, on trouve que la quantité de Pluie qui est tombée à Aix est plus grande de 15 lignes que celle que l'on a observée à Paris; on voit aussi que cette quantité de Pluie a été distribuée bien inégalement dans chaque mois, puisqu'il en est tombé pendant le mois de Mai à Paris 43 lignes $\frac{5}{6}$, & à Aix 18 lign. $\frac{11}{24}$, au mois d'Août à Paris 28 lignes $\frac{1}{2}$, & à Aix 2 lignes $\frac{1}{2}$, au lieu qu'au mois de Novembre il en est tombé à Paris 8 lign. $\frac{2}{6}$, & à Aix 73 lign. $\frac{2}{3}$.

Il paroît aussi que quoique la quantité de Pluie ait été en 1729 de même qu'en 1728 plus grande à Aix qu'à Paris, elle n'a pas gardé la même proportion que l'année précédente, où il a plu à Aix 24 pouces 9 lignes $\frac{1}{2}$, 8 pouces 8 lignes plus qu'à Paris.

Observations sur le Thermometre.

Le plus grand froid est arrivé à Aix le 9 Janvier, le Thermometre étant descendu à 13 degrés $\frac{1}{2}$, qui répondent à 17 degrés $\frac{1}{2}$ du Thermometre de l'Observatoire.

A Paris le plus grand froid le 20 Janvier, le Thermometre

étant descendu à 9 degrés $\frac{3}{4}$, c'est-à-dire, 8 degrés ou environ plus bas que le 9 Janvier à Aix.

La plus grande chaleur est arrivée le 20 Juillet à 3 heures après midi, le Thermometre étant monté à 81 degrés, que M. de Montvalon juge répondre à 80 degrés de celui de Paris.

A Paris le plus grand chaud est arrivé le 18 Juin à 3 heures après midi, où l'on observa le Thermometre à 78 degrés, plus bas seulement de 2 degrés que le 20 Juillet à Aix.

Sur le Barometre.

La plus grande hauteur du Barometre a été observée à Aix le 31 Décembre de 27 pouces 10 lignes après une grande pluie, plus basse de 6 lignes qu'à Paris, où il a été observé le 6 Février à 28 pouces 4 lignes.

La moindre hauteur a été à Aix le 21 Novembre à 26 pouces 11 lignes, plus basse de 2 lignes $\frac{1}{2}$ qu'à Paris, où il est descendu le 22 Février à 27 pouces 1 ligne $\frac{1}{2}$ par un vent de Sud-ouïest couvert.

Sur la Déclinaison de l'Aimant.

La déclinaison de l'Aimant a été observée à Aix de 14^d 0'.

Elle a été observée à Marseille par le P. Pefenas,
Professeur d'Hydrographie, de 14 50.



M E' M O I R E

*Sur le Cristallin de l'Oeil de l'Homme, des Animaux
à quatre pieds, des Oiseaux & des Poissons.*

Par M. PETIT le Médecin.

18 Janvier
1730.

LE Cristallin est une partie transparente de l'Oeil, de figure lenticulaire, d'une substance molle, mucilagineuse; mais assez ferme pour se contenir dans ses propres bornes; enchassée dans la partie antérieure de l'Humeur vitrée comme un Diamant dans son Chaton, dans laquelle il est retenu par une Membrane qui l'enveloppe entièrement, & qui pour cela est appelée la *Capsule du Cristallin*.

L'on sçait que le nom de Cristallin ne lui a été donné que parce qu'il est transparent comme un morceau de Cristal; c'est apparemment à cause de cette transparence que les Anatomistes l'ont mis au nombre des Humeurs des Yeux, quoique les parties qui le composent ne soient point fluides.

Sa substance est d'une consistance moyenne entre la fermeté & la liquidité; ses parties ne se dérangent point par elles-mêmes les unes à l'égard des autres.

Il est d'une forme lenticulaire dans l'Homme, les Animaux à quatre pieds & les Oiseaux. Il est sphérique à peu de chose près dans presque tous les Poissons & les Serpents; il est plus applati dans l'Homme & dans le Singe que dans aucun autre animal, parce qu'il a moins de convexité dans ses surfaces; sur-tout à sa partie antérieure.

La circonférence du Cristallin est ordinairement ronde; j'en ai pourtant trouvé dans l'Homme qui ne l'étoient pas; & dont le diamètre étoit plus grand d'un quart de ligne d'un côté que de l'autre.

Le diamètre de la circonférence du Cristallin dans l'Homme a pour l'ordinaire 4 lignes, quelquefois 4 lign. $\frac{1}{4}$ & 4 lign. $\frac{1}{2}$;

je l'ai vû rarement de 3 lign. $\frac{3}{4}$ dans les Adultes, mais je l'ai souvent trouvé de 3 lign. $\frac{1}{2}$ dans les Enfants.

Son épaisseur est de 2 lignes & 2 lign. $\frac{1}{4}$ dans les Adultes; quelquefois d'une ligne $\frac{3}{4}$, mais dans les Enfants on le trouve de 2 lign. $\frac{1}{2}$.

La convexité antérieure du Cristallin dans l'Homme fait une portion de sphere dont le diametre est de 6 lign. 6 lign. $\frac{1}{2}$, jusqu'à 9 lignes, & quelquefois de 12 lignes; j'en ai même trouvé dans des gens âgés qui étoient presque plans à leur partie antérieure de la longueur de 2 lignes, & dont la convexité me paroissoit être une portion de sphere de 25 à 30 lign. de diametre, cela est bien extraordinaire. On en trouve aussi qui n'ont que 5 lign. $\frac{1}{2}$, mais rarement, à moins que ce ne soit dans quelques Enfants.

La convexité postérieure fait une portion de sphere dont le diametre est de 5 lign. rarement de 5 lign. $\frac{1}{2}$ & de 4 lign. $\frac{3}{4}$, à moins que ce ne soit des Cristallins d'Enfants.

J'ai trouvé des Cristallins dont les deux convexités étoient égales. J'en ai vû aussi de plus convexe à la partie antérieure qu'à la partie postérieure, & j'ai rencontré plus d'une fois, dans les Yeux du même Homme, un Cristallin plus convexe à sa partie antérieure qu'à la partie postérieure, l'autre Cristallin étant dans son état naturel.

J'ai aussi trouvé quelques Cristallins dont la convexité postérieure n'étoit point sphérique, mais elle approchoit de la figure parabolique.

*V. les Mem.
de 1725,
p. 14.*

Le Cristallin de l'Homme pèse 4 grains, dans les Adultes quelquefois 4 grains $\frac{1}{4}$, rarement 4 grains $\frac{1}{2}$ & 3 grains $\frac{3}{4}$. Je l'ai trouvé dans les Enfants de huit ou dix ans pesant 3 grains, jusqu'à 3 grains $\frac{1}{2}$.

Il pesoit un grain $\frac{1}{2}$ dans un Foetus de sept mois, il n'avoit que 2 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & une ligne $\frac{3}{4}$ d'épaisseur. Sa convexité antérieure faisoit la portion d'une sphere de 3 lignes de diametre, & la postérieure étoit de 2 lign. $\frac{1}{2}$.

Le Cristallin pesoit 2 grains dans un Foetus de neuf mois.

Il avoit 2 lign. $\frac{2}{3}$ de diametre & 2 lignes d'épaisseur, & les mêmes convexités que le précédent

Celui d'un Enfant de huit jours de naissance pesoit 2 grains. Il avoit 2 lign. $\frac{3}{4}$ de diametre, & 2 lignes d'épaisseur. Sa convexité antérieure faisoit une portion de sphere de 4 lignes de diametre, & la postérieure de 3 lignes.

Celui d'un Enfant de neuf jours de naissance pesoit 2 grains $\frac{1}{4}$. Il avoit 3 lignes de diametre, & 2 lign. $\frac{1}{2}$ d'épaisseur. Sa convexité antérieure faisoit la portion d'une sphere de 5 lignes, & la postérieure de 3 lign. $\frac{1}{2}$.

Il faut remarquer que le diametre du Cristallin n'est pas toujours proportionné à son épaisseur. J'ai trouvé des Cristallins qui avoient 4 lignes de diametre & une ligne $\frac{3}{4}$ d'épaisseur, d'autres 2 lignes, d'autres 2 lign. $\frac{1}{4}$, jusqu'à 2 lign. $\frac{1}{2}$. J'en ai trouvé avec 2 lignes d'épaisseur, qui avoient 3 lign. $\frac{3}{4}$ de diametre, 4 lignes, 4 lign. $\frac{1}{4}$, 4 lign. $\frac{1}{2}$ & 4 lign. $\frac{1}{2}$. J'ai vû dans un Homme de quarante ans les deux Cristallins de différents diametres.

Les convexités des Cristallins ne sont pas toujours proportionnées à l'âge, elles diminuent pour l'ordinaire à mesure que l'on avance en âge, ce qui dépend de la contraction des Muscles, comme nous le dirons dans un Mémoire particulier. Les Cristallins se trouvent quelquefois aussi convexes dans un homme âgé que dans un jeune homme. Leur grosseur ne s'accorde pas toujours avec leur pesanteur; ils sont d'autant plus pesants qu'ils sont fermes, quoique de même grosseur.

On peut voir toutes ces diversités dans la Table suivante; je les ai tirées d'un grand nombre d'Yeux que j'ai examinés.

Cristallins d'Hommes.

Nom- bre.	Age.	Convéxité antérieure.	Convéxité postérieure.	Diametre ou Largeur.	Axe ou Épaisseur.	Pesanteur.
1.	12.	7 lignes $\frac{1}{2}$.	5 lignes.	4 lignes.	2 lignes.	3 grains $\frac{1}{2}$.
2.	15.	6 lign.	4 lign. $\frac{3}{4}$.	4 lign.	2 lign.	3 gr.
3.	15.	5 lign. $\frac{1}{2}$.	4 lign. $\frac{1}{2}$.	3 lign. $\frac{3}{4}$.	2 lign. $\frac{1}{2}$.	3 gr. $\frac{1}{2}$.
4.	20.	6 lign.	4 lign. $\frac{3}{4}$.	4 lign.	2 lign. $\frac{1}{2}$.	4 gr.
5.	25.	6 lign.	5 lign.	4 lign. $\frac{1}{4}$.	2 lign. $\frac{2}{3}$.	4 gr. $\frac{1}{4}$.
6.	30.	6 lign.	5 lign.	4 lign.	1 lign. $\frac{3}{4}$.	3 gr. $\frac{1}{2}$.
7.	30.	7 lign. $\frac{1}{2}$.	6 lign.	4 lign. $\frac{1}{2}$.	1 ligne $\frac{2}{3}$.	4 gr.
8.	30.	6 lign.	6 lign.	4 lign.	2 lign.	4 gr.
9.	30.	7 lign. $\frac{1}{4}$.	6 lign. $\frac{1}{4}$.	4 lign. $\frac{1}{4}$.	1 ligne $\frac{3}{4}$.	3 gr. $\frac{1}{2}$.
10.	35.	9 lign.	5 lign. $\frac{1}{2}$.	4 lign. $\frac{1}{2}$.	2 lign.	4 gr.
11.	40.	6 lign.	8 lign.	4 lign. $\frac{1}{2}$.	2 lign.	4 gr. $\frac{1}{2}$.
12.	40.	7 lign. $\frac{1}{2}$.	5 lign.	4 lign. $\frac{1}{3}$.	2 lign. $\frac{7}{8}$.	4 gr.
13.	40.	6 lign.	5 lign.	4 lign.	2 lign.	3 gr. $\frac{3}{4}$.
14.	45.	6 lign. $\frac{1}{2}$.	5 lign.	4 lign. $\frac{1}{2}$.	2 lign.	4 gr. $\frac{1}{2}$.
15.	45.	6 lign. $\frac{1}{2}$.	5 lign.	4 lign. $\frac{1}{3}$.	1 ligne $\frac{2}{3}$.	4 gr.
16.	50.	7 lign.	5 lign. $\frac{1}{2}$.	4 lign. $\frac{1}{3}$.	2 lign.	4 gr.
17.	50.	7 lign.	5 lign.	4 lign.	2 lign.	4 gr.
18.	55.	6 lign. $\frac{1}{2}$.	5 lign.	4 lign.	2 lign.	4 gr. $\frac{1}{2}$.
19.	55.	11 lign.	5 lign. $\frac{1}{2}$.	4 lign. $\frac{1}{3}$.	2 lign.	4 gr.
20.	60.	8 lign.	5 lign. $\frac{1}{2}$.	4 lign. $\frac{1}{2}$.	2 lign. $\frac{1}{2}$.	4 gr. $\frac{1}{2}$.
21.	60.	8 lign.	8 lign.	4 lign.	2 lign.	4 gr.
22.	60.	8 lign.	6 lign.	4 lign. $\frac{1}{2}$.	2 lign.	4 gr. $\frac{1}{2}$.
23.	60.	7 lign. $\frac{1}{2}$.	6 lign.	4 lign. $\frac{1}{2}$.	2 lign.	4 gr. $\frac{1}{2}$.
24.	60.	12 lign.	6 lign. $\frac{1}{4}$.	4 lign. $\frac{1}{3}$.	2 lign.	4 gr.
25.	60.	10 lign.	8 lign.	4 lign. $\frac{1}{3}$.	1 ligne $\frac{7}{8}$.	4 gr. $\frac{1}{2}$.
26.	65.	9 lign. $\frac{1}{2}$.	5 lign.	4 lign. $\frac{1}{4}$.	2 lign. $\frac{1}{2}$.	5 gr. $\frac{1}{2}$.

L'on voit dans cette Table des Cristallins de même âge avoir différents diametres & différentes épaisseurs.

Il y a des gens âgés de 60 ans qui ont la même épaisseur du Cristallin que des jeunes gens âgés de 12, de 15, de 30, de 40 ans, avec les mêmes convéxités.

On voit des convéxités différentes avec la même épaisseur

& la même largeur. Et dans un homme âgé de 30 ans & un autre de 40, on y trouve ses deux Cristallins de différentes convexités, de différents diametres & de différentes pesanteurs.

Il est bon d'avertir ici que les âges ont été déterminés sur la simple vûe du Cadavre, ce qui est sujet à quelque erreur, mais qui n'est pas de conséquence. Il est presque impossible de sçavoir l'âge de ceux qui meurent dans les Hôpitaux, principalement après leur décès, & lorsqu'ils sont une fois dans la Salle des Morts.

Le Singe est de tous les Animaux celui dont les parties approchent le plus de celles de l'Homme. Ses Yeux sont tout semblables à ceux de l'Homme; son Cristallin a les mêmes convexités, peu s'en faut, il n'a pourtant que 3 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur, jusqu'à 3 lign. $\frac{1}{2}$, & une ligne $\frac{1}{2}$ d'épaisseur, jusqu'à une ligne $\frac{3}{4}$.

La convexité antérieure du Cristallin du Cheval fait une portion de sphere dont le diametre a 12 lignes, jusqu'à 15. La convexité postérieure fait une portion de sphere qui a 10 lignes, jusqu'à 11 lignes de diametre.

Le diametre ou la largeur de ce Cristallin est de 9 lignes; jusqu'à 10. Il a 6 lignes d'épaisseur, jusqu'à 6 lign. $\frac{1}{2}$. Il pèse 58 grains, jusqu'à 66.

La convexité de la partie antérieure du Cristallin de l'Oeil du Bœuf fait une portion de sphere dont le diametre est de 10, 11, 12 lignes, jusqu'à 12 lign. $\frac{1}{2}$. La convexité de la partie postérieure fait une portion de sphere dont le diametre est de 8 lign. $\frac{1}{2}$, jusqu'à 9 $\frac{1}{2}$, rarement de 9 lign. $\frac{3}{4}$ & de 8 lign.

La largeur ou le diametre de ce Cristallin est de 8 lignes; jusqu'à 8 lign. $\frac{1}{2}$, rarement de 8 lign. $\frac{3}{4}$. Son épaisseur est de 5 lign. $\frac{1}{4}$, jusqu'à 6 lign. $\frac{1}{2}$. Sa pesanteur est de 38 grains; jusqu'à 54; j'en ai trouvé de 58 grains, mais très-rarement.

La facilité que l'on a d'avoir des Cristallins de Bœuf, est cause que j'en ai examiné une très-grande quantité, sur lesquels j'ai choisi un certain nombre pour faire la Table suivante; où l'on peut voir la plupart des variétés que nous avons remarquées dans les Cristallins de l'Homme, car l'on y voit que la largeur du Cristallin n'y est pas toujours proportionnée

à son épaisseur, & que leur grosseur ne s'accorde pas toujours avec leur pesanteur : il y en a quelques-uns dont je n'ai pas examiné les convexités.

Cristallins de Bœufs.

Nom- bre.	Convexité antérieure.	Convexité postérieure.	Diametre ou Largeur.	Axe ou Epaisseur.	Pesanteur.
1.	11 lignes $\frac{1}{2}$.	9 lignes.	8 lignes $\frac{1}{2}$.	5 lignes $\frac{1}{2}$.	38 grains.
2.	12 lign.	9 lign.	8 lign. $\frac{1}{2}$.	5 lign. $\frac{1}{2}$.	38 gr.
3.	12 lign. $\frac{1}{2}$.	8 lign. $\frac{1}{2}$.	8 lign.	5 lign.	38 gr.
4.	12 lign.	8 lign. $\frac{1}{2}$.	8 lign. $\frac{1}{2}$.	5 lign. $\frac{3}{4}$.	41 gr.
5.	12 lign.	8 lign. $\frac{1}{2}$.	8 lign. $\frac{1}{2}$.	5 lign. $\frac{1}{2}$.	41 gr.
6.	10 lign. $\frac{1}{2}$.	9 lign.	8 lign.	5 lign. $\frac{1}{2}$.	42 gr. $\frac{1}{2}$.
7.	11 lign.	9 lign. $\frac{1}{2}$.	8 lign. $\frac{1}{2}$.	5 lign. $\frac{2}{3}$.	43 gr. $\frac{1}{2}$.
8.	10 lign.	8 lign. $\frac{1}{2}$.	8 lign. $\frac{1}{2}$.	5 lign. $\frac{1}{3}$.	44 gr.
9.	12 lign.	9 lign. $\frac{1}{2}$.	8 lign. $\frac{1}{2}$.	5 lign. $\frac{1}{2}$.	44 gr.
10.	10 lign.	9 lign.	8 lign. $\frac{1}{2}$.	5 lign. $\frac{1}{3}$.	44 gr.
11.	10 lign.	9 lign.	8 lign. $\frac{1}{2}$.	5 lign. $\frac{1}{2}$.	44 gr.
12.	10 lign. $\frac{3}{4}$.	8 lign. $\frac{1}{4}$.	8 lign. $\frac{1}{4}$.	6 lign.	44 gr. $\frac{1}{2}$.
13.	8 lign. $\frac{1}{2}$.	5 lign. $\frac{1}{2}$.	45 gr.
14.	11 lign.	9 lign.	8 lign. $\frac{1}{2}$.	5 lign. $\frac{1}{2}$.	45 gr.
15.	12 lign.	9 lign. $\frac{1}{4}$.	8 lign. $\frac{1}{2}$.	5 lign. $\frac{1}{2}$.	46 gr.
16.	8 lign.	6 lign.	46 gr.
17.	12 lign.	9 lign.	8 lign.	5 lign.	47 gr.
18.	12 lign.	9 lign. $\frac{1}{2}$.	8 lign. $\frac{1}{2}$.	5 lign. $\frac{2}{3}$.	47 gr.
19.	12 lign.	9 lign. $\frac{1}{2}$.	8 lign. $\frac{1}{2}$.	5 lign. $\frac{1}{2}$.	47 gr.
20.	10 lign.	9 lign. $\frac{1}{2}$.	8 lign. $\frac{1}{2}$.	5 lign. $\frac{2}{3}$.	47 gr.
21.	8 lign. $\frac{1}{2}$.	5 lign. $\frac{1}{4}$.	47 gr. $\frac{1}{2}$.
22.	8 lign. $\frac{1}{2}$.	5 lign. $\frac{1}{2}$.	48 gr.
23.	12 lign.	8 lign. $\frac{1}{2}$.	8 lign. $\frac{1}{2}$.	5 lign. $\frac{1}{3}$.	48 gr.
24.	8 lign. $\frac{3}{4}$.	5 lign. $\frac{1}{2}$.	48 gr.
25.	8 lign. $\frac{1}{2}$.	5 lign. $\frac{2}{3}$.	49 gr.
26.	9 lign. $\frac{1}{2}$.	8 lign. $\frac{1}{2}$.	8 lign. $\frac{1}{2}$.	5 lign. $\frac{1}{2}$.	49 gr.
27.	10 lign. $\frac{1}{4}$	8 lign. $\frac{1}{2}$.	5 lign. $\frac{3}{4}$.	49 gr. $\frac{1}{2}$.
28.	8 lign. $\frac{1}{2}$.	6 lign. $\frac{1}{2}$.	50 gr.
29.	8 lign. $\frac{1}{2}$.	5 lign. $\frac{3}{4}$.	50 gr.
30.	12 lign.	9 lign.	8 lign. $\frac{1}{2}$.	5 lign. $\frac{1}{4}$.	50 gr.
31.	8 lign. $\frac{1}{2}$.	6 lign.	50 gr.
32.	11 lign.	9 lign.	8 lign. $\frac{1}{2}$.	5 lign. $\frac{2}{3}$.	50 gr.
33.	9 lign. $\frac{1}{2}$.	12 lign.	8 lign. $\frac{3}{4}$.	5 lign. $\frac{1}{3}$.	51 gr.
34.	8 lign. $\frac{1}{4}$.	5 lign. $\frac{1}{2}$.	51 gr.
35.	11 lign. $\frac{1}{4}$.	9 lign.	8 lign. $\frac{1}{2}$.	5 lign. $\frac{1}{2}$.	51 gr.
36.	8 lign. $\frac{1}{2}$.	6 lign. $\frac{1}{2}$.	56 gr.

La convexité de la partie antérieure du Cristallin du

Mem. 1730.

. B

Mouton fait une portion de sphere dont le diametre est de 7 lign. $\frac{1}{2}$, jusqu'à 8 lignes. Sa convexité postérieure fait une portion de sphere, dont le diametre est de 6 lignes, jusqu'à 7.

La largeur ou le diametre est de 5 lign. $\frac{1}{2}$, jusqu'à 6 lign. $\frac{1}{2}$. Son épaisseur est de 4 lign. $\frac{1}{2}$, jusqu'à 4 lign. $\frac{3}{4}$. Il pese pour l'ordinaire 24 grains, jusqu'à 28.

La convexité de la partie antérieure du Cristallin de l'Oeil du Chien-dogue & de trois ou quatre Loups que j'ai disséqués, fait la portion d'une sphere, dont le diametre est de 6 lignes, jusqu'à 6 lign. $\frac{1}{2}$. La convexité de la partie postérieure est quelquefois égale à l'antérieure; mais pour l'ordinaire elle fait la portion d'une sphere, dont le diametre est de 5 lignes, jusqu'à 5 lign. $\frac{1}{2}$.

La largeur de ce Cristallin est de 4 lign. $\frac{1}{2}$, jusqu'à 5 lign. & 3 lign. $\frac{1}{2}$ d'épaisseur, jusqu'à 3 lign. $\frac{3}{4}$. Il pese 12 grains, jusqu'à 14.

Les Cristallins des Yeux des gros Chats ne diffèrent presque point de ceux du Chien & du Loup.

J'ai disséqué les Yeux d'un seul Renard, la convexité de la partie antérieure de ses Cristallins faisoit la portion d'une sphere de 6 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la convexité postérieure faisoit la portion d'une sphere de 5 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre.

Ils avoient 5 lign. $\frac{1}{4}$ de largeur, & 4 lignes d'épaisseur. Ils pesoient chacun 12 grains.

On trouve presque toujours la convexité de la partie antérieure du Cristallin de l'Oeil du Lièvre & du Lapin égale à la postérieure, elle fait la portion d'une sphere, dont le diametre est de 6 jusqu'à 7 lignes.

La largeur de ce Cristallin est de 5 lign. 5 lign. $\frac{1}{2}$, jusqu'à 6, & son épaisseur est de 4 lign. $\frac{1}{4}$, jusqu'à 4 lign. $\frac{1}{2}$.

La convexité de la partie antérieure du Cristallin des Yeux du Dindon & de l'Oye est la même; elle fait la portion d'une sphere, dont le diametre est de 4 lign. $\frac{1}{2}$ ou 5 lignes, assés souvent de 6 lignes, rarement de 7 lignes.

La convexité de la partie postérieure fait la portion d'une

sphère, dont le diamètre est de 4 lignes, jusqu'à 5 lignes.

Ces Cristallins ont 3 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur, jusqu'à 4 lignes; & 2 lign. jusqu'à 2 lign. $\frac{1}{2}$ d'épaisseur. Ils pèsent 3 grains, 3 grains $\frac{1}{2}$, jusqu'à 4 grains $\frac{1}{2}$.

Le Chat-huant, le Duc & la Choïette ont le Cristallin de la même conformation, aussi-bien que tout le globe de l'Oeil, qui est d'une structure particulière, comme je l'ai fait voir à l'Académie. La convexité de la partie antérieure du Cristallin est plus grande que la postérieure, car cette partie antérieure fait la portion d'une sphère qui a 6 lignes de diamètre. La convexité postérieure fait la portion d'une sphère qui a 7 lign. de diamètre.

Il a 6 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur, & 5 lign. $\frac{1}{2}$ d'épaisseur.

Il pèse 14 grains, ce qui est digne de remarque, qu'un si petit Oiseau ait un Cristallin aussi gros & aussi pesant, en comparaison de ceux du Dindon & de l'Oye, dont les plus gros Cristallins n'ont que 4 lign. de diamètre, & 4 grains $\frac{1}{2}$ de pesanteur.

Le Cristallin de la Choïette est plus petit que celui du Chat-huant & du Duc, il n'avoit que 4 lign. $\frac{3}{4}$ de largeur, & 3 lign. $\frac{1}{2}$ d'épaisseur, & pesoit 10 grains.

Les Cristallins de la plupart des Serpents & des Poissons sont à peu-près sphériques.

La convexité de la partie antérieure du Cristallin d'un Marsoüin long de 5 pieds, faisoit la portion d'une sphère de 8 lignes de diamètre, & la convexité de la partie postérieure faisoit la portion d'une sphère de 6 lign. $\frac{1}{2}$ de diamètre.

Ce Cristallin avoit 6 lignes de diamètre dans sa circonférence, & 5 lignes d'axe ou d'épaisseur: il pesoit 24 grains.

Le Cristallin d'un Marsoüin, de 4 pieds $\frac{1}{2}$ de longueur, faisoit à sa partie antérieure la portion d'une sphère de 7 lign. $\frac{1}{2}$ de diamètre, & la postérieure de 6 lignes.

Ce Cristallin avoit 5 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur ou de diamètre de sa circonférence, & 4 lign. $\frac{3}{4}$ d'axe ou d'épaisseur: il pesoit 22 grains.

Le Cristallin d'un Marsoüin, long de 3 pieds $\frac{1}{2}$, faisoit à sa

partie antérieure la portion d'une sphere de 7 lign. de diametre; & la postérieure 5 lign. $\frac{1}{2}$. Il avoit 5 lignes de largeur ou de diametre de sa circonférence, & 4 lignes $\frac{1}{2}$ d'épaisseur. Il pesoit 19 grains.

Un Poisson appelé *Carpe de Mer*, long de 6 pieds, son Cristallin faisoit une portion de sphere de 9 lignes de diametre par sa convexité antérieure, & par la postérieure elle étoit de 7 lignes.

Le diametre de sa circonférence étoit de 6 lign. $\frac{3}{4}$, & son épaisseur de 6 lign. $\frac{1}{4}$; il pesoit 28 grains.

Le Cristallin d'un Poisson nommé *Reluisant*, long de 7 pieds, faisoit à sa partie antérieure une portion de sphere de 10 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la postérieure de 9 lign. $\frac{1}{2}$. Il avoit 9 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur ou de diametre de sa circonférence, & 9 lign. d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit 111 grains.

Le Cristallin d'un Poisson appelé *Negre*, long de 4 pieds, avoit une convexité à sa partie antérieure qui faisoit une portion de sphere de 7 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la postérieure de 6 lign. $\frac{1}{2}$. Il avoit 6 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur ou de diametre de sa circonférence, & 6 lign. $\frac{1}{4}$ d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit 32 grains.

Le Cristallin d'un autre *Negre*, qui avoit 4 pieds $\frac{1}{2}$ de longueur, faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphere qui avoit 8 lign. de diametre, & la postérieure 6 lign. $\frac{3}{4}$. Il avoit 6 lign. $\frac{3}{4}$ de largeur ou de diametre de sa circonférence, & 6 lign. $\frac{1}{2}$ d'épaisseur. Il pesoit 36 grains.

Le Cristallin d'un Saumon, qui avoit 2 pieds de longueur, avoit à sa partie antérieure une convexité qui faisoit la portion d'une sphere de 3 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la postérieure de 2 lign. $\frac{1}{2}$. Il avoit 2 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur ou de diametre de sa circonférence, & 2 lign. $\frac{1}{4}$ d'épaisseur. Il pesoit 2 grains.

Le Cristallin d'un Espadon (*Gladius. five Xiphias*) long de 3 pieds, faisoit par sa convexité antérieure la portion d'une sphere qui avoit 10 lignes de diametre, & la postérieure 8 lignes $\frac{2}{3}$. Il avoit 8 lignes $\frac{2}{3}$ de largeur ou de diametre de sa circonférence, & 8 lign. $\frac{1}{3}$ d'épaisseur. Il pesoit 72 grains.

Le Cristallin d'une Aloze, longue de 21 pouces, faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphere qui avoit 4 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, la partie postérieure 3 lign. $\frac{3}{4}$. Il avoit 3 lign. $\frac{3}{4}$ de largeur ou de diametre de sa circonférence, & 3 lign. $\frac{1}{3}$ d'épaisseur. Il pesoit 3 grains $\frac{1}{2}$.

Le Cristallin d'une autre Aloze, de 14 pouces de longueur, faisoit par sa partie antérieure une portion de sphere de 4 lign. de diametre, & la postérieure de 3 lignes. Il avoit 3 lignes de largeur ou de diametre de sa circonférence, & 2 lign. $\frac{1}{2}$ d'épaisseur. Il pesoit 3 grains.

Le Cristallin d'un Poisson appelé *Pucelle*, long de 14 pouc. faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphere qui avoit 3 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la postérieure 2 lign. $\frac{3}{4}$. Il avoit 2 lign. $\frac{3}{4}$ de largeur ou de diametre de sa circonférence, & 2 lign. $\frac{1}{2}$ d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit 2 grains $\frac{1}{3}$.

Le Cristallin d'un Brochet, de 2 pieds de longueur, faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphere de 4 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la postérieure de 3 lign. $\frac{3}{4}$. Il avoit 3 lign. $\frac{3}{4}$ de largeur ou de diametre de sa circonférence, & 3 lign. $\frac{1}{2}$ d'épaisseur. Il pesoit 6 grains.

Le Cristallin d'un Brochet, de 32 pouces de longueur, avoit les mêmes dimensions & le même poids.

Le Cristallin d'un Barbeau ou Barbillon, qui avoit 18 pouc. de longueur, faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphere qui avoit 4 lignes de diametre, & la postérieure 3 lignes. Il avoit 3 lignes de largeur ou de diametre de sa circonférence, & 2 lign. $\frac{3}{4}$ d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit 4 grains.

Le Cristallin d'un autre Barbeau, qui avoit 2 pieds de longueur, faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphere qui avoit 5 lign. de diametre, & la postérieure 3 lign. $\frac{3}{4}$. Il avoit 3 lign. $\frac{3}{4}$ de largeur ou de diametre de sa circonférence, & 3 lignes d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit 6 grains.

Le Cristallin d'une Carpe, qui avoit 15 pouces de longueur, faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphere qui avoit 3 lignes de diametre, & la postérieure 2 lign. $\frac{1}{2}$. Il avoit

14 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE

2 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur ou de diametre de sa circonférence, & 2 lign. $\frac{1}{3}$ d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit 2 grains $\frac{1}{2}$.

Le Cristallin d'un Maquereau, qui avoit 14 pouces de longueur, faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphere qui avoit 4 lign. de diametre, & la postérieure 3 lign. $\frac{1}{4}$. Il avoit 3 lign. $\frac{1}{4}$ de largeur ou de diametre de sa circonférence; & 3 lignes d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit 2 grains $\frac{3}{4}$.

Le Cristallin d'un autre Maquereau, de 14 pouces de longueur, faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphere de 4 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la postérieure de 3 lign. $\frac{1}{2}$. Il avoit 3 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur ou de diametre de sa circonférence, & 3 lign. $\frac{1}{8}$ d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit 3 grains $\frac{1}{4}$.

Le Cristallin d'un autre Maquereau, de 13 pouces de longueur, faisoit par sa convexité antérieure la portion d'une sphere qui avoit 3 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la postérieure 2 lign. $\frac{2}{3}$. Il avoit 2 lign. $\frac{2}{3}$ de largeur ou de diametre de sa circonférence, & 2 lign. $\frac{1}{2}$ d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit 2 grains.

Le Cristallin d'un Merlan, qui avoit 12 pouces de longueur, faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphere qui avoit 4 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la postérieure 3 lignes $\frac{3}{4}$. Il avoit 3 lign. $\frac{3}{4}$ de largeur ou de diametre de sa circonférence, & 3 lign. $\frac{1}{2}$ d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit 3 grains $\frac{1}{4}$.

Le Cristallin d'un autre Merlan, de 12 pouces de longueur, faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphere qui avoit 5 lignes de diametre, & la postérieure 4 lignes. Il avoit 4 lignes de largeur ou de diametre de sa circonférence, & 3 lign. $\frac{1}{2}$ d'épaisseur. Il pesoit 4 grains.

Le Cristallin d'un Chien de Mer, qui avoit 3 pieds 3 pouc. de longueur, faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphere qui avoit 6 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la postérieure 5 lign. $\frac{1}{2}$. Il avoit 5 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur ou de diametre de sa circonférence, & 5 lign. $\frac{1}{4}$ d'épaisseur. Il pesoit 18 grains.

Le Cristallin d'un autre Chien de Mer, long de 2 pieds $\frac{1}{2}$; faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphere qui avoit 5 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la postérieure 5 lignes. Il avoit

5 lignes de largeur ou de diametre de sa circonférence, & 4 lign. $\frac{3}{4}$ d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit 16 grains.

Le Cristallin d'une Raye appelée *Ange*, longue d'un pied $\frac{1}{2}$ sans la queue, faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphere qui avoit 5 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la postérieure 4 lign. $\frac{1}{2}$. Il avoit 4 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur ou de diametre de sa circonférence, & 4 lign. $\frac{1}{4}$ d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit 17 grains.

Le Cristallin d'une autre Raye appelée *Bouclée*, longue de 2 pieds sans la queue, faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphere de 6 lign. $\frac{1}{4}$ de diametre, & la postérieure de 5 lign. $\frac{1}{2}$. Il avoit 5 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur ou de diametre de sa circonférence, & 5 lign. $\frac{1}{4}$ d'épaisseur ou d'axe. Il pesoit 18 grains.

Le Cristallin d'un Rouget, qui avoit 10 pouces de longueur, faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphere de 5 lignes de diametre, & la postérieure de 4 lignes. Il avoit 4 lignes de largeur ou de diametre de sa circonférence, & 3 lign. $\frac{3}{4}$ d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit 8 grains $\frac{1}{2}$.

Le Cristallin d'un Hareng faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphere de 3 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la postérieure de 2 lign. $\frac{3}{4}$ de largeur ou de diametre, & 2 lign. $\frac{1}{2}$ d'épaisseur. Il pesoit 2 grains.

Le Cristallin d'un autre Hareng faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphere de 3 lignes de diametre, & la postérieure de 2 lign. $\frac{1}{2}$. Il avoit 2 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur ou de diametre de la circonférence, & 2 lign. $\frac{1}{3}$ d'épaisseur. Il pesoit un grain $\frac{1}{2}$.

Le Cristallin d'une Tanche faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphere qui avoit 2 lign. $\frac{3}{4}$ de diametre, & la postérieure de 2 lignes. Il avoit 2 lignes de largeur, & une ligne $\frac{3}{4}$ d'épaisseur. Il pesoit un grain.

Le Cristallin d'une Anguille d'eau douce faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphere qui avoit 3 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la postérieure 3 lignes. Il avoit 3 lignes de largeur ou de diametre de sa circonférence, & 2 lign. $\frac{3}{4}$ d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit 3 grains.

Le Cristallin d'une Anguille de Mer faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphere de 6 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la postérieure de 5 lignes. Il avoit 5 lignes de largeur ou de diametre de sa circonférence, & 4 lign. $\frac{1}{2}$ d'épaisseur. Il pesoit 14 grains.

Le Cristallin d'une Lamproye étoit tout semblable à celui de l'Anguille d'eau douce.

Le Cristallin d'une Lote faisoit par sa convexité antérieure la portion d'une sphere de 3 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la postérieure d'une ligne $\frac{3}{4}$. Il avoit une ligne $\frac{3}{4}$ de largeur ou de diametre de sa circonférence, & une ligne $\frac{1}{2}$ d'épaisseur. Il pesoit $\frac{3}{4}$ de grains.

J'ai trouvé dans les Cristallins de la plupart des Viperes & des Aspics les mêmes dimensions & les mêmes poids.

Le Cristallin d'une Loutre, que j'ai disséquée, faisoit par sa convexité antérieure la portion d'une sphere qui avoit 3 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la postérieure 2 lign. $\frac{1}{2}$. Il avoit 2 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur ou de diametre de sa circonférence, & 2 lignes d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit un grain $\frac{1}{2}$.

Le Cristallin d'une Tortue, qui avoit 2 pieds $\frac{1}{2}$ de longueur, sans y comprendre la tête ni la queue, faisoit par sa convexité antérieure la portion d'une sphere qui avoit 3 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre, & la postérieure 2 lign. $\frac{1}{4}$. Il avoit de largeur ou de diametre de sa circonférence 2 lign. $\frac{1}{4}$, & une ligne $\frac{3}{4}$ d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit 2 grains.

Le Cristallin d'une grosse Grenouille faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphere qui avoit 2 lign. $\frac{3}{4}$ de diametre, & la postérieure 2 lignes. Il avoit de largeur ou de diametre de sa circonférence 2 lignes, & une ligne $\frac{3}{4}$ d'épaisseur. Il pesoit un grain $\frac{1}{2}$.

Le Cristallin d'une moyenne Grenouille ne pesoit qu'un grain, & avoit les dimensions plus petites.

Il faut encore remarquer que plus les Animaux sont jeunes; le Cristallin se trouve d'autant plus mou. Il est d'une mollesse qui ressemble à celle de la bouillie refroidie dans les Fœtus & les nouveau-nés, il est même plus mou au centre qu'à la circonférence;

circonférence, ce qu'il est facile de remarquer dans les Cristallins de Veaux & d'Agneaux.

Si l'on fait sécher ces Cristallins, il s'en évapore les deux tiers ou les trois quarts, & l'on trouve une cavité au dedans; ou bien il se fait un enfoncement sur l'une des deux surfaces, quelquefois sur toutes les deux la même chose arrive aux Cristallins d'Enfants nouveau-nés, mais si l'on met sécher des Cristallins d'Hommes de l'âge de 50 à 60 ans, il ne se fait aucun enfoncement qui soit considérable, & qui d'ailleurs ne provient que de la mollesse de la partie extérieure, il s'en évapore seulement le tiers ou le quart, ce qui arrive de même aux Cristallins des autres Animaux, dont l'évaporation se fait à proportion de leur âge. Ces Cristallins, qui sont d'une si grande mollesse dans le premier âge, deviennent peu-à-peu plus ferme, ensorte que dans l'Homme de 15 ou 20 ans la consistance du Cristallin se trouve égale au centre & à la circonférence, ce que l'on remarque aussi dans les Cristallins de Veaux de deux mois, ou deux mois & demi, & dans ceux d'Agneaux de six semaines ou deux mois. La partie centrale commence à devenir plus ferme dans l'Homme à l'âge de 20 ou 25 ans; cette fermeté s'augmente & s'étend peu-à-peu vers la circonférence, qui devient aussi plus ferme, mais quelque fermeté qu'elle acquiert, elle l'est rarement autant que la partie centrale.

Les Cristallins sont non seulement d'autant plus fermes que les Animaux sont plus âgés, mais ceux des Animaux à quatre pieds, des Oiseaux & des Poissons le sont plus que ceux de l'Homme. Les Cristallins des Yeux de Dindon, d'Oye, de Cheval, de Bœuf, de Mouton, & âgés d'un an, sont plus fermes que ceux d'Hommes âgés de 25 ans.

Les Cristallins se trouvent d'autant plus fermes, qu'ils sont plus gros à proportion de leur âge. Ceux de Chevaux le sont plus que ceux de Bœufs, qui le sont plus que ceux de Moutons, & ceux-ci que ceux de Chiens & de Chats.

Ceux des Animaux à quatre pieds sont plus fermes que ceux des Oiseaux, mais ceux des Poissons sont beaucoup plus

fermes que ceux de Chevaux & de Bœufs, enforte que la partie centrale des Cristallins des Poissons a une fermeté qui approche quelquefois de la dureté de la Corne; il est vrai que la substance externe de ces Cristallins est plus molle que celle des autres Cristallins (ce que Morgagni a remarqué) car elle est mucilagineuse, ce que j'ai vu aussi dans le Cristallin de la Loutre, animal à quatre pieds, mais aquatique,

*Advers. 6.
p. 90.*

Il y a encore une chose singulière qui arrive aux Cristallins des Yeux de l'Homme, & que je n'ai vûe dans aucun des Cristallins des Animaux à quatre pieds, des Oiseaux & des Poissons.

*V. les Mem.
de l'Acad. an.
1726. p. 81.
et 82.*

Le Cristallin de l'Homme est transparent & sans couleur depuis la naissance jusqu'à l'âge de 25 ans ou environ, après quoi il commence à prendre dans le centre une couleur jaune de paille très-légère qui augmente à mesure que l'on avance en âge; la couleur devient peu-à-peu plus jaune, & s'étend vers la circonférence. J'ai vu les Cristallins d'un Invalide âgé de 81 ans, qui ressembloient par leur couleur & leur transparence à des morceaux d'Ambre jaune bien transparents; & plus les Cristallins sont fermes, plus ils sont jaunes. Mais quelque fermeté qu'ayent les Cristallins des Animaux à quatre pieds, des Oiseaux & des Poissons, je n'en ai trouvé aucun qui eût la moindre couleur. Il y a des Cristallins de Chevaux, mais peu, qui acquièrent cette couleur en séchant à l'air, ils n'avoient aucune couleur dans le temps que je les ai tirés des Yeux. Les Cristallins de Poissons, qui sont plus fermes que ceux de Chevaux, ne jaunissent point en séchant. J'ai quelquefois trouvé dans le même Homme un Cristallin plus jaune que l'autre.

Venons présentement à la structure du Cristallin. Il est formé & composé de fibres agencées les unes contre les autres dans un certain ordre. On voit assés facilement ces fibres dans un Cristallin nouvellement tiré de l'Oeil d'un Bœuf. On frotte un Scalpel d'huile, on l'enfonce environ de l'épaisseur d'une demi-ligne, plus ou moins, au centre d'une des surfaces de ce Cristallin, puis on ramene le Scalpel vers la circonférence,

en déchirant la substance du Cristallin, on voit les fibres du Cristallin qui forment des pellicules posées les unes sur les autres. On découvre facilement ces pellicules dans les Cristallins séchés à l'air, mais on ne voit point les fibres. On découvre encore mieux l'un & l'autre dans ceux que l'on a fait bouillir dans l'eau.

Voici les expériences que j'ai faites pour cela avec des Cristallins de Bœufs.

J'ai pris un Cristallin de Bœuf qui pesoit 48 grains, il avoit 8 lignes $\frac{1}{2}$ de diamètre, & 5 lignes $\frac{1}{2}$ d'épaisseur. Je l'ai laissé sécher à l'air au mois de Juillet. Au bout de quatre jours il ne pesoit plus que 22 grains. Il avoit 7 lignes de diamètre, & 4 lignes $\frac{3}{4}$ d'épaisseur, mais ses surfaces étoient très-inégales, bosselées, plus épaisses en des endroits que dans d'autres. Il étoit blanc, opaque à sa partie extérieure, transparent à sa partie interne, mais non pas de cette transparence dont il étoit lorsque je l'ai tiré de l'Oeil. La partie externe étoit feüilletée, la partie interne étoit égale, & s'enlevoit par pièces qui ressembloient à des côtes de Melon, le tout se réduisoit facilement en poudre.

J'ai laissé sécher beaucoup d'autres Cristallins, il s'en est trouvé qui pesoient 50 grains, qui étant séchés, ne pesoient plus que 12 grains; d'autres pesant 46 grains, pesoient 30 grains étant secs. Les Cristallins qui perdent le plus de leur pesanteur, ont moins de matière transparente, & plus de cette matière feüilletée, blanche & opaque; & ceux qui conservent le plus de leur pesanteur, ont moins de matière blanche & opaque, & plus de matière transparente. En général on leur trouve d'autant plus de matière transparente, étant séchés, qu'ils sont naturellement plus fermes & d'Animaux plus âgés; c'est ce qui fait que l'on rencontre rarement de la substance transparente dans les Cristallins de l'Homme qui sont séchés; ils se réduisent presque entièrement en matière blanche en séchant, &, comme je l'ai dit, perdent quelquefois les trois quarts de leur pesanteur. Les Cristallins de Veaux, & de tous les jeunes Animaux, perdent, en séchant, aussi les trois

quarts de leur pesanteur & plus, & l'on n'y trouve point de matière transparente. Les Cristallins sont beaucoup plus mous à leur partie extérieure qu'à leur partie interne; lorsque l'humidité, qui cause cette mollesse, vient à s'évaporer, elle laisse des espaces vuides, les parties solides se rapprochent les unes des autres, mais inégalement, ainsi les plans ne se trouvant plus parallèles les uns à l'égard des autres, la matière lumineuse qui y passe, trouve incessamment des plans inclinés, se rompt & se réfléchit d'une infinité de manières, ce qui rend le corps opaque, comme il arrive au Verre pilé & au Sablon, composés d'une infinité de parties toutes transparentes.

*Traité de
l'Œil, ch. 4.*

Briggs dit que les Cristallins mis dans une cuillier d'argent exposée sur les charbons ardents, se réduisent en gelée: je ne sçais s'il a obmis de rapporter quelques circonstances, j'ai fait cette expérience comme il le dit, bien-loin de se réduire en gelée, ils se grillent après que toute l'humidité est évaporée, il n'y reste le plus souvent point de matière transparente, parce que l'humidité qui se trouve dans toute la substance du Cristallin est poussée avec trop de force par la chaleur, & dérange les parties internes du Cristallin.

J'ai mis tremper un Cristallin dans l'eau froide, il pesoit 44 grains, il avoit 8 lign. $\frac{1}{3}$ de largeur, 5 lign. $\frac{1}{3}$ d'épaisseur. Je l'ai retiré 26 heures après, il pesoit 56 grains $\frac{1}{2}$, il avoit 8 lign. $\frac{2}{3}$ de diametre & 6 lign. $\frac{3}{4}$ d'épaisseur. J'en ai mis tremper d'autres, qui ont donné bien des variétés: plus ils sont fermes, plus ils grossissent, & fendent quelquefois leur capsule, & pour lors ils se trouvent très-inégaux, & toujours très-mous; si on les laisse tremper plus long-temps, ils se réduisent en mucilage.

Les Cristallins bouillis dans l'eau, deviennent opaques & fermes; leur surface reste quelquefois régulière, & quelquefois irrégulière. Ces Cristallins diminuent dans leur poids & leurs dimensions, puis exposés à l'air encore tout chauds, se séchent bien vite, & se fendent d'abord en trois parties à leurs surfaces antérieures & postérieures. Chacune de ces parties

se divise en plusieurs autres, & par ce moyen on peut découvrir leur structure, mais cela se fait encore mieux dans les Cristallins trempés dans les Esprits acides, ce qui m'a engagé de faire quantité d'expériences dans lesquelles j'ai employé beaucoup de Cristallins de Bœufs, & très-peu de Cristallins d'Hommes, parce qu'ils sont trop petits & trop mous.

*V. M. Antoine
Maîtrejean,
Descript. de
l'Œil, ch. 113*

J'ai mis dans l'Esprit de Nitre un Cristallin d'Homme qui pesoit 4 grains; il avoit 4 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur, & 2 lign. d'épaisseur. Il a tout aussi-tôt blanchi, il nageoit sur la liqueur. Je l'ai retiré 24 heures après, il n'avoit plus de capsule, elle étoit dissoute.

Le Cristallin étoit devenu jaune-pâle, ses surfaces étoient encore unies & polies. Il pesoit 4 grains, il avoit 4 lignes de diametre, & 2 lignes d'épaisseur. Étant resté quelque temps à l'air, il s'est fendu en plusieurs rayons de la circonférence au centre; il s'est séparé par pièces qui ressembloient à des côtes de Melon, & par fibres très-fines de la grosseur des fils de Soye grege, elles étoient jaunâtres. Tous les Cristallins d'Hommes que j'ai mis dans l'Esprit de Nitre, ont été de même, à peu de chose près. Les plus mous se dissolvent tant soit peu, ils diminüent de poids, & restent plus mous que les autres.

J'ai mis dans l'Esprit de Nitre un Cristallin de Bœuf, il pesoit 47 grains $\frac{1}{2}$, il avoit 8 lign. $\frac{1}{2}$ de diametre ou de largeur, & 6 lignes d'épaisseur. La capsule s'est d'abord fendüe, & s'est séparée du Cristallin qui nageoit sur la liqueur, elle est devenue jaune, le Cristallin a blanchi tout aussi-tôt, il s'est formé beaucoup de bulles, la capsule s'est presque entièrement dissoute. J'ai retiré le Cristallin 24 heures après, il étoit jaune à sa surface. Il pesoit 52 grains, il est augmenté de 4 grains $\frac{1}{2}$, il avoit 8 lignes de diametre, & 5 lign. $\frac{1}{3}$ d'épaisseur. Il avoit donc diminué de demi-ligne dans son diametre, & de deux tiers de ligne dans son épaisseur, quoiqu'il eût augmenté de poids. Il étoit fendu en trois rayons, du centre à la circonférence, il s'est séché à l'air en 24 heures, & il s'est divisé en pièces qui ressembloient à des côtes de Melon, qui se sont

séparées en peau, qui étoient jaunes de Safran, & les peaux en fibres très-déliées comme le Cristallin de l'Homme.

Tous les Cristallins de Bœufs que j'ai mis dans l'Esprit de Nitre pur, ont donné les mêmes phénomènes. Il y en a qui n'ont augmenté que d'un grain, d'autres ont diminué de 5 ou 6 grains, quelques-uns ont eu la surface très-inégale, molle, enforte que je n'ai pû en mesurer les dimensions, & n'ont pû se sécher à l'air qu'en trois fois 24 heures, il s'en est trouvé qui étoient mous dans le centre, & d'autres fermes dans toute leur substance.

J'ai mis un Cristallin d'Homme dans un mélange de partie égale d'Esprit de Nitre & d'Eau commune, il pesoit 4 grains $\frac{1}{4}$, il avoit 4 lign. $\frac{1}{3}$ de diametre, & 2 lignes d'épaisseur. Il a blanchi dans le moment par rayons, il nageoit sur la liqueur, mais le lendemain il s'est trouvé au fond. Je l'ai retiré 24 heures après, il étoit opaque, dur, jaunâtre, fendu en quatre rayons, enveloppé de sa capsule, qui est restée transparente. Il pesoit 4 grains, il avoit 4 lignes de largeur, & 2 lignes d'épaisseur. Il avoit donc diminué d'un quart de grain, & d'un tiers de ligne dans son diametre.

J'ai mis un Cristallin de Bœuf dans le même mélange d'Esprit de Nitre & d'Eau, il pesoit 49 grains, il avoit 8 lign. $\frac{1}{2}$ de largeur, & 5 lign. $\frac{2}{3}$ d'épaisseur. Il a d'abord nagé sur la liqueur, & est devenu blanc en une demi-minute, une heure & demie après il étoit précipité au fond de la liqueur. Je l'ai retiré, il s'est trouvé blanc, opaque, fendu en six rayons du centre de sa surface antérieure jusqu'auprès de sa circonférence. Je l'ai remis dans la liqueur, le lendemain je l'ai trouvé nageant sur la liqueur, je l'ai retiré, il étoit jaune de paille, dur, opaque, fendu plus profondément qu'il n'étoit le jour précédent. Il avoit 8 lignes de diametre ou de largeur, & 5 lign. $\frac{1}{2}$ d'épaisseur. Il pesoit 44 grains sans membrane qui pesoit un grain $\frac{1}{2}$, elle étoit transparente. Ce Cristallin a donc diminué dans ses dimensions & dans sa pesanteur.

La même chose est arrivée à un autre Cristallin dans une pareille liqueur.

Les Cristallins mis dans l'Esprit de Sel dulcifié, ont eu les mêmes phénomènes que ceux qui ont été mis dans l'Esprit de Nitre mêlé avec moitié Eau.

Les Cristallins que j'ai mis dans l'Esprit de Sel, ont donné à peu-près les mêmes phénomènes que ceux que j'ai mis dans l'Esprit de Nitre pur. Ils ont nagé sur cet Esprit ; ils ont blanchi tout d'abord, puis ils sont devenus jaunes, ils se sont fendus par rayons, la membrane ou capsule s'est dissoute dans quelques expériences, elle s'est trouvée toute entière dans d'autres, & transparente. Ils ont diminué dans leurs dimensions, mais ce qu'il y a de différent, ils ont toujours diminués de poids depuis 5 grains jusqu'à 10, & ces Cristallins étant gardés, sont toujours devenus bruns ou noirs, au lieu que les Cristallins, mis dans l'Esprit de Nitre & séchés, sont restés jaunes de Safran ou aurore.

Les Cristallins mis dans l'Esprit de Vitriol pur, ont eu les mêmes phénomènes que ceux qui ont été mis dans le mélange d'Esprit de Nitre & d'Eau commune. Il y a cela de différent : les Cristallins, tant d'Hommes que de Bœufs, sont devenus blancheâtres dans l'Esprit de Vitriol, ils ont moins diminué dans leur pesanteur & dans leurs dimensions, principalement ceux de Bœufs, & ils ne se sont fendus qu'après avoir été exposés à l'air & un peu séchés. Les Cristallins d'Hommes ont d'abord nagé sur la liqueur, mais le lendemain ils se sont trouvés au fond ; les Cristallins de Bœufs ont été au fond de la liqueur aussi-tôt qu'on les y a mis, & sont devenus tous blancs.

*V. M. Antoine
Maîtrej. Desor.
de l'Oeil, c. 11.
du Cristallin,*

La même chose arrive aux Cristallins trempés dans égale partie d'Esprit de Vitriol & d'Eau, mais il faut les y laisser plus long-temps. Ils n'ont point diminué de pesanteur, il y en a même qui ont augmenté de 2 grains, jusqu'à 4 grains.

J'ai mis des Cristallins de Bœufs dans l'Esprit de Vinaigre ; ils ont tous augmenté dans leur poids & leurs dimensions ; il y en a quelques-uns qui exposés à l'air, se sont fendus très-régulièrement en séchant, mais les autres se sont trouvés irréguliers.

La plupart des Cristallins que j'ai mis dans l'Huile de Vitriol, sont devenus d'un jaune-brun, opaques, mous comme de la pâte, très-irréguliers & inégaux à leur surface externe. Si on les expose à l'air, ils deviennent d'un brun noir, & ne se séchent jamais bien, la membrane s'est dissoute; l'Huile de Vitriol dulcifiée les a rendus opaques, blancs.

Le mélange d'égale partie d'Huile de Vitriol & d'Eau commune produit le même effet sur les Cristallins que l'Esprit de Vitriol pur.

Nous venons de voir que les Cristallins trempés 24 heures, plus ou moins, dans les Esprits acides de Vitriol, de Vinaigre, deviennent opaques, blancs, aussi-bien que ceux qui ont trempé dans l'Esprit de Nitre ou de Sel, affoiblis avec de l'Eau. Ces Cristallins se fendent quelquefois dans le temps même qu'ils trempent dans la liqueur, mais pour l'ordinaire ils ne se fendent qu'après en avoir été retirés, & avoir été exposés à l'air pendant quelque temps, & pour lors ils se fendent plus ou moins régulièrement en plusieurs endroits de leurs surfaces antérieures & postérieures.

Si l'on sépare ces parties les unes des autres; on les trouve à peu-près semblables aux pièces d'un Oignon qu'on auroit coupé par son axe en plusieurs parties: on peut les séparer par pellicules, qui jointes & unies ensemble, forment des enveloppes qui sont emboîtées les unes dans les autres. Chacune de ces pellicules est formée par une infinité de filets courbes & déliés comme des fils de Soye grege, comme je l'ai déjà dit, & assemblés les uns contre les autres à peu-près parallèlement.

Tous les Cristallins ne se fendent pas de la même manière. Ceux d'Hommes se fendent de la circonférence au centre; les fentes commencent à se former à la circonférence, & se continuent vers le centre, où le plus souvent elles n'arrivent pas. Il y a rarement de la régularité dans ces fentes. Ceux de Poissons commencent toujours au centre des deux surfaces antérieure & postérieure, & se continuent d'une surface à l'autre.

Les

Les Cristallins des Animaux à quatre pieds, que nous avons disséqués, se fendent aussi du centre de leur surface à la circonférence, le plus souvent assés régulièrement, & ces fentes se trouvent disposées de trois manières différentes, mais toujours en rayons.

Dans la première les fentes se trouvent selon la rectitude des fibres, du centre à la circonférence, qui divisent le Cristallin en trois parties, chacune desquelles est divisée en six autres, dont chacune forme un angle.

Dans la seconde on trouve des Cristallins divisés en trois parties, du centre à la circonférence, mais non pas selon la rectitude des fibres, car la division se fait dans les angles de la première sorte, ce qui fait que chacune de ces trois parties se trouve divisée en douze parties selon la rectitude des fibres, mais non pas du centre à la circonférence.

Dans la troisième les Cristallins se divisent d'abord en trois parties comme dans la première manière, puis ils se divisent en trois autres semblables à la seconde, mais ces fentes & ces divisions sont rarement régulières, car il se trouve quelquefois plus de divisions, quelquefois moins, ce qui dépend du plus ou du moins d'adhérence des fibres les unes aux autres qui composent le Cristallin.

Quoiqu'il en soit, chaque couche dont le Cristallin est composé, est produite par une fibre, qui en passant & repassant de la partie antérieure à la postérieure, & de la partie postérieure à la partie antérieure, forme le plan de fibres qui produisent ces couches, à peu-près de la même manière que Leeuwenhoek, qui a donné tant de belles observations faites avec le Microscope, les représente. Il ne dit point qu'il ait mis tremper les Cristallins dans aucune liqueur, & ne dit pas les moyens dont il s'est servi pour les préparer, & rendre ces fibres palpables, il paroît seulement qu'il a examiné ces Cristallins tirés nouvellement des Yeux, & qu'il en a examiné d'autres qui ont été exposés à l'air pendant trois jours. Il s'est sans doute servi du Microscope, quoiqu'il n'en fasse aucune mention, pour moi je n'ai pu découvrir cette structure par

*Arcan. natur.
detect. tom. 2.
p. 66. de for-
matione Cris-
talli.*

26 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 aucun Microscope. Je me suis servi de Loupes de 6 à 7 pouces
 de foyer pour micux découvrir les fibres des Cristallins que
 j'ai mis tremper dans les Esprits acides, mais on peut s'en
 passer; on peut même se servir de Verre d'un plus petit foyer
 selon la disposition des Yeux, il y a des gens qui découvrent
 mieux les fibres du Cristallin avec un Verre de 2 pouces $\frac{1}{2}$
 & 3 pouces de foyer, qu'avec des Verres qui en ont plus
 ou moins.

SOLUTION FORT SIMPLE

D'UN

PROBLEME ASTRONOMIQUE;

*D'où l'on tire une Méthode nouvelle de déterminer
 les Nœuds des Planetes.*

Par M. G O D I N.

P R O B L E M E.

25 Février
 1730.

TR O U V E R le point de l'Ecliptique où le mouvement du
 Soleil en ascension droite est égal à son mouvement en lon-
 gitude.

Figure 1.

SOLUTION. Soit EQ un quart de l'Equateur, EC un
 quart de l'Ecliptique, $pPCQ$ le Colure des Solstices, p le
 Pole de l'Ecliptique, P celui de l'Equateur, PE un Méri-
 dien mené par l'un des Equinoxes. Soit S le point cherché
 sur l'Ecliptique, & Y un autre point aussi sur l'Ecliptique
 infiniment proche du premier, & YZ une portion d'un pa-
 rallele à l'Equateur, on aura le petit Triangle SZY qu'on
 peut considérer comme plan & rectiligne, dont l'angle YSZ
 est égal à l'angle PSC du triangle sphérique PSC . Si par le
 point Y on mene un autre Méridien PYT , la question se
 réduit à trouver le point S de l'Ecliptique, tel que l'arc SY
 soit égal à l'arc RT de l'Equateur.

Dans le Triangle sphérique PCS rectangle en C , on aura cette proportion,

$$\text{Sin. } PS : \text{Sin. } PC :: \text{Rayon} : \text{Sin. } PSC,$$

& dans le petit Triangle on aura

$$YS : YZ :: \text{Rayon} : \text{Sin. } YSZ = PSC,$$

& parce que $TR = YS$,

$$TR : YZ :: \text{Rayon} : \text{Sin. } YSZ,$$

mais on aura aussi cette autre proportion,

$$TR : YZ :: \text{Rayon} : \text{Sin. } PZ \text{ ou } PS.$$

En comparant les deux dernières analogies, il suit que le sinus de l'angle YSZ ou PSC est égal au sinus de l'arc PS .

Pour trouver la valeur de cet arc, multipliez par la première analogie le sinus de PC complément de l'obliquité de l'Écliptique par le Rayon, le produit sera le quarré du sinus de l'arc PS ou de l'angle PSC ; & en logarithmes, si l'on ajoute le logarithme du sinus de $66^{\circ} 31'$ au logarith. du sinus total, la moitié de la somme sera le logarithme du sinus de l'arc PS qu'on trouvera de $73^{\circ} 16' 27''$, son complément SR fera donc de $16^{\circ} 43' 33''$ pour la déclinaison du Soleil au point S au temps de son mouvement en longitude égal à son mouvement en ascension droite, & sa distance SE au plus proche Equinoxe se trouvera par cette analogie

$\text{Sin. } CQ : \text{Sin. } SR :: \text{Sin. } EC \text{ ou le Rayon} : \text{Sin. } ES$
qu'on trouvera de $46^{\circ} 14' 17''$, & par conséquent SC de $43^{\circ} 45' 43''$ à quelques secondes près de ce qui est dans les Tables de M. de la Hire.

Si l'inclinaison de l'Orbite d'une Planete étoit de 15° , le point cherché S seroit éloigné du point C de $44^{\circ} 29' 40''$; & si cette inclinaison étoit de 1° seulement, cet arc SC seroit de $44^{\circ} 40' 15''$, car cet arc s'approche d'autant plus de 45° que l'inclinaison est petite, & au contraire; pour 85 degrés d'inclinaison, par exemple, il est de $16^{\circ} 18' 50''$, ce qui paroîtra évident, si l'on considère que le sinus de l'arc PS doit toujours être moyen proportionnel entre le rayon & le sinus de PC , car dans la première analogie, en permutant; on aura $\text{Sin. } PC : \text{Sin. } PS :: \text{Sin. } PSC = \text{Sin. } PS : \text{Rayon}$;

& par conséquent plus le sinus de PC approchera de la grandeur du rayon, c'est-à-dire, moins l'arc CQ ou l'inclinaison de la Planete sera grande, & plus la moyenne proportionnelle PS approchera aussi du rayon, & par conséquent le point S du point E ; ce sera le contraire, si PC est plus petite.

On se servira de la même Méthode pour toutes les Planetes, suivant les différentes inclinaisons de leurs Orbites à l'Ecliptique & à l'Equateur.

*Regiomont.
Epitom. Al-
mag. lib. 3.
prop. 25.
Voyés aussi
Képler. Epitom.
lib. 3. p. 258.*

Regiomontanus a résolu ce Probleme par les plus grands & les plus petits rapports entre les sinus des arcs de déclinaison & de leurs compléments, & les sinus des arcs, distances de ces points à l'un des Equinoxes; il trouve $46^{\circ} 15'$ pour l'arc ES , ou $43^{\circ} 45'$ pour SC ; mais supposant son obliquité de l'Ecliptique de $23^{\circ} 28'$, moindre que celle que je suppose de $23^{\circ} 29'$, il devoit trouver l'arc SC plus grand d'une minute entière ou environ; ce qui doit venir de son calcul.

*Stevin. Hy-
pomnem. ma-
them. tom. 1.
cosmogr. part. 3.
de mor. caelest.
p. 148. & seq.*

*Mem. de l'A-
cad. 1704.
P. 134.*

Stevin a aussi résolu le Probleme d'après *Regiomontanus*, & par la même méthode, il a prétendu l'éclaircir, mais il l'a rendu trop diffusé. Il suppose l'obliquité de l'Ecliptique de $23^{\circ} 51' 20''$, d'où il trouve l'arc SC de $43^{\circ} 43' 16'' \frac{1}{2}$.

Enfin *M. Parent* en a donné une Solution dans laquelle il employe le Calcul différentiel: je crois l'avoir résolu plus simplement, & d'une manière plus astronomique.

Dans l'ancienne démonstration de *Regiomontanus*, on suppose que le point S est tellement pris, que l'arc PS est moyen proportionnel entre le rayon & le sinus, complément de l'obliquité de l'Ecliptique, mais on n'y démontre pas pourquoi cela donne la solution du Probleme.

Dans celle de *M. Parent* il trouve la Tangente de la distance du Solstice au point S , moyenne proportionnelle entre le rayon & le sinus, complément de l'obliquité de l'Ecliptique, d'où il suit que cette Tangente est égale au sinus, complément de la déclinaison du Soleil au point S de son mouvement médiocre.

Si l'on connoissoit le lieu du point S dans l'Ecliptique, indépendamment du lieu des points E & C , c'est-à-dire, quelle que fût la longitude de ces points, en connoissant seulement la plus grande distance CQ de l'Orbe EC à l'Orbe EQ , on détermineroit la longitude de ces points E & C ; & par conséquent 1.^o si EQ représente l'Ecliptique, & EC l'Orbite d'une Planete, connoissant l'inclinaison CQ de cet Orbite à l'Ecliptique, on trouvera par la méthode ci-dessus, la valeur des arcs SR , SC , & SE ; & trouvant par observation le lieu de la Planete en S dans le temps que son mouvement SY sur son Orbite est égal à son mouvement en longitude TR sur l'Ecliptique, ou bien observant ce lieu S dans le temps que l'inclinaison apparente SR de la Planete est égale à celle qu'on a déterminée par calcul, on aura aussi le lieu des points C & E , c'est-à-dire, des limites & des Nœuds de cette Planete; le Nœud, par exemple, aura une plus grande longitude que le point S de tout l'arc déterminé SE , si la latitude de la Planete va en décroissant, & au contraire elle sera moindre, si la latitude va en augmentant.

Figure 1.

2.^o Si EC est toujours l'Orbite de la Planete, & que EQ soit l'Equateur, connoissant par observation la plus grande déclinaison CQ de la Planete, on déterminera comme ci-dessus les valeurs de SR , SC , & SE ; observant donc le lieu de la Planete, lorsqu'elle a une déclinaison SR égale à la calculée, ou lorsque son mouvement sur son Orbite est égal à son mouvement en ascension droite, on aura l'ascension droite du point S ou R , & par conséquent celles des points E & C , c'est-à-dire, qu'on connoitra le point de l'Equateur où l'Orbite de la Planete le coupe, & le point de l'Equateur auquel répondent les limites de cet Orbite.

Mais connoissant le point où l'Orbite d'une Planete coupe l'Equateur, & le point où l'Ecliptique coupe aussi l'Equateur, on connoitra le point d'intersection de l'Orbite de cette Planete & de l'Ecliptique, il ne faut pour cela que résoudre le Triangle sphérique AFG dans lequel AG représente l'Equateur, AF l'Ecliptique, & GF l'Orbite de la Planete. Dans

Figure 2.

ce Triangle on connoît le côté AG , différence d'ascension droite entre A , l'un des Equinoxes, & G le point de l'Equateur où il est coupé par l'Orbite de la Planete; l'angle en A est l'obliquité de l'Ecliptique, & l'angle en G , ou son supplément, est l'obliquité de l'Orbite de la Planete égale à sa plus grande déclinaison observée; donc on connoitra le côté AF , distance du Nœud de la Planete à l'un des Equinoxes, & l'angle en F de l'inclinaison de l'Orbite de cette Planete à l'Ecliptique.

On peut donc trouver le lieu des Nœuds d'une Planete par l'observation de son inclinaison à l'Ecliptique & de sa déclinaison au temps, de son mouvement médiocre sur son Orbite par rapport à son mouvement sur l'Ecliptique & à son mouvement en ascension droite.

Figure 1. Mais cette théorie si simple ne suffit absolument que lorsqu'on est au centre des Cercles EC & EQ , & que les arcs CQ , SR , sont les véritables latitudes ou déclinaisons, & qu'elles sont invariables, c'est-à-dire, non sujettes à des inégalités optiques, elle ne convient donc, par rapport à la recherche des Nœuds des Planetes, qu'à un Observateur qui feroit dans le Soleil supposé immobile au centre du mouvement de ces Planetes. De ce centre seul les arcs CQ & SR mesurent les véritables inclinaisons des points C & S ; car comme les plus grandes latitudes ou déclinaisons CQ , vûës de la Terre, sont variables suivant le plus ou le moins de distance de la Terre à la Planete, le point S & par conséquent le lieu du Nœud E auroient autant de positions différentes que CQ auroit de différentes valeurs. Donc les plus grandes latitudes ou déclinaisons, vûës de la Terre, ne peuvent servir à la solution de ce Probleme, si ce n'est lorsqu'elles sont égales à ces mêmes choses vûës du Soleil, c'est-à-dire, lorsque la Planete posée dans ses limites, est également éloignée du Soleil & de la Terre, ou en quadrature environ avec le Soleil, ce qui est un cas fort rare.

Cependant comme la détermination des Nœuds des Planetes est très-importante, & qu'on ne sçauroit avoir trop de

Méthodes pour arriver au même but , lorsque chacune a sa difficulté , voici de quelle manière j'emploie celle-ci à cette recherche.

Je suppose seulement que l'on connoisse la théorie du Soleil ou de la Terre , & les distances de la Planete au Soleil , d'où suit la connoissance de ses distances à la Terre.

Soit S le Soleil , T la Terre. APL est l'Orbite d'une Planete posée en P . ARM est l'Ecliptique. Le point A un des Nœuds de la Planete. Connoissant LM la plus grande inclinaison de l'Orbite de la Planete à l'Ecliptique vûe du Soleil , on trouvera , comme ci-dessus , l'inclinaison PR vûe du Soleil telle que la Planete posée en P paroîtra décrire sur son Orbite un arc égal à son arc correspondant sur l'Ecliptique. Si l'on prend donc , de la manière dont on va dire , le lieu de la Planete sur l'Ecliptique en R par rapport au premier point d'Aries , dans le moment que cette Planete a l'inclinaison calculée , dans le Triangle sphérique APR rectangle en R , on connoît le côté PR , & l'angle en $A = LM$; on connoîtra donc AR , & par conséquent le lieu du Nœud A sur l'Ecliptique , vû du Soleil.

Figure 3.

Je suppose donc que l'on observe continuellement les latitudes apparentes de la Planete , c'est-à-dire , l'angle PTR , & que par les distances connües du Soleil à la Terre & à la Planete , on détermine laquelle de toutes les latitudes PR observées , est égale à l'inclinaison calculée vûe du Soleil , en ce cas le point P sera celui d'égalité du mouvement de la Planete sur son Orbite , & en longitude sur l'Ecliptique ; & si l'on observe dans le même moment le lieu de la Planete sur l'Ecliptique en R , vû de la Terre , qui donnera l'angle CTR , on aura , en résolvant le Triangle RST , dont les trois côtés & l'angle en T sont connus , l'angle RST qui comparé avec le lieu héliocentrique de la Terre , donnera la véritable longitude héliocentrique de la Planete réduite à l'Ecliptique ; d'où l'on conclurra , comme ci-dessus , le vrai lieu de la Planete.

Pour les Planetes qui ont des Satellites , le Probleme devient en certains cas plus facile , car on peut quelquefois y

déduire immédiatement de l'observation ce qu'on vient de déterminer par les distances, qui est ce qu'on appelle la seconde inégalité de la Planete; car si l'on sçait assez précisément le temps de la révolution périodique d'un Satellite autour de sa Planete, on observera très-aisément la valeur de l'arc OE de l'Orbite du Satellite compris entre le milieu O de sa demeure dans l'ombre de la Planete & le point E où il paroît vû de la Terre en conjonction avec sa Planete; cet arc est égal à l'angle TPS ; ainsi dans le Triangle TPS , on connoît ST l'angle TPS & l'angle STP , différence entre les lieux apparents du Soleil & de la Planete, on connoitra donc le côté TP ; & dans le Triangle RTP rectangle en R , on connoît l'angle en T & le côté TP ; donc on connoitra TR . Enfin dans le Triangle RTS on connoît ST & TR , & l'angle compris STR , ce qui donnera l'angle RST , différence de longitude entre la Terre & la Planete vûës du Soleil, d'où l'on conclurra, comme ci-devant, le vrai lieu du point A ; Nœud de la Planete.

Je suppose ici, comme on voit, qu'on puisse observer l'immersion & l'émerfion du Satellite de l'ombre de sa Planete, ce qui ne se peut pas dans tous les Satellites, dans le premier de Jupiter, par exemple, & très-rarement dans le second.

On trouvera de la même manière le point de l'E'quateur où il est coupé par l'Orbite d'une Planete vûë du Soleil.

Par ces Méthodes on multiplie les points des Orbites des Planetes qui peuvent servir à déterminer la position de leurs Nœuds; par la Méthode ordinaire, qui est d'observer la Planete proche de ses Nœuds mêmes lorsque sa latitude change de dénomination dans l'espace de quelques jours, on n'a, dans toute la révolution d'une Planete, que deux occasions favorables de faire ces observations, & il faut, de même que nous venons de faire, y supposer les distances de la Planete à la Terre & au Soleil, pour changer les latitudes apparentes & la position apparente du Nœud en inclinaisons & en vrai lieu héliocentrique du Nœud.

Il reste à donner, dans une suite, quelques exemples de ces Méthodes pour différentes Planetes, fondées sur des observations, afin qu'on puisse plus sûrement juger du degré de précision qu'on en peut attendre.

M E M O I R E
SUR LE SEL LIXIVIEL
DU GAYAC.

Par M. B O U R D E L I N.

DANS le Mémoire que je présentai en 1728 à l'Académie, sur la formation des Sels alkalis, je tâchai de prouver que ces Sels n'étoient que des Sels décomposés, & que si la partie grasse des Végétaux contribuoit à leur formation, ce n'étoit qu'en enlevant au Sel essentiel une grande partie de ses Acides, & point du tout en s'unissant avec ce même Sel essentiel, comme le veut M. Stahl, & comme il prétend le prouver par une expérience que je rapportai d'après lui, & de laquelle je tirai des conséquences toutes différentes, & tout-à-fait opposées à celles qu'il en tire. Dans le même Livre, le même Auteur rapporte une expérience assez singulière, concernant ce sujet. On a crû jusqu'ici que le feu formoit seul les Sels alkalis que l'on tire des matières végétales, que cet agent n'avoit besoin, pour former ces Sels, d'aucune aide de la part du Chimiste, ni d'aucune préparation, & qu'il suffisoit de lui livrer une Plante desséchée pour qu'il formât, en la détruisant, autant de Sel lixiviel qu'elle contenoit de matière propre à s'alkalifer. Mais dans l'expérience de M. Stahl la chose se passe différemment; le Chimiste paroît avoir grande part à la production du Sel alkali; ce n'est qu'après que son industrie a tiré du Mixte les matériaux nécessaires pour la composition de ce Sel, qu'il les a rapprochés, & pour ainsi dire, présentés l'un à l'autre, que le feu les combine, les unit

Mem. 1730.

. E

plus étroitement, & opere par ce moyen, & avec ce secours; une production de Sel alkali bien plus abondante. Voici le fait.

M. Stahl fait remarquer, en parlant des Sels alkalis, qu'il y a quelques Végétaux qui n'en donnent pas tant par l'opération ordinaire, c'est-à-dire, lorsque l'on se contente de les faire sécher & de les brûler, que lorsqu'on s'y prend d'une autre façon. Il rapporte pour exemple le bois de Gayac, dont
 » on ne tire, dit-il, par l'incinération seule, que très-peu de Sel
 » alkali; mais si l'on prend, dit M. Stahl, les rapures de ce
 » même bois, qu'on les fasse bouillir un certain temps, que
 » l'on en fasse évaporer la décoction lentement, & jusqu'à sic-
 » cité, la matière qui reste, étant brûlée & légèrement calcinée,
 » donne infiniment plus de Sel fixe. Voilà l'expérience de M.
 Stahl, voyons l'explication qu'il en donne.

» Pour expliquer ce phénomène, dit M. Stahl, il est proba-
 » ble que les parties salines nitreuses qui sont contenues dans
 » le Gayac, y sont logées séparément & à quelque distance des
 » parties huileuses qui sont renfermées dans leurs petites loges
 » particulières. Cela fait que dans l'instant de la déflagration;
 » le feu pousse & chasse hors du Mixte séparément les parties
 » salines & les parties huileuses, qui par ce moyen ne peuvent
 » pas se toucher, se joindre, brûler ensemble, & ainsi se com-
 » biner pour composer le Sel alkali; au lieu que si, par la
 » coction, on tire de leurs cellules chacun de ces deux prin-
 » cipes, enforte qu'ils puissent se confondre librement ensemble
 » dans l'eau, & que par le moyen de l'épaississement de la ma-
 » tière qui reste après l'évaporation poussée jusqu'à siccité, les
 » particules salines & huileuses puissent s'accrocher ensemble,
 » & se mêler les unes avec les autres, & qu'alors on brûle cette
 » matière, l'action du feu peut combiner plus facilement les
 » deux principes qui dans cet état se touchent immédiatement,
 » & de cette combinaison suit l'effet qu'on doit attendre, c'est-
 » à-dire, la production du Sel alkali. M. Stahl, dans cette expli-
 cation de son expérience, ne s'écarte point de ses principes;
 & déduit toujours la formation du Sel alkali d'une Plante,
 du mélange & de l'union intime & durable qui se fait du Sel

essentiel de cette Plante avec sa partie grasse par le moyen du feu, & dans le sein du feu.

Il y a plusieurs choses dans cette explication qu'un Lecteur attentif ne sçauroit aisément passer. Mais, sans entrer dans un plus grand détail, sur quel fondement M. Stahl suppose-t-il une distance si éloignée entre les particules salines & huileuses dans le bois de Gayac? Quelle preuve en pourroit-il apporter? Si l'on regarde le Gayac comme les autres Plantes, c'est-à-dire, comme un assemblage de Vaisseaux ou de Tuyaux arrosés par des liqueurs, dans lesquelles tous les principes de la Plante, & par conséquent l'Huile & le Sel essentiel, sont déjà renfermés, & pour ainsi dire, combinés par la Nature, on accordera difficilement à M. Stahl les différents logements, & les cellules écartées qu'il assigne à ces deux principes. M. Stahl alléguera-t-il en sa faveur une apparence d'analogie qui peut se rencontrer entre les Plantes & les Animaux, dans lesquels, par le moyen des sécrétions, différentes humeurs se trouvent renfermées séparément dans différents réservoirs? Mais pour lors on sera en droit de pousser l'analogie plus loin, & de dire que comme dans les Animaux il se trouve par-tout de l'Huile & du Sel mêlés ensemble, il doit aussi s'en trouver par-tout dans les Plantes. Il est bien vrai que dans certaines liqueurs des Animaux, on découvre distinctement que certains principes y dominent. Mais ces mêmes principes s'y trouvent-ils dans leur première simplicité, s'y trouvent-ils totalement dégagés les uns des autres? Rencontre-t-on, par exemple, du Sel pur, de l'Huile pure? Les graisses des Animaux ne contiennent-elles pas du Sel, même en assez grande quantité? Dans la Bile, toute sulphureuse qu'elle est, ne dé mêle-t-on pas, même par le seul goût, le Sel qui y est mêlé? Avanceroit-on avec raison, que dans la Salive il ne se trouve purement & simplement que du Sel? De même dans les Plantes, leurs sucs les plus aqueux en apparence, ne contiennent-ils que du Sel, ne s'y rencontre-t-il pas quelque portion d'Huile? Quoique la Résine soit la partie grasse des Plantes, cette Résine n'est-elle purement que de l'Huile? Quand on la

brûle, ne donne-t-elle pas du Sel alkali? preuve qu'elle contient une portion de Sel essentiel qui se décompose dans le feu. Mais si, dans les Végétaux, comme dans les Animaux, la partie saline & la partie grasse se trouvent mêlées ensemble, même dans les liqueurs dans lesquelles on auroit le plus lieu de croire qu'elles existent séparément l'une de l'autre, que doit-on penser de tout le corps de la Plante en général, dont les canaux contiennent les Suc qui sont l'origine & la source de toutes les sécrétions qui se font dans la Plante, comme le Sang l'est de celles qui se font dans l'Animal, & dans lesquels par conséquent ces deux principes sont contenus confusément, avant de se séparer pour être renfermés dans leurs différents réservoirs. M. Stahl ne nie pas non plus qu'il se rencontre du Sel & de l'Huile combinés ensemble dans toute l'étendue de la Plante, puisqu'il avoue qu'en brûlant le Gayac à la façon ordinaire, on en tire du Sel alkali, mais on l'en tire, dit-il, en moindre quantité. La difficulté ne roule donc que sur le plus ou le moins, & le Gayac donne moins de Sel alkali par ce procédé, parce que la distance éloignée qui se rencontre, selon M. Stahl, entre l'Huile & le Sel dans ce bois, fait qu'une grande partie de ces deux principes échappe au mélange & à la combinaison que le feu en feroit, s'ils étoient plus rapprochés, & si toute l'Huile requise pour la formation du Sel lixiviel pouvoit se combiner avec tout le Sel essentiel.

Je n'opposerai à ce raisonnement que l'expérience que fournit le Nitre fixé par les charbons. Ce Sel ne s'alkalise que par le moyen de la poudre de Charbon que l'on y jette, lorsqu'il est en fusion dans le Creuset qui le contient. Il se fait, pour lors, une liaison étroite & une union de la partie grasse du charbon avec l'acide du Nitre qu'elle emporte avec elle, & à qui elle fait suivre la même détermination de mouvement qu'elle a reçu du feu, & qu'elle suit elle-même, comme j'ai tâché de le prouver dans mon Mémoire de 1728. Il se fait donc, avant cette fuite de l'Acide nitreux, une liaison de la partie grasse du Charbon avec ce Sel. Mais pourquoi la même

chose n'arrivera-t-elle pas entre l'Huile & le Sel essentiel d'une même Plante? L'Acide du Nitre & la partie grasse du Charbon sont deux substances tout-à-fait étrangères l'une à l'autre, cependant elles s'unissent lorsque l'on jette la poudre de Charbon dans le Creuset; tout le Nitre qui y est contenu se décompose, & devient du Sel alkali. Est-il vrai-semblable qu'il se trouve plus de proximité entre ces deux substances; qu'il ne s'en trouve entre deux pareils principes renfermés dans une même Plante, & que la Nature avoit intimement mêlés & combinés dans les liqueurs & le suc nourricier qui a servi à la végétation, l'accroissement & la conservation de cette Plante? Que l'on explique la formation du Sel alkali par l'union fixe & durable de la partie grasse avec le Sel essentiel entier, selon l'hypothèse de M. Stahl, ou qu'on l'explique, selon la mienne, par la liaison qui se fait de cette même partie grasse avec l'Acide seulement du Sel essentiel, lequel Acide est emporté par elle; toujours, selon l'un ou l'autre sentiment; se fait-il une union étroite, & toujours sera-t-on fondé à demander pourquoi cette union se fait entre deux matières tout-à-fait étrangères l'une à l'autre, & pourquoi elle ne se feroit pas entre deux semblables substances, qui sont déjà rassemblées & mêlées ensemble dans un même Végétal. Mais passons du vrai-semblable au vrai; après avoir réfuté sommairement l'explication de M. Stahl, suivons son expérience, & examinons-en la vérité.

La première fois que je lus avec attention l'expérience de M. Stahl, sa singularité fit naître en même temps ma surprise & mes doutes. Je trouvois qu'il y avoit de l'industrie à remédier ainsi à l'empêchement que la Nature sembloit avoir formé dans le Gayac à une production abondante de Sel alkali. Mais je n'étois pas bien convaincu de la réalité de l'obstacle, ni de l'efficacité du remède qu'on y apportoit. Malgré la grande réputation que s'est acquis M. Stahl, & qu'il s'est acquis à juste titre, la confiance que j'avois à une expérience qu'il citoit, & que je devois supposer qu'il avoit faite, ne pût jamais aller jusqu'à me persuader que la simple décoction du

Gayac dût apporter un si grand changement dans la quantité de Sel fixe qu'on en tire. Je ne concevois pas que l'Eau bouillante seule, soit comme échauffée par le feu, soit comme composée de parties qui, à l'aide du feu, pussent s'insinuer dans les pores d'un Mixte, eût assés d'efficacité pour tirer d'un bois, dont le tissu est aussi serré & aussi dense que l'est celui du Gayac, une si grande quantité de Sel essentiel. La peine que j'avois à concilier mes idées avec l'expérience de M. Stahl, me fit prendre le parti de la réitérer d'après lui. Mais comme il ne suffisoit pas de tirer le Sel alkali de la décoction résineuse du Gayac, & qu'il falloit le comparer avec celui que fourniroit une pareille quantité de Gayac brûlé à la façon ordinaire, j'en ai brûlé de trois façons différentes. J'ai brûlé le Gayac en morceaux, comme on le fait ordinairement, j'en ai brûlé en rapures, & enfin j'ai fait bouillir, pour mon expérience, des rapures de Gayac, desquelles j'ai tiré la Résine par ce moyen, & ces mêmes rapures bouillies & dépouillées de leur partie grasse, je les ai fait sécher, & les ai brûlé ensuite.

De quelque façon que j'aye brûlé le Gayac, soit en rapures qui eussent bouilli, soit en rapures qui n'eussent point bouilli, soit en substance, je veux dire en morceaux, j'en ai toujours brûlé six livres à la fois. De ces trois façons différentes, la plus simple fut celle qui me donna à la première opération le plus de Sel lixiviel. Six livres de Gayac brûlé en morceaux m'en fournirent un gros & 7 grains, c'est-à-dire, 79 grains. Pareil poids de rapures ne me donna que 39 grains. Je n'insisterai point ici sur la raison qui fit que les rapures me donnèrent moins de Sel que le bois. Je dirai seulement que je crois qu'il y eut de ma faute, parce que je ne lessivai leurs cendres que deux fois, & peut-être une troisième ou une quatrième lessive m'auroient-elles donné encore assés de Sel lixiviel pour égaler la quantité que m'en avoit fourni le Gayac brûlé en morceaux.

Je pris six autres livres de Gayac en morceaux, je le brûlai, je le réduisis en cendres, que je calcinaï ensuite dans le

Creuset, elles ne me fournirent en deux évaporations que 51 grains de Sel, sçavoir 45 grains à la première, & 6 à la seconde. Je pris ensuite des rapures de Gayac, que j'avois fait bouillir pendant six heures, & qui pesoient six livres avant l'ébullition. Je les fis sécher pour les brûler. Leurs cendres calcinées & lessivées me fournirent en trois évaporations 58 grains de Sel lixiviel. On voit par-là que si dans la première expérience le Gayac en morceaux l'avoit emporté par le produit du Sel lixiviel sur les rapures, dans celle-ci les rapures, quoique bouillies, & qui devoient avoir perdu une partie de leur Sel, l'ont cependant réciproquement emporté sur le bois.

Quand même j'aurois été bien persuadé de la vérité & de l'exactitude de l'expérience de M. Stahl, cette seule circonstance auroit suffi pour faire naître mes doutes. Les rapures de Gayac bouillies & séchées, ressembloient trop par leur produit au bois de Gayac brûlé en morceaux, & en approchoient de trop près pour que je pusse attendre de la matière résineuse, provenant de la décoction épaissie, une quantité considérable de Sel lixiviel. Car comme il ne pouvoit se trouver de Sel dans cet extrait résineux, qu'à proportion de ce que pouvoient lui en avoir communiqué les rapures de Gayac, & par conséquent à proportion de ce qu'elles en avoient perdu, il n'étoit pas naturel d'attendre de cette matière résineuse une grande quantité de Sel lixiviel, lorsque les rapures, qui avoient fourni dans la décoction cette même Réfine, conservoient encore tant de Sel. J'aurois eu quelque sujet de me flatter plus justement de l'espérance que donne M. Stahl, si j'avois vû que l'ébullition eût dépouillé mes rapures de Gayac de leur Sel, au point qu'elles ne m'en eussent presque pas fourni en les brûlant, après les avoir fait sécher. Pour lors il y auroit eu quelque raison d'attendre de la décoction épaissie la multiplication considérable de Sel fixe que M. Stahl en promet. Car à s'en rapporter aux termes dans lesquels s'exprime M. Stahl, il semble que le Gayac, dont on a tiré la teinture ou l'extrait par le moyen de l'ébullition, devienne,

pour ainſi dire , une Tête-morte , & une matière abſolument dénuée de tout ſon Sel , & que tout ce Sel paſſe dans la décoction , dans laquelle il doit produire par l'incinération , en ſe combinant avec la partie graſſe , une quantité de Sel lixiviel infiniment , & ſans aucune comparaifon plus conſidérable que n'en donne le Gayac brûlé à la façon ordinaire. Que M. Stahl regarde les rapures de Gayac qui ont bouilli comme une Tête-morte dénuée de ſon Sel eſſentiel , il n'y a preſque pas lieu d'en douter ; il paroît en faire ſi peu de cas , que uniquement attentif au produit de l'extrait , il ſemble rejeter comme inutiles les rapures qui l'ont fourni , & ne conſeille même pas de les brûler après en avoir tiré la Réſine & le Sel par le moyen de la décoction. Il me reſte maintenant à détailler mon expérience telle que je l'ai faite d'après M. Stahl.

Je pris ſix livres de rapures de Gayac. Je les fis bouillir pendant ſix heures. J'en fis évaporer la décoction juſqu'à ſiccité. Il me reſta de cette évaporation 7 gros de matière réſineuſe , & ces 7 gros de matière réſineuſe ne me donnerent , par la calcination & la leſſive des cendres , que 4 grains de Sel lixiviel. Quoique la quantité de Sel lixiviel que m'avoient donné mes rapures bouillies & ſéchées , eût commencé à me faire ſouſçonner le peu que m'en fourniroit leur réſidu réſineux , un reſte de préjugé pour une expérience citée par M. Stahl , & que je devois croire qu'il avoit fait lui-même , me tenoit encore en ſuſpens ; & j'avoüerai que je vis avec ſurpriſe combien ma méfiance fut juſtifiée. J'avois travaillé auparavant de la même manière douze livres de rapures de Gayac. J'en avois tiré 10 gros d'extrait réſineux , qui ne m'avoient produit que 14 grains de Sel lixiviel. Mais il m'étoit arrivé un accident en faiſant cette opération. Un grand Vaifſeau de terre , dont je me ſervois pour faire bouillir mes rapures de Gayac , s'étoit caſſé ſur le feu , après y avoir été cinq heures. Il s'étoit répandu une certaine quantité de décoction , je ne ſçavois à quoi pouvoit monter ce déchet. Cet accident , joint au peu de Sel lixiviel que j'avois tiré de l'extrait réſineux de ces douze livres de rapures , me fit naître quelques

quelques scrupules. Comme j'avois toujourns présente à l'esprit l'explication que M. Stahl donne à son expérience, & la quantité considérable de Sel lixiviel que produit selon lui le Gayac travaillé de cette façon, je ne doutai presque point que l'opération ne fût manquée, & que ce ne fût ma faute si le Gayac m'avoit si peu donné de Sel lixiviel. Je pris donc le parti, pour ma propre satisfaction, de réitérer l'expérience avec six livres de rapures de Gayac, comme je viens de le dire ci-dessus. Elle fut exactement faite, & servit à dissiper mes doutes. Quand je vis que 7 gros d'extrait résineux, provenant de la décoction de mes six livres de rapures de Gayac, ne me donnoient que 4 grains de Sel lixiviel, je trouvai qu'il n'étoit point étonnant que 10 gros de pareil résidu, provenant des douze livres de rapures de Gayac que j'avois travaillé précédemment, ne m'eussent donné que 14 grains de ce même Sel. Ce raisonnement me parut pendant quelque temps assés plausible, & j'en serois demeuré-là, si une dernière réflexion ne m'en eût empêché.

Il est difficile de vouloir être exact, sur-tout en Chimie, sans devenir un peu scrupuleux. Comme M. Stahl, dans l'exposé de son expérience, ne limite point la durée de l'ébullition du Gayac, & qu'il dit simplement qu'il faut le faire bouillir un peu de temps, j'imaginai que je n'avois peut-être pas donné à ses termes toute leur étendue, & que faute de cela je n'avois pas poussé l'ébullition assés loin. Ce scrupule ne me permit pas de m'en tenir à mes expériences précédentes, il fallut les réitérer de nouveau. Je n'avois donné que six heures de feu à la décoction des dernières rapures de Gayac dont j'avois tiré la Résine, je pris le parti de leur en donner douze cette fois-ci. Je fis acheter douze livres de rapures de Gayac. Je les partageai en deux ; j'en pris six, que je brûlai comme j'avois déjà fait, sans autre préparation. Elles me donnerent à la première lessive 90 grains de Sel lixiviel. Les six livres restantes, je les fis bouillir douze heures entières, ayant soin de renouveler de temps en temps l'eau, de crainte qu'elle ne se tarît, & que la matière ne se brûlât pêle-mêle,

c'est-à-dire les rapures, & la Réfine que l'eau bouillante en détachoit. J'eûs de cette décoction 9 gros de Réfine, au lieu que des six livres que j'avois fait bouillir précédemment, je n'en avois tiré que 7 gros. Cette augmentation d'extrait me fit espérer plus de Sel lixiviel, & mon espérance se trouva bien fondée. Je tirai de mes neuf gros d'extrait résineux, après la calcination & la lessive des cendres, 3 2 grains de Sel lixiviel. C'étoit, à la vérité, beaucoup plus que je n'en avois tiré dans mes deux opérations antérieures ; mais cela ne répondoit cependant pas, à beaucoup près, aux promesses de M. Stahl, ni au produit des six livres de rapures que je venois récemment de brûler sans les avoir dépouillé de leur partie grasse. Il y avoit encore loin de 3 2 à 90. J'étois bien sûr de mes rapures, elles étoient les mêmes ; ainsi je devois en obtenir au moins la même quantité de Sel lixiviel par le procédé de M. Stahl que par le mien. Cependant tout le produit de la Réfine calcinée & lessivée se bornoit à 3 2 grains. Il falloit donc que les rapures, qui avoient bouilli, conservassent ce qui manquoit de Sel à la décoction épaissie. Pour m'en assurer, j'eûs encore recours à la calcination des cendres des rapures dont j'avois tiré la Réfine. Six livres de ces rapures que j'avois employé pour la décoction, s'étoient réduites à cinq. Elles étoient beaucoup plus brunes que les autres qui m'étoient restées des opérations précédentes. Je brûlai ces cinq livres ; les cendres qui en provinrent, ayant été bien calcinées, devinrent d'une couleur approchante d'un chamois un peu foncé. Elles se réduisirent en une poudre aussi fine que si elle eût été porphyrisée, & qui s'envoloit pour peu qu'on remuât le Creuset qui les contenoit. Ces cendres ne se pelotonnerent point, comme le font ordinairement, sur la fin de la calcination, celles qui contiennent beaucoup de Sel lixiviel. Leur sécheresse & leur légèreté me fit mal augurer d'abord de leur richesse, cependant ma prévention se trouva mal fondée. Ces cendres, tout arides qu'elles paroissoient, m'ont donné un tiers & presque moitié plus de Sel lixiviel que celles du résidu résineux. J'ai fait de chacune de ces trois sortes de cendres

six lessives. Les rapures qui n'avoient point bouilli, & qui avoient été brûlées à la façon ordinaire, m'ont donné en tout 130 grains de Sel lixiviel. Les rapures qui avoient bouilli pendant douze heures entières, & dont j'avois tiré la Résine, m'ont donné 78 grains, & l'extrait résineux provenant de ces mêmes rapures bouillies, & duquel M. Stahl promet un produit si abondant, ne m'a donné que 47 grains & demi de Sel lixiviel.

Il est aisé de voir, par le détail de cette dernière expérience, que j'avois eu quelque raison de douter de l'exactitude & de la vérité de celle que rapporte M. Stahl. Tant s'en faut que les cendres de l'extrait résineux ne l'emportent par l'abondance de leur Sel lixiviel sur celles des rapures de Gayac brûlé à la façon ordinaire, qu'au contraire elles le cedent en quantité, même aux cendres des rapures qui ont bouilli, desquelles cet extrait résineux est le produit. Il ne se trouve donc plus rien d'étonnant ni de mystérieux dans l'opération de M. Stahl. La décoction emporte une partie du Sel essentiel du Gayac, & le confond avec la partie-grasse de ce bois; de-là il résulte dans la décoction épaissie, autant de Sel fixe que l'ébullition a ôté de Sel essentiel aux rapures. Ce qui en est resté aux rapures après l'ébullition, se retrouve en Sel lixiviel dans leurs cendres. Ainsi tirer le Sel lixiviel du Gayac à la façon de M. Stahl, ce n'est que diviser un tout en deux parties, c'est obtenir par deux opérations ce qu'on peut obtenir par une seule, c'est augmenter la peine sans augmenter le profit.

On me demandera peut-être d'où vient que les cendres du Gayac qui a été brûlé à la façon ordinaire, ont donné seules plus de Sel lixiviel que celles des rapures bouillies & de l'extrait résineux jointes ensemble, puisque celles-ci ont fourni quatre grains & demi moins que les autres. La réponse est aisée à faire. Après l'évaporation d'une lessive, on a beau gratter le vaisseau dans lequel elle a été faite, quelque soin que l'on prenne, il y reste toujours un peu de Sel, & cette petite quantité du Sel lixiviel qui s'attache au vaisseau est

proportionnée à l'étendue de la surface de ce même vaisseau. Quelque peu sensible que paroisse ce déchet dans une seule évaporation, il doit le devenir, & augmenter après plusieurs opérations. Les rapures de Gayac, qui m'ont servi dans ces dernières expériences, étoient les mêmes, puisque je n'avois fait qu'en partager douze livres en deux parts. Elles devoient par conséquent contenir autant de Sel les unes que les autres. Mais ces trois sortes de cendres ont été lessivées chacune six fois, comme je l'ai déjà dit. Regardons maintenant les cendres du résidu résineux & celles des rapures bouillies, comme deux parties ne faisant qu'un même tout, c'est-à-dire, comme les cendres de six livres de Gayac. Il s'ensuivra que ces cendres-ci ont souffert le déchet de douze opérations, pendant que celles des six livres qui ont été brûlées à la façon ordinaire, n'ont souffert que le déchet de six évaporations. Supposé que celles-ci aient perdu à chaque évaporation trois quarts de grain de Sel lixiviel, ce qui est peu de chose, & ce qui fera en tout quatre grains & demi pour les six évaporations, il s'ensuivra que les autres en auront perdu neuf.

Je ne dirai rien ici sur la nature du Sel lixiviel du Gayac. J'ai crû avoir lieu de penser, pour plusieurs raisons, qu'il n'étoit gueres alkali, peut-être même pourroit-il se faire qu'il ne le fût point du tout. En ce cas M. Stahl auroit bien perdu de la peine à en expliquer la formation. Je n'ose pourtant pas encore prononcer que ce Sel ne soit absolument point Alkali. Mais ce que je puis avancer avec certitude, c'est que s'il l'est, il l'est peu. Je renvoye cette discussion à un autre Mémoire, dans lequel je me propose d'examiner les variétés qui se rencontrent entre différents Sels lixiviels.



EXAMEN ET RESOLUTION
DE QUELQUES QUESTIONS
SUR LES JEUX.

Par M. NICOLE.

ON peut considérer tous les Jeux, que l'amusement ou le desir d'augmenter son argent ont inventés, sous deux especes. La première espece renferme les Jeux où le hazard seul a part, & qui par leur nature mettent les Joüeurs dans différentes conditions, en sorte que l'un ait avantage sur l'autre, comme dans les Jeux de la Bassette, du Pharaon, & des Trois Dés, &c. La seconde espece renferme les Jeux où le hazard étant égal pour les Joüeurs comme dans le Piquet, &c. les forces ou degrés d'habileté entre les Joüeurs sont différents.

11 Février
1730.

Entre les divers Problemes que l'on peut proposer sur chacune de ces deux especes de Jeux, il y en a qui leur sont communs, la plus grande probabilité de gagner pour l'un des Joüeurs, pouvant venir également de la nature du Jeu qui lui donne de l'avantage, ou de la supériorité d'habileté.

La question que l'on examine ici est de cette espece, elle m'a été faite plusieurs fois par de gros Joüeurs : la voici.

Deux Joüeurs jouent une partie à un Jeu quelconque, par exemple au Piquet ; l'un des Joüeurs a plus de probabilité de gagner cette partie qu'il n'en a de la perdre, on demande, lorsque ces Joüeurs conviennent de jouer un certain nombre de parties, si le Joüeur supérieur a toujours le même avantage sur l'autre, ou le même degré de probabilité de gagner plus de parties que l'autre ; ou si cette probabilité augmente, on demande selon quelle loi se fait cette augmentation.

PROBLEME.

Deux Joïeurs , dont les forces sont entr'elles comme p & q , joïent au Piquet un certain nombre de parties , on demande quelle probabilité il y a que le Joïeur le plus fort gagne, ce que les Joïeurs appellent la queue des paris, & quel est son avantage. Celui qui perd, est celui qui est marqué le plus de fois dans le cours des parties que l'on est convenu de joïer.

Pour résoudre ce Probleme, il faut découvrir d'abord quel est l'avantage de ce Joïeur ; lorsque l'on ne joïe que deux parties, ensuite lorsque l'on en joïe quatre, puis six, huit, dix, & enfin le nombre dont on est convenu. Car il est clair que son sort, lorsque l'on en joïe douze, par exemple, doit résulter de l'examen des différents états dans lesquels cette partie de Jeu peut se trouver dans tout le cours de ces douze parties, & que quelques-uns de ces états répondent à la situation où seroient les deux Joïeurs, s'ils ne joïoient qu'en deux parties, ou en quatre, six, huit & dix.

SOLUTION.

J'appelle *Pierre* le premier Joïeur, dont la force est exprimée par p , & *Paul* le second Joïeur, dont la force est exprimée par q ; p est plus grand que q .

Soit supposé qu'ils joïent d'abord en deux parties, soit nommé a l'argent que l'on gagne, lorsque l'on gagne le pari. Cela posé :

Si l'on nomme f le sort de Pierre que l'on cherche, x son sort lorsqu'il gagne la première partie, & y lorsqu'il la perd,

on aura ces E'quations, $f = \frac{p \times x + q \times y}{p + q}$, $x = \frac{p \times a + q \times o}{p + q}$ &

$y = \frac{p \times o + q \times a}{p + q}$, dans lesquelles les nombres qui sont écrits

au dessus de chaque membre de ces E'quations, servent à exprimer ce que chaque Joïeur a gagné de parties. Donc

$f = \frac{p \times a p + q \times a q}{p + q} = \frac{a p p - a q q}{p + q}$, qui est le sort de Pierre,

ou son avantage, lorsque l'on joue en deux parties.

Soit supposé maintenant que ces Joueurs jouent en quatre parties.

Si l'on nomme f le fort de Pierre que l'on cherche, x son fort lorsqu'il gagne la première partie, y lorsqu'il la perd; z son fort, lorsqu'ayant gagné la première partie, il gagne encore la seconde; r son fort, lorsqu'ayant gagné les deux premières parties, il perd la troisième, on aura ces Equations,

$$f = \frac{p \times x + q \times y}{p+q}, \quad x = \frac{p \times z + q \times \frac{ap - aq}{p+q}}{p+q}, \quad z = \frac{p \times a + q \times r}{p+q},$$

$$r = \frac{p \times a + q \times o}{p+q} = \frac{ap}{p+q}. \quad \text{Donc } z = \frac{ap}{p+q} + \frac{apq}{p+q}^2$$

$$= \frac{app + 2apq}{p+q} \quad \& \quad x = \frac{ap^3 + 2appq + appq - aq^3}{p+q}^3$$

$$= \frac{ap^3 + 3appq - aq^3}{p+q}^3.$$

Pour déterminer y , soit encore nommé t le fort de Pierre, lorsqu'ayant perdu la première partie, il perd encore la seconde, & u son fort, lorsqu'ayant perdu les deux premières parties, il gagne la troisième, on aura ces nouvelles Equations,

$$y = \frac{p \times \frac{ap - aq}{p+q} + q \times t}{p+q}, \quad t = \frac{p \times u + q \times a}{p+q},$$

$$u = \frac{p \times o + q \times a}{p+q} = \frac{qa}{p+q}. \quad \text{Donc } t = \frac{apq}{p+q}^2$$

$$= \frac{qa}{p+q} = \frac{2apq - aq^2}{p+q} \quad \& \quad y = \frac{ap^3 - apq^2 - 2apq^2 - aq^3}{p+q}^3$$

$$= \frac{ap^3 - 3apq^2 - aq^3}{p+q}^3; \quad \& \text{ en substituant dans la première}$$

Equation pour x & y leurs valeurs, il vient

$$f = \frac{ap^4 + 3ap^3q - apq^3 + ap^3q - 3apq^3 - aq^4}{p+q}^4 = \frac{ap^4 + 4ap^3q - 4apq^3 - aq^4}{p+q}^4.$$

qui est le fort cherché de Pierre, ou son avantage, lorsque l'on joue en quatre parties.

Si l'on suppose maintenant que l'on joue en six parties, en employant autant d'inconnues que l'on en a besoin, on aura toutes les Equations suivantes,

$$f = \frac{p \times x + q \times y}{p+q}, \quad x = \frac{p \times z + q \times \frac{ap^4 + 4ap^3q - 4apq^3 - aq^4}{p+q}}{p+q},$$

$$z = \frac{p \times r + q \times t}{p+q}, \quad r = \frac{p \times u + q \times u}{p+q}, \quad u = \frac{p \times a + q \times m}{p+q},$$

$$m = \frac{p \times a + q \times o}{p+q} = \frac{ap}{p+q}. \text{ Donc } u = \frac{ap}{p+q} + \frac{apq}{p+q}$$

$$= \frac{app + 2apq}{p+q}, \quad r = \frac{ap}{p+q} + \frac{appq + 2apqq}{p+q} = \frac{ap^3 + 3appq - 3apqq}{p+q}.$$

$$p \times \frac{app + 2apq}{p+q} + q \times \frac{app - aqq}{p+q}$$

Pour déterminer t , on a $t = \frac{p \times \frac{app + 2apq}{p+q} + q \times \frac{app - aqq}{p+q}}{p+q}$

$$= \frac{ap^3 + 3appq - aq^3}{p+q}. \text{ Donc } z = \frac{ap^4 + 4ap^3q + 6appqq - aq^4}{p+q}.$$

D'où enfin on a $x = \frac{ap^5 + 5ap^4q + 10ap^3qq - 5apq^4 - aq^5}{p+q}.$

Pour déterminer y , on a ces autres Equations

$$j = \frac{p \times \frac{ap^4 + 4ap^3q - 4apq^3 - aq^4}{p+q} + q \times k}{p+q}, \quad k = \frac{p \times f + q \times h}{p+q},$$

$$f = \frac{p \times \frac{app - aqq}{p+q} + q \times e}{p+q}, \quad e = \frac{p \times d + q \times a}{p+q}, \quad d = \frac{p \times o + q \times a}{p+q}$$

$$= -\frac{qa}{p+q}. \text{ Donc } e = -\frac{pqa}{p+q} - \frac{qa}{p+q} = -\frac{2apq - aqq}{p+q},$$

$$\text{donc } f = \frac{ap^3 - 3apqq - aq^3}{p+q}; \text{ on a aussi } h = \frac{p \times -\frac{2apq - aqq}{p+q} + q \times a}{p+q} =$$

$$= - \frac{3appq - 3apq^2 - aq^3}{p+q^3}, \text{ donc } k = \frac{ap^4 - 6appq + 4apq^3 - aq^4}{p+q^4},$$

$$\& \text{ enfin } y = \frac{ap^5 + 5ap^4q - 10appq^2 - 5apq^4 - aq^5}{p+q^5}. \text{ Et en}$$

substituant dans la première Equation, pour x & y , les valeurs trouvées, il vient

$$f = \frac{ap^6 + 6ap^5q + 15ap^4q^2 - 15appq^4 - 6apq^5 - aq^6}{p+q^6}$$

pour le sort cherché de Pierre, ou son avantage, lorsque l'on joue en six parties.

Soit supposé maintenant que l'on joue en huit parties, & que A représente le sort de Pierre, lorsque l'on joue en deux parties, B lorsque l'on joue en quatre parties, C lorsque l'on joue en six parties.

Si l'on employe autant d'inconnues que l'on en a besoin, on aura toutes les Equations suivantes,

$$f = \frac{p \times x + q \times y}{p+q}, x = \frac{p \times z + q \times C}{p+q}, z = \frac{p \times u + q \times e}{p+q},$$

$$u = \frac{p \times r + q \times n}{p+q}, r = \frac{p \times a + q \times m}{p+q}, m = \frac{p \times a + q \times k}{p+q},$$

$$k = \frac{p \times a + q \times l}{p+q}, l = \frac{p \times a + q \times o}{p+q} = \frac{ap}{p+q}. \text{ Donc } k = \frac{app + 2apq}{p+q},$$

$$m = \frac{ap^3 + 3appq + 3apq^2}{p+q} \& r = \frac{ap^4 + 4ap^3q + 6appq^2 + 4apq^3}{p+q}.$$

$$\text{On trouvera aussi } n = \frac{p \times \frac{ap^3 + 3appq + 3apq^2}{p+q} + q \times h}{p+q}.$$

$$h = \frac{p \times \frac{app + 2apq}{p+q} + q \times A}{p+q} = \frac{ap^3 + 3appq - aq^3}{p+q}. \text{ Donc}$$

$$n = \frac{ap^4 + 4ap^3q + 6appq^2 - aq^4}{p+q}; \& \text{ en substituant pour } e$$

50 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
& n les valeurs que l'on vient de trouver, il vient

$$u = \frac{ap^5 + 5ap^4q + 10ap^3q^2 + 10ap^2q^3 - aq^5}{p+q}.$$
 Pour trouver

$$p \times \frac{ap^4 + 4ap^3q + 6ap^2q^2 - aq^4}{p+q} + q \times \frac{ap^3 + 3ap^2q + 3apq^2 - aq^3}{p+q}$$

la valeur de t , on a $t = \frac{ap^5 + 5ap^4q + 10ap^3q^2 + 10ap^2q^3 - aq^5}{p+q}.$ Donc

$$= \frac{ap^5 + 5ap^4q + 10ap^3q^2 + 10ap^2q^3 - aq^5}{p+q}.$$

$$z = \frac{ap^6 + 6ap^5q + 15ap^4q^2 + 20ap^3q^3 - 6apq^5 - aq^6}{p+q},$$
 & enfin

$$x = \frac{ap^7 + 7ap^6q + 21ap^5q^2 + 35ap^4q^3 - 21ap^2q^5 - 7apq^6 - aq^7}{p+q}.$$

Pour déterminer y , on a toutes ces Equations

$$y = \frac{p \times C + q \times g}{p+q}, \quad g = \frac{p \times f + q \times e}{p+q}, \quad f = \frac{p \times B + q \times d}{p+q},$$

$$d = \frac{p \times c + q \times b}{p+q}, \quad c = \frac{p \times A + q \times Y}{p+q}, \quad Y = \frac{p \times X + q \times a}{p+q},$$

$$X = \frac{p \times 0 + q \times a}{p+q} = \frac{aq}{p+q}.$$
 Donc $Y = \frac{2apq - aqq}{p+q},$

$$\& c = \frac{ap^3 - 3apq^2 - aq^3}{p+q}.$$
 Pour trouver la valeur de b , on a

$$b = \frac{p \times Z + q \times a}{p+q}, \quad Z = \frac{p \times \frac{aq}{p+q} + q \times a}{p+q} = \frac{2apq - aqq}{p+q},$$

donc $b = \frac{3apq - 3apq^2 - aq^3}{p+q};$ ainsi en substituant les

valeurs de b & c , il vient $d = \frac{ap^4 - 6ap^2q^2 - 4apq^3 - aq^4}{p+q},$

donc $f = \frac{ap^5 + 5ap^4q - 10ap^2q^3 - 5apq^4 - aq^5}{p+q}.$ Pour trouver

$$p \times \frac{ap^4 - 6ap^2q^2 - 4apq^3 - aq^4}{p+q} + q \times \frac{ap^3 + 3ap^2q + 3apq^2 - aq^3}{p+q}$$

la valeur de e , on a $e = \frac{ap^5 + 5ap^4q - 10ap^2q^3 - 5apq^4 - aq^5}{p+q}.$

$$V = \frac{p \times - \frac{3ap^2q - 3apq^2 - aq^3}{p+q} + q^0 \times - a}{p+q} =$$

$$\frac{4ap^3q - 6appqq - 4apq^3 - aq^4}{p+q}, \text{ donc } e =$$

$$\frac{ap^5 - 10ap^3qq - 10appq^3 - 5apq^4 - aq^5}{p+q}. \text{ Maintenant si l'on}$$

substitue pour f & e les valeurs trouvées, on aura

$$g = \frac{ap^6 + 6ap^5q - 20ap^3q^3 - 15appq^4 - 6apq^5 - aq^6}{p+q}. \text{ Donc}$$

$$\text{enfin } y = \frac{ap^7 + 7ap^6q + 21ap^5qq - 35ap^3q^4 - 21ap^3q^5 - 7apq^6 - aq^7}{p+q};$$

Et en substituant, dans la première Equation, pour x & y les valeurs trouvées, il vient

$$f = \frac{ap^8 + 8ap^7q + 28ap^6q^2 + 56ap^5q^3 - 56ap^3q^5 - 28appq^6 - 8apq^7 - aq^8}{p+q}$$

qui est le fort cherché de Pierre, ou son avantage, lorsque l'on joue en huit parties.

On pourroit, par la même voye, déterminer le sort de Pierre, lorsque l'on joue dix parties, & ensuite lorsque l'on en joue un plus grand nombre; mais le nombre des Equations, qu'il faudroit parcourir pour résoudre ces autres cas, devenant fort considérable, il est plus simple, pour les résoudre, d'examiner les grandeurs qui ont été trouvées pour les cas précédents, de les comparer entr'elles, & de découvrir par cette comparaison la loi selon laquelle elles croissent. Les grandeurs, qui ont été trouvées, sont

$$\frac{app - aqq}{p+q}, \text{ pour 2 parties.}$$

$$\frac{ap^4 + 4ap^3q - 4apq^3 - aq^4}{p+q}, \text{ pour 4 parties.}$$

$$\frac{ap^6 + 6ap^5q + 15ap^4qq - 15appq^4 - 6apq^5 - aq^6}{p+q}, \text{ pour 6 parties.}$$

$$\frac{ap^8 + 8ap^7q + 28ap^6q^2 + 56ap^5q^3 - 56ap^3q^5 - 28appq^6 - 8apq^7 - aq^8}{p+q},$$

pour 8 parties.

qui se réduisent, en divisant les numérateurs & les dénominateurs par $p+q$,

$$\text{à } \frac{ap-aq}{p+q}, \text{ pour 2 parties.}$$

$$\text{à } \frac{ap^3 + 3appq - 3apq^2 - aq^3}{p+q}, \text{ pour 4 parties.}$$

$$\text{à } \frac{ap^5 + 5ap^4q + 10ap^3q^2 - 10appq^3 - 5apq^4 - aq^5}{p+q}, \text{ pour 6 parties.}$$

$$\text{à } \frac{ap^7 + 7ap^6q + 21ap^5q^2 + 35ap^4q^3 - 35ap^3q^4 - 21appq^5 - 7apq^6 - aq^7}{p+q},$$

pour 8 parties.

$$\text{à } \frac{ap^9 + 9ap^8q + 36ap^7q^2 + 84ap^6q^3 + 126ap^5q^4 - 126ap^4q^5 - 84ap^3q^6 - 36appq^7 - 9apq^8 - aq^9}{p+q},$$

pour 10 parties.

$$\text{à } a \times \left\{ \frac{p^{11} + 11p^{10}q + 55p^9q^2 + 165p^8q^3 + 330p^7q^4 + 462p^6q^5 - 462p^5q^6 - 330p^4q^7 - 165p^3q^8 - 55p^2q^9 - 11pq^{10} - q^{11}}{p+q} \right\},$$

pour 12 parties.

On aura donc pour 24 parties, ou douze Rois,

$$a \times \left\{ \frac{p^{23} + 23p^{22}q + 253p^{21}q^2 + 1771p^{20}q^3 + 8855p^{19}q^4 + 33649p^{18}q^5 + 100947p^{17}q^6 + 245157p^{16}q^7 + 490314p^{15}q^8 + 817190p^{14}q^9 + 1144066p^{13}q^{10} + 1352078p^{12}q^{11} - 1352078p^{11}q^{12} - 1144066p^{10}q^{13} - 817190p^9q^{14} - 490314p^8q^{15} - 245157p^7q^{16} - 100947p^6q^{17} - 33649p^5q^{18} - 8855p^4q^{19} - 1771p^3q^{20} - 253p^2q^{21} - 23pq^{22} - q^{23}}{p+q} \right\}$$

Si $p=5$ & $q=4$,

$$\text{On aura } a \times \frac{5-4}{9} = \frac{1}{9}a \text{ pour 2 parties.}$$

$$a \times \frac{425-304}{729} = \frac{121a}{729} \text{ pour 4 parties.}$$

$$a \times \frac{35625-23424}{59049} = \frac{12201a}{59049} \text{ pour 6 parties.}$$

$$a \times \frac{2965625 - 1817344}{4782969} = \frac{1148281a}{4782969} \text{ pour 8 parties.}$$

$$a \times \frac{242359625 - 141604864}{383964489} = \frac{100754761a}{383964489} \text{ pour 10 parties.}$$

$$a \times \frac{20314265625 - 11066793984}{31381059609} = \frac{9247471641a}{31381059609} \text{ pour 12 parties.}$$

Et $a \times \frac{6176771821635009765625}{8862938119652501095929}$, ou environ $a \times \frac{193}{277}$
pour 24 parties.

Cette dernière grandeur est entre $\frac{2}{3}a$ & $\frac{3}{4}a$. Ainsi dans la supposition, que les forces ou habiletés des Joüeurs soient comme 5 à 4, l'avantage qu'a le Joüeur le plus fort sur le plus foible n'est que la neuvième partie de ce qui est au Jeu, lorsqu'ils jouent en deux parties, & cet avantage devient un peu plus des deux tiers de ce qui est au Jeu, lorsqu'ils jouent en vingt-quatre parties. Lors donc que dans cette supposition deux Joüeurs jouent au Picquet, & mettent au Jeu chacun neuf Loüis pour ce que l'on appelle la queue des paris, le Joüeur le plus foible fait présent à l'autre de 6 Loüis 13 liv. 0 s. 2 den. des neuf Loüis qu'il a mis au Jeu.

REMARQUE I.

Les grandeurs qui ont été trouvées dans les cas que l'on vient d'examiner, & qui expriment l'avantage du Joüeur le plus fort ; ces grandeurs, dis-je, étant composées de termes positifs & de termes négatifs, il est clair que la somme de tous les positifs exprimera le sort du Joüeur le plus fort, ou son droit à la partie, & que la somme de tous les négatifs exprimera le sort du plus foible, ou le droit qu'il a à cette partie ; car l'avantage n'est autre chose que l'excès du sort de l'un sur le sort de l'autre.

Ainsi, pour deux parties ;

Le sort de l'un fera $\frac{p}{p+q} \times a$. Et le sort de l'autre fera $\frac{q}{p+q} \times a$.

Pour quatre parties

$$\frac{\frac{p^3 + 3ppq}{3}}{p+q} \times a$$

$$\text{Et } \frac{\frac{3pqq + q^3}{3}}{p+q} \times a$$

G üj

Pour six parties

$$\frac{p^5 + 5p^4q + 10p^3q^2}{p+q} \times a. \quad \text{Et} \quad \frac{10ppq^2 + 5pq^3 + q^5}{p+q} \times a.$$

Pour huit parties

$$\frac{p^7 + 7p^6q + 21p^5q^2 + 35p^4q^3}{p+q} \times a. \quad \text{Et} \quad \frac{35p^3q^4 + 21ppq^5 + 7p^2q^6 + q^7}{p+q} \times a.$$

Pour dix parties.

$$\frac{p^9 + 9p^8q + 36p^7q^2 + 84p^6q^3 + 126p^5q^4}{p+q} \times a. \\ \text{Et} \quad \frac{126p^4q^5 + 84p^3q^6 + 36p^2q^7 + 9pq^8 + q^9}{p+q} \times a.$$

D'où l'on voit que pour avoir le sort de chacun des deux Joüeurs, lorsqu'ils jouient un nombre quelconque de parties, il faut élever le binôme $p+q$ à une puissance dont l'exposant soit moindre d'une unité que le nombre de parties que l'on doit jouier, diviser en deux parties ce binôme ainsi élevé, dont la première sera composée de tous les premiers termes jusqu'au milieu, & la seconde, de tous les derniers termes pris, depuis le milieu. Chacune de ces parties étant le numérateur d'une fraction, dont le dénominateur est la puissance entière, exprimera le sort de chacun des Joüeurs, & l'excès de l'une de ces fractions sur l'autre exprimera l'avantage du Joüeur le plus fort.

REMARQUE II.

Si l'on avoit cherché par une voye semblable à celle que l'on a suivie ici, le sort des Joüeurs & l'avantage de l'un sur l'autre, lorsqu'ils jouient en un nombre impair de parties, on auroit trouvé les mêmes formules que l'on a trouvées, en supposant ce nombre de parties exprimé par le nombre pair qui le suit, en sorte que le sort est le même, soit que l'on jouie en une ou deux parties; il est encore le même, soit que l'on jouie en trois ou quatre parties, cinq ou six parties, & ainsi des autres.

Ceci peut faire difficulté à la première vûë ; car il est visible que le Joüeur le plus fort a d'autant plus d'avantage que l'on joüe en un plus grand nombre de parties ; ainsi par cette considération il doit avoir plus d'avantage, lorsque l'on joüe en six parties, que lorsque l'on joüe en cinq parties. Mais cet avantage est diminué dans le cas de six parties, en ce que ce Joüeur, pour gagner, doit gagner deux parties plus que l'autre, car en ce cas, pour gagner, il faut qu'il prenne quatre parties, & l'autre deux ; au lieu que dans le cas de cinq parties, il suffit qu'il prenne une partie plus que l'autre, c'est-à-dire, trois parties, & l'autre deux : ainsi, par cette seconde considération, l'avantage du Joüeur le plus fort doit être diminué ; car il est évident qu'il est plus difficile de gagner deux parties plus que l'autre, qu'il ne l'est d'en gagner seulement une de plus. Cette réflexion suffit pour faire voir la possibilité de ce que donne le calcul, car le même raisonnement aura lieu pour tout nombre pair de parties comparé au nombre impair qui le précède.

COROLLAIRE I.

Si l'on suppose $p = q$, & que l'on substitüe dans la Table qui exprime l'avantage du Joüeur le plus fort, pour q , la valeur p , on verra que cet avantage devient nul dans tous les cas, c'est-à-dire, quelque soit le nombre de parties que l'on joüe. Et si l'on substitüe p à la place de q , dans la Table qui exprime le sort des deux Joüeurs, on trouvera $\frac{1}{2}$ pour le sort de chaque Joüeur, quelque soit le nombre de parties que l'on joüe, & c'est aussi ce qui doit arriver.

COROLLAIRE II.

Si avant la fin des parties que l'on est convenu de joüer, on étoit obligé de quitter le jeu, & que l'on voulût découvrir de quelle manière il faut partager l'argent du jeu relativement à l'état où est la partie, lorsque l'on cesse de joüer : on trouvera de quelle manière il faut faire ce partage, & quel est l'avantage ou le désavantage des Joüeurs, en examinant

56 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
entre toutes les Equations que l'on a été obligé de parcourir,
quelle est celle qui renferme le cas proposé, & cette Equation
donnera ce qu'on cherche.

Si l'on demande, par exemple, quel est l'avantage de Pierre,
qui est le Joïeur le plus fort, lorsque l'état de la partie est
telle, que jouant en huit parties, ce Joïeur en a quatre, &
l'autre deux, l'Equation de ce cas a été trouvée $k = \frac{apq + 2apq}{p+q}$

pour l'avantage de Pierre, qui dans la supposition de $p = 5$
& $q = 4$, donne $\frac{65}{81}a$ pour cet avantage; d'où il suit que
ce qui appartient à l'un des Joïeurs est $\frac{75}{81}a$, & ce qui appar-
tient à l'autre est $\frac{8}{81}a$, c'est-à-dire, qu'il faut que Paul donne
à Pierre $\frac{65}{81}a$.

Si l'état de la partie est tel, que Pierre a deux points, &
Paul quatre, lorsque l'on joue en huit points, l'Equation de
ce cas est $Y = -\frac{2apq - aqq}{p+q}$, qui est l'avantage de Pierre;

mais comme cette grandeur est négative, elle exprime ce que
Pierre doit payer à Paul, ou l'avantage de Paul, qui dans la
supposition de $p = 5$ & $q = 4$, est $-\frac{56}{81}a$, c'est-à-dire,
que Pierre doit payer à Paul $\frac{56}{81}a$, & les forts seront comme
 $\frac{25}{162}$ à $\frac{137}{162}$. Il en sera ainsi des autres que l'on voudra
imaginer.



DE LA MÉCANIQUE

avec laquelle diverses Especes de Chenilles, & d'autres Insectes, plient & roulent des feüilles de Plantes & d'Arbres, & sur-tout celles du Chêne.

Par M. DE REAUMUR.

IL ne faut point avoir fait une étude particulière de l'Histoire naturelle pour avoir vû dans des Jardins, dans des Bois, certaines feüilles simplement courbées, d'autres pliées en deux, d'autres roulées plusieurs fois sur elles-mêmes, d'autres ramassées en un paquet informe, & pour avoir remarqué que ces feüilles sont tenües, dans ces différents états, par un grand nombre de fils. Nos Poiriers, nos Pommiers, nos Groseliers, & bien d'autres Arbres & d'autres Plantes, mettent chaque jour sous les yeux de ces sortes de feüilles. On a pû encore observer que le milieu de ces feüilles est souvent occupé par un Insecte, & ordinairement par une Chenille. Le Chêne, le meilleur de tous les Arbres pour nos usages, est aussi le plus amusant pour un Naturaliste; M. Valisnieri assure qu'il nourrit seul plus de deux cents différentes especes d'Insectes; je n'ai pas compté celles que j'y ai observées, mais je ne crois pas qu'elles aillent loin de ce nombre. Il est aussi de tous les Arbres celui où l'on voit plus de feüilles pliées & roulées: on y en apperçoit qui le sont avec une régularité qui donne envie de sçavoir comment des Insectes peuvent venir à bout de les contourner de la sorte; ces Insectes sont des Chenilles. J'ai cherché à découvrir la mécanique à laquelle elles ont recours pour faire si bien prendre la forme de Rouleaux, ou de Cornets, à des feüilles. Je vais expliquer celle qu'elles m'ont laissé voir, & ce sera, je crois, avoir expliqué celle dont se servent quantité d'autres Insectes qui font des ouvrages du même genre, mais moins parfaits.

8 Mars
1730.

Mem. 1730.

: H

Si l'on considère les feuilles des Chênes, vers le milieu du Printemps, lorsqu'elles se sont entièrement développées & étendues, on en aperçoit plusieurs roulées de différentes manières, toutes capables de leur attirer de l'attention. La partie supérieure du bout des unes paroît avoir été ramenée vers le dessous de la feuille, pour y décrire le premier tour d'une Spirale, qui a été ensuite recouvert de plusieurs autres tours, fournis par des roulements successifs, & poussés quel-

- * Figure 1. quefois jusqu'au milieu de la feuille, & quelquefois par de-là *. Nos doigts ne pourroient mieux faire pour rouler régulièrement une feuille, que ce qu'on voit ici ; les Oublis ne sont pas mieux roulés. Le centre du rouleau est vuide, c'est un Tuyau creux, dont le diametre est proportionné à celui du corps d'une Chenille, qui l'habite, & qui la fait pour l'habiter. D'autres feuilles des mêmes Arbres (mais le nombre de celles-ci est plus petit) sont roulées vers le dessus comme les premières le sont vers le dessous. D'autres, en grand nombre, sont roulées vers le dessous de la feuille comme les premières, mais dans des directions totalement différentes. La longueur ou l'axe des premiers rouleaux est perpendiculaire à la principale nervûre & à la queue de la feuille, la longueur de ceux-ci est parallèle à la même nervûre *.
- * Fig. 2. Le roulement de celles-ci n'est quelquefois poussé que jusqu'à la principale nervûre, & quelquefois la largeur entière de la feuille est roulée *.
- * Fig. 3. Les axes, ou longueurs, de divers autres rouleaux sont obliques à la principale nervûre, leurs obliquités varient sous une infinité d'angles, de façon néanmoins que l'axe du rouleau prolongé rencontre ordinairement la grosse nervûre du côté du bout de la feuille *. Quoique la surface des rouleaux soit quelquefois très-unie, & telle que la donne celle d'une feuille assez lisse, il y en a pourtant qui ont des inégalités, des enfoncements, tels que les donneroit une feuille chiffonnée.

De pareils ouvrages ne seroient pas bien difficiles à faire à qui a des doigts, mais les Chenilles n'ont ni doigts ni parties qui semblent équivalentes. D'ailleurs d'avoir roulé les feuilles, c'est avoir fait au plus la moitié de la besogne, il

faut les contenir dans un état d'où leur ressort naturel tend continuellement à les tirer. La mécanique à laquelle elles ont recours pour cette seconde partie de l'ouvrage est aisée à observer. On voit des paquets de fils, attachés par un bout à la surface extérieure du rouleau, & par l'autre au plat de la feuille *; ce sont autant de liens, autant de petites cordes qui tiennent contre le ressort de la feuille. Il y a quelquefois plus de dix à douze de ces liens rangés à peu-près sur une même ligne, lorsque le dernier tour d'un rouleau a à peu-près la longueur, ou seulement la largeur entière de la feuille. Toutes ou presque toutes les Chenilles savent filer; chaque lien est un paquet de fils de soie blanche, pressés les uns auprès des autres, mais qu'on juge pourtant tous séparés.

* Fig. 1.
& 2. 10,
10., &c.

On imagine assés que ces petits cordages sont suffisants pour conserver à la feuille la forme de rouleau, mais il ne m'a pas paru aussi aisé d'imaginer comment la Chenille lui donnoit cette forme; comment, & dans quel temps elle attachoit les liens. Tout cela m'a semblé dépendre de bien de petites manœuvres que j'ai eu très-envie de sçavoir, & qu'on ne pouvoit apprendre qu'en les voyant pratiquer par l'Insecte même. Il n'y avoit gueres apparence d'y parvenir en observant les Chenilles sur les Chênes qu'elles habitent; le moment où elles travaillent n'est pas facile à saisir, & la présence d'un Spectateur ne les excite pas au travail. J'ai tenté un moyen qui m'a réussi mieux que je ne l'espérois. J'ai piqué dans un grand Vase, plein de terre humide, des branches de Chêne fraîchement cassées; j'ai distribué sur leurs feuilles quantité de Chenilles que j'avois tirées des rouleaux qu'elles s'étoient déjà faits. Par bonheur elles souffrent impatiemment d'être à découvert; sçavent-elles qu'elles courent alors risque de devenir la pâture des Oiseaux? ou si elles sentent qu'elles ont besoin d'être à l'abri des impressions du grand air? Quoi-qu'il en soit, elles se sont mises à travailler dans mon Cabinet & sous mes yeux comme elles l'eussent fait en plein Bois.

Ordinairement c'est le dessus de la feuille qu'elles roulent vers le dessous, mais les unes commencent le rouleau par le

bout même de la feuille, & les autres par une des dentelures des côtés. Les rouleaux commencés de la première façon, se trouvent perpendiculaires à la principale nervûre, & ceux qui sont commencés de la seconde, lui sont ou paralleles ou inclinés. Quelque platte que paroisse une feuille, lors même que sa surface supérieure est concave, il est rare que le bord, ou quelque endroit du bord d'une de ses dentelures, ne soit point un peu recourbé en dessous; & quelque petite que soit l'étendue de la partie recourbée, & quelque petite que soit la courbure, ç'en est assez pour donner prise à la Chenille, pour la mettre en état de commencer à contourner la feuille, & de la contourner ensuite autant qu'il lui plaira. Des fils pareils à ceux qui maintiennent la feuille dans la figure de rouleau, servent à la lui faire prendre. Ce n'est qu'en la tirant successivement en différents endroits avec de petites cordes qu'elle vient à bout de la plier en une espece de spirale, qui a quelquefois cinq à six tours qui tournent autour du même centre.

Nôtre Insecte ayant donc choisi un endroit où le bord de la feuille est tant soit peu recourbé en dessous, elle s'y établit, & commence à travailler *. Alors sa tête se donne des mouvements alternatifs très-prompts; elle décrit alternativement des especes d'arcs en sens opposés, comme le sont ceux des vibrations d'un Pendule. Le milieu de son corps, ou quelque endroit plus proche de la queue, est l'espece de centre sur lequel la tête, & la partie du corps à qui elle tient, se meuvent. La tête va s'appliquer contre le dessous de la feuille; tout près du bord, & de-là elle va s'appliquer le plus loin qu'elle peut aller, du côté de la principale nervûre *; elle retourne sur le champ d'où elle étoit partie la première fois, & revient de même ensuite retoucher une seconde fois l'endroit le plus éloigné du bord. Ainsi continue-t-elle à se donner de suite plus de deux à trois cents mouvements alternatifs, c'est-à-dire, à filer autant de fils, car chaque mouvement de tête, chaque allée & chaque retour produit un fil; que la Chenille attache par chaque bout aux endroits où sa

* Fig. 4.

* Fig. 5.
& 6.

tête paroît s'appliquer. Chacun de ces fils est tendu depuis la partie recourbée de la feuille jusqu'à la partie plane, il sert, ou doit servir, à tirer la première vers la seconde ; tous ces fils ensemble doivent faire une espece de lien. Ils ne partent pas tous d'un même point, les surfaces sur lesquelles ils sont appliqués, soit du côté du bord de la feuille, soit du côté opposé, approchent quelquefois de la circulaire, & ont plus d'une ligne de diametre *. La Chenille même n'en colle pas un grand nombre en dessous, près du bord de la feuille. Bientôt elle en colle quelques-uns contre le bord même, & ceux qu'elle file peu à près, elle les attache à la surface supérieure, à la vérité à une petite distance du bord *. Ce premier paquet de fils donne déjà une augmentation de courbure à la feuille vers le dessous. Une partie sensible paroît se replier ; la partie même du bord, à laquelle le paquet de fils est attaché, est plus recourbée que celles qui la suivent, qui tendent à se redresser ; mais bien-tôt une plus longue portion va se replier. Le premier lien ayant été assez fourni de fils, la Chenille va en commencer un autre à deux ou trois lignes de distance du précédent. Pour former celui-ci, elle fait une manœuvre précisément pareille à celle qu'elle a employée pour le premier. Il a aussi un effet pareil ; la partie qui est entre le premier lien & le second, se recourbe plus qu'elle n'étoit, & ce qui est par de-là le nouveau lien commence à se recourber, & se recourbera davantage, lorsque la Chenille aura filé plus loin un troisième lien pareil aux précédents.

* Fig. 8.
& 9.

* Fig. 7.

L'étendue de la partie qui doit former le premier tour du rouleau n'est pas grande, il en est ici comme d'un papier qu'on roule, en commençant à le rouler près d'un de ses angles ; aussi trois à quatre paquets de fils suffisent pour donner la courbure à tout ce premier tour.

C'est encore au moyen de pareils fils, de pareils liens, que le second tour doit être tortillé *. Il faut tirer vers le dessous de la feuille une portion de la surface supérieure suffisamment distante de celle qui a été roulée, c'est-à-dire, qu'il faut que chaque nouveau lien soit attaché par un bout à une partie

* Fig. 10.

de la feuille plus éloignée du bord, & que par l'autre bout il soit attaché plus près de la principale nervûre, ou de la queue de la feuille. En un mot, des paquets de fils arrangés au dessus de ceux du premier tour, comme ceux du premier l'ont été, doivent produire un effet semblable; & comme les premiers ont fait faire à la feuille un premier ou à peu-près un premier tour de spirale, de même les autres lui en feront faire un second, ou à peu-près, & ainsi de tours en tours.

L'effet néanmoins de ces paquets de fils, leur entier usage; n'est pas encore assés clair à beaucoup près, on voit bien, comme nous l'avons vû d'abord, qu'ils servent à tenir la feuille roulée; mais quoique je visse la feuille se courber de plus en plus, à mesure qu'un nouveau lien se finissoit, j'avoüe que je n'appercevois pas la cause du roulement. Le paquet n'est que l'assemblage de fils filés successivement. Dans l'instant que chaque fil vient de sortir de la filière, pendant qu'il est mol encore, l'Insecte l'applique contre la feuille, il est assés gluant pour s'y coller. Il peut bien avoir été tiré droit d'une partie de la feuille à l'autre, mais il ne sçauroit avoir été assés tendu pour faire un effort capable de ramener les deux parties de la feuille l'une contre l'autre. Je sçais que ce fil, quoique extrêmement délié, a quelque force; je l'ai vû en bien des circonstances suspendre la Chenille en l'air, mais il n'a pas été possible, que quand il a été attaché mol, qu'il ait été attaché avec le degré de tension nécessaire pour forcer une des parties d'une feuille à s'approcher de l'autre. Si après avoir été filé; il se raccourcissoit en séchant, ce raccourcissement le mettroit en état d'agir, mais où peut aller le raccourcissement d'un fil si court? combien donneroit-il peu de courbure à la feuille!

Une force plus puissante agit aussi contre elle, c'est une grande partie du poids de la Chenille, & ce n'a été qu'après avoir vû cet Insecte faire souvent de pareil ouvrage, que j'ai apperçû tout l'artifice de sa mécanique. Il dépend de la structure de chaque paquet de fils, de chaque lien. Nous l'avons considéré d'abord comme formé de fils à peu-près paralleles; mais à présent, pour nous en faire une idée plus

exacte, nous devons le regarder comme composé de deux plans de fil posés l'un au dessus de l'autre *. Tous les fils du plan supérieur croisent ceux du plan inférieur. La manœuvre de l'Insecte m'en a convaincu ; les fils eux-mêmes observés à la Loupe devoient me le faire voir ; enfin un paquet considéré à la vûë simple, suffisoit pour découvrir cette structure qui m'avoit échappé ; il est plus large à l'une & à l'autre de ses extrémités, qu'il ne l'est au milieu ; le nombre des fils du milieu est pourtant égal à celui des fils des bouts. Pourquoi y occupent-ils moins de place ? c'est qu'ils y sont plus serrés les uns contre les autres, c'est qu'ils s'y croisent. Regardons donc chaque lien comme composé de deux plans de fils qui se croisent, suivons la Chenille pendant qu'elle file ceux de chacun de ces plans, & nous découvrirons le double usage de ces deux plans, de ces deux especes de toile. Les fils du premier plan étant tous attachés à peu-près parallèlement les uns aux autres, comme on le voit en *AB* *, la Chenille passe de l'autre côté pour filer ceux du second plan *CD* *. Pendant qu'elle file, elle ne peut aller de *C* en *D* sans passer sur les fils *AB*, & loin de chercher à les éviter, en soutenant son corps & sa tête plus haut, on voit sa tête & une partie de son corps toujours appliqués sur le plan *AB*, elle ne l'abandonne point, elle le presse. Ces fils ensemble font une espece de toile, ou de chaîne de toile, capable de soutenir cette pression ; ils tirent par conséquent les deux parties de la feuille l'une vers l'autre. Celle qui est près du bord cede, se rapproche de l'autre ; la feuille se courbe. Il n'est plus question que de lui conserver la courbure qu'elle vient de prendre, & c'est à quoi sert le nouveau fil que la Chenille attache. Ces fils, comme je l'ai déjà fait remarquer, sont capables de soutenir un effort aussi considérable que celui que la feuille fait contre eux, puisqu'ils peuvent soutenir une Chenille en l'air. Il suit de ce que nous venons de dire ; que les fils de la couche supérieure sont les seuls qui soient tendus, que ceux de la couche inférieure deviennent lâches, c'est aussi ce qu'on peut remarquer en observant le paquet avec attention.

* Fig. 12.

* Fig. 13.

* Fig. 14.
& 15.

La même mécanique, qui s'observe dans les deux différentes couches d'un même lien, doit se trouver & se voit bien plus aisément dans les liens des différents tours, comparés les uns aux autres. Quand la feuille ne fait encore qu'un tour de spirale, les liens qui retiennent ce tour sont tendus; au moins leur partie supérieure l'est. Mais quand la même feuille a, par son roulement, fait un second tour, ce ne sont plus que les derniers liens qui retiennent ce tour, qui sont tendus, tous ceux qui arrêtoient d'abord le tour précédent sont lâches, ils ne produisent plus aucun effet *. Si on appuie légèrement sur ceux du second tour avec une plume, on voit que la feuille est tirée par cet effort; mais quoiqu'on appuie davantage sur ceux du premier tour, l'action ne passe pas jusqu'à la feuille, aussi la vûe seule apprend qu'ils sont comme flottants. Il n'y a donc que les liens du dernier tour, ou plutôt que la couche supérieure des fils du lien du dernier tour, qui conservent la courbure de la feuille.

* Fig. 16.

Une Chenille qui s'est attachée à une feuille de Chêne épaisse, dont les nervûres sont grosses, pourroit ne pas filer des fils assez forts pour tenir contre la roideur des principales nervûres, & sur-tout de celle du milieu. Mais elle sçait les rendre souples; elle ronge en trois à quatre endroits différents ce que ces nervûres ont d'épaisseur de plus que le reste de la feuille; les endroits ainsi rongés n'ont qu'une petite étendue. Ils m'ont paru se trouver où la feuille doit être pliée pour recommencer à faire un nouveau tour.

Quand la Chenille, après avoir roulé une portion de la feuille, parvient à un endroit où il y a une dentelure qui déborde beaucoup par de-là le reste, il arrive que les fils qu'elle attache au bout de cette dentelure, au lieu de la rouler, la plient, elle ne se courbe que vers le commencement du pli, le reste conserve une figure à peu-près plane; de plus, si la Chenille donnoit à toute cette partie de la feuille une égale courbure, une égale rondeur, comme elle l'a fait aux parties qu'elle a ci-devant roulées, & qui étoient d'une moindre étendue, le vuide du rouleau auroit là beaucoup plus
de

de diamètre qu'il n'en a ailleurs, il n'auroit plus les proportions commodes à l'Insecte. Après avoir observé de ces grandes dentelures de feuilles, qu'elles avoient presque pliées à plat, je les ai vû dans la suite en former un Tuyau d'un aussi petit diamètre que l'étoit celui des autres endroits, & un Tuyau très-bien arrondi. Pour cela, la Chenille a besoin d'avoir recours à deux manœuvres différentes. 1.^o Elle raccourcit la partie pliée, elle en retranche, pour ainsi dire; tout ce qu'elle a de trop d'étendue, elle en attache une portion à plat contre la feuille par un millier de fils. 2.^o Ce qui reste libre est trop applatti, c'est à coups de tête qu'il m'a paru qu'elle l'arrondissoit. J'ai vû des Chenilles renfermées dans ces endroits trop aplattis, qui agitoient leur tête vivement & alternativement en des sens contraires. A chaque mouvement la tête frappoit contre les parois, c'étoient des especes de petits coups de marteau dont on entendoit le bruit.

Au reste, quand la Chenille a fini le premier tour du rouleau, elle travaille presque à moitié à couvert; le bout replié ne touche jamais entièrement la partie de la feuille sur laquelle il a été ramené, outre que souvent il n'est pas courbé autant qu'il le faudroit pour cela, c'est que les bords sont dentelés, & laissent des passages au corps flexible de l'Insecte. La Chenille se sert des mêmes passages pour faire sortir la moitié de son corps ou plus, lorsqu'elle file les liens qui attachent le milieu du troisième ou du quatrième tour. Pour les liens qui sont plus près des bouts, les ouvertures des bouts lui donnent une plus libre sortie. Le bout de la queue reste dans l'intérieur du rouleau, pendant que la tête va filer aussi loin qu'elle peut atteindre*, ce qui la mene assés près du * Fig. 10.
milieu du rouleau.

Outre les liens qui sont tout du long du dernier tour du rouleau, l'Insecte a souvent besoin d'en mettre aux deux bouts, ou au moins à un des bouts; mais ils sont tellement disposés, qu'ils ne lui ôtent pas la liberté de sortir de l'intérieur de ce rouleau, & d'y rentrer. C'est-là son domicile, c'est une espece de cellule cylindrique, qui ne reçoit le jour

que par les deux bouts ; & ce qu'elle a de commode , c'est que les murs fournissent la nourriture à l'Animal qui l'habite. Cette Chenille vit de feuilles de Chêne ; étant à couvert , elle les ronge à son aise & en sûreté. Elle commence par ronger le bout qui a été le premier contourné , & de suite elle mange tout ce qui a été tortillé , au dernier tour près. Aussi de quatre à cinq tours que faisoit une feuille tortillée par de-là le milieu , ou même entièrement tortillée , souvent on ne retrouve plus que le dernier tour.

Quelquefois j'ai trouvé que le rouleau avoit été formé de deux feuilles roulées selon leur longueur ; celle qui devoit occuper le centre , avoit alors été presque entièrement rongée ; il n'en restoit que les plus grosses fibres. J'en ai vu qui en faisant leur rouleau , ne laissoient pas de manger ; elles dressaient en même temps les endroits qui se seroient mal-aisément pliés , elles les rongeoient.

* Fig. 17. Cette industrieuse & laborieuse Chenille est au plus de celles qui sont d'une grandeur médiocre *. Elle est d'un gris ardoisé ; quelquefois elle paroît pourtant d'un brun verdâtre , mais je crois que c'est quand elle est bien soulée de feuilles. Peut-être aussi que sa couleur paroît différente après des changements de peau , car elle en change probablement plusieurs fois , les dépouilles qu'on trouve dans les rouleaux le prouvent. Elle est d'une extrême vivacité ; pour peu qu'on la touche , on la voit se remuer en différents sens avec une grande vitesse.

Un des bouts du rouleau est l'ouverture par où elle jette ses excréments , qui sont de petits grains noirs & à peu-près ronds.

Une partie d'une feuille , ou même une feuille de Chêne entière , ne seroit pas une provision suffisante pour la nourriture de notre Chenille pendant toute sa vie ; elles se font de nouveaux rouleaux quand elles en ont besoin. Après y avoir vécu en Chenilles , elles s'y métamorphosent en Crysalides , & ensuite en Papillons. Le dernier rouleau qu'elles se font , diffère un peu des autres , les tours en sont moins serrés ;

l'Insecte est devenu plus gros. Chaque tour de ce dernier rouleau n'est pas attaché par ces forts liens distribués d'espaces en espaces, des fils un peu écartés les uns des autres, mais qui regnent depuis un bout jusqu'à l'autre, le retiennent *; * Fig. 18. c'est une espece de toile légère dont la force n'est pas équivalente à celle des cordages employés ci-devant. Il semble que l'Insecte sçache proportionner la force qu'il emploie à la résistance qu'il a à vaincre; plus le diametre des tours est petit, & plus le ressort de la feüille agit pour la redresser, aussi est-ce sur-tout le dernier tour qui n'est tenu que par la toile dont nous parlons. Dans la fabrique de cette espece de toile, on observe la même mécanique que nous avons remarquée dans celle des liens; elle est de même composée de deux plans de fils qui se croisent très-visiblement; ceux de dessous servent à tirer la feüille, à la courber, pendant que l'Insecte s'appuye dessus, & qu'il file ceux du plan supérieur qui doivent la fixer dans cette courbure.

C'est dans ces mêmes Etais, où nos Chenilles ont vécu & crû, qu'elles se transforment en Crysalides *. La peau des Crysalides est molle & tendre dans les premiers moments de la transformation, quoique par la suite elle devienne sèche & dure; l'attouchement de la feüille seroit trop rude pour cette peau, lorsqu'elle ne vient que d'être dégagée de dessous l'enveloppe de Chenille. Il semble que l'Insecte ait prévu qu'il avoit à craindre cette incommodité, car lorsque le temps de cette première métamorphose approche, il tapisse l'intérieur du rouleau d'une légère couche de fils de soye, dont l'attouchement est plus doux que celui de la surface raboteuse de la feüille. * Fig. 19. & 20.

Enfin à l'état de Crysalide doit succéder celui de Papillon *. La condition de cette Chenille, comme celle de toutes les Chenilles que nous connoissons, est de vivre successivement sous ces trois formes différentes. Je ne sçais point assez précisément combien elle conserve celle de Crysalide, mais il ne m'a pas paru que ce fut plus de trois semaines. Quand elle est prête de la quitter, elle avance vers un des bouts du * Fig. 21. & 22.

* Fig. 18. r. rouleau jusqu'à en sortir près d'à moitié ou plus *; là, plus exposé à l'air, le fourreau de Crysalde acheve de se sécher, & les efforts que fait le Papillon, qu'il renferme, le brisent plus aisément. Le Papillon s'en échappe, & n'a plus besoin; pour prendre l'essor, que de laisser évaporer pendant quelques instants l'humidité de ses ailes. Si on examine dans le mois de Juillet les rouleaux de nos feuilles du Chêne, il y en aura peu à qui on ne trouve un fourreau de Crysalde qui est resté à un des bouts, & cela parce que les Papillons en sont sortis depuis le mois de Juin.

* Fig. 21.
& 22.

La couleur de ces Papillons est composée de différentes nuances de brun jaunâtre, les unes plus foncées, les autres plus claires, mêlées par des especes de taches qui font un agréable effet *. Les mêmes Chenilles en donnent de deux grosseurs différentes. Les plus petits, selon l'analogie ordinaire, devroient être les mâles, j'en ai pourtant vû d'accouplés qui ne différoient pas considérablement en grosseur. Pendant leur accouplement, ils sont placés derrière contre derrière, à la manière des Hanneçons.

Au reste l'espece de Chenille grise, ou d'un gris verdâtre, dont nous avons parlé jusqu'ici, n'est pas la seule qui roule des feuilles de Plantes & d'Arbres, ni même la seule qui roule des feuilles de Chêne. J'ai observé d'autres especes, soit beaucoup plus grosses, soit plus petites, qui roulent aussi les feuilles de ce dernier Arbre, & entre celles-ci j'en ai observé d'entièrement vertes, de verdâtres, & de diverses autres couleurs. Il y en a une qui roule fort artistement les feuilles d'Orme, qui ne diffère guère ni par sa grandeur, ni par sa couleur, de nôtre habile rouleuse. Mais comme toutes ces diverses especes n'ont point d'artifices différents de celui que nous avons suivi jusqu'ici, que leurs rouleaux ne sont pas toujours aussi-bien faits que ceux que nous avons décrits, elles n'ont rien qui doive nous arrêter. En général presque toutes les rouleuses sont d'une très-grande vivacité.

Il nous reste à parler des Chenilles qui, au lieu de rouler les feuilles, se contentent de les plier. Le nombre de ces

plieuses est encore plus grand que celui des rouleuses, leurs ouvrages sont plus simples ; mais il y en a qui malgré leur simplicité ne laissent pas de paroître industrieux. Le Chêne nous fournit encore de ceux-ci ; on voit de ses feuilles dont le bout a été ramené vers le dessous * ; il y a été appliqué & assujetti presque à plat, il ne reste d'élévation sensible qu'à l'endroit du pli. J'ai observé de ces feuilles, où tout le contour de la partie pliée étoit logé dans une espece de rainure que la Chenille avoit creusée dans plus de la moitié de l'épaisseur de la feuille. Sur d'autres feuilles du même Arbre, on voit que de leurs grandes dentelures ont été de même pliées en dessous. La plupart des autres Arbres nous offrent aussi des feuilles pliées par les Chenilles. Mais il n'y en a point où on puisse en observer plus commodément que sur les Pommiers, ils en ont de toutes especes à nous faire voir ; de seulement pliées en partie, je veux dire de simplement courbées * ; de pliées entièrement, je veux dire, où la partie pliée a été ramenée à plat sur une autre partie de la feuille ; de courbées, de pliées vers le dessus, & de courbées ou pliées vers le dessous. Entre ces dernières, le Pommier même en a qui ont une singularité que je n'ai observée sur aucunes de celles des autres Arbres. Tout autour du bord de la dentelure de la partie repliée, il y a un bourlet comme cotonneux, qui est pourtant de soye d'un jaune pâle * ; il s'élève d'environ une ligne au dessus de la partie qu'il entoure ; il la borde comme feroit un cordonnet ; il a plus d'épaisseur que de largeur. * Fig. 23.

Au lieu que les Chenilles rouleuses habitent des rouleaux ; les plicuses se tiennent dans une espece de Boîte plate ; elles n'y ont pas un grand espace, mais il est proportionné à la grandeur & à la grosseur de leur corps ; ordinairement elles sont des plus petites. Chacune est bien close dans cette espece d'étui plat, ou de boîte ; il reste pourtant quelquefois une ouverture à chaque bout, mais à peine ces ouvertures sont-elles sensibles *. Elles se renferment aussi pour se nourrir à couvert ; mais si elles rongeoient, comme font les rouleuses, * Fig. 24.

* Fig. 27.
BD.

l'épaisseur entière de la feuille, leurs especes de boîtes seroient bien-tôt tout à jour, au lieu que tant qu'elles y demeurent, jamais on n'y voit de trous. Leur goût, & peut-être leur prévoyance, les porte à ne manger qu'une partie de l'épaisseur de la feuille. Celles qui plient les feuilles en dessous, épargnent la membrane qui en fait le dessus, & celles qui plient les feuilles en dessus, épargnent la membrane qui en fait le dessous. Les unes & les autres n'attaquent point les nervûres & les fibres un peu grossières. Elles savent ne détacher que la substance la plus molle, la pulpe, le parenchime qui est renfermé dans le rézeau fait par l'entrelassement des fibres. Aussi la structure de ce rézeau est-elle bien plus sensible dans les endroits où elles ont rongé que dans les autres.

Celles qui habitent des feuilles bien pliées, commencent à ronger la substance de la feuille à un des bouts de l'étui, & la partie qui a été rongée la première, est celle sur laquelle elles déposent leurs excréments. Elles continuent à ronger, en avançant vers l'autre bout, mais elles ont la propreté d'aller jeter leurs excréments dans l'endroit où sont les premiers; ainsi ils se trouvent accumulés à un coin, & jamais il n'y en a d'épars. C'est au moins ce qu'observent régulièrement les Chenilles de nos Pommiers, dont les étuis sont environnés d'un bourlet ou cordon soyeux. On voit avec plaisir manger celles qui se contentent de courber des feuilles, sur-tout si on les considère à la Loupe. On remarque avec quelle adresse & avec quelle vitesse elles découpent partie de l'épaisseur de la feuille. Leur tête est un peu inclinée vers un côté, afin apparemment qu'une seule de leurs dents perce d'abord une petite portion de la substance de la feuille, que les deux dents, ferrées l'une contre l'autre, dans le moment suivant, savent détacher. Les coups de dents se succèdent avec une vitesse prodigieuse, & à mesure qu'ils sont réitérés, le rézeau, formé par les fibres, se découvre, devient net, dans les endroits où auparavant il étoit à peine sensible. Ce n'est que par de petites aires que la substance de la feuille est emportée.

Ces Chenilles, qui se contentent de courber les feuilles,

sont celles aussi qui sont les plus aisées à observer dans leur travail, il est le plus simple de ceux de ce genre ; il suffira pourtant de l'avoir détaillé, pour avoir donné une idée de tous les autres. Une petite Chenille d'un verd clair, dont chaque anneau est chargé de plusieurs petits grains noirs, est sur toutes commode à suivre, elle aime à ronger le dessus de la feuille, & par conséquent elle doit plier la feuille, ou ramener la dentelure de quelque endroit de ses bords, vers le dessus ; elle se contente de faire décrire un arc tantôt plus, tantôt moins courbe à la partie qu'elle contourne *, mais jamais elle ne la contourne au point de ramener ses bords à toucher le dessus de la feuille. Elle ne craint point la présence du Spectateur, elle plie la feuille sur sa main, s'il tient sa main en repos. Une de ces Chenilles étant posée sur le dessus d'une feuille platte de Pommier, n'est donc pas longtemps sans travailler à donner à une portion de cette feuille la courbure qu'elle lui veut. Entre les différents endroits des bords de la feuille, il y en a toujours qui s'élèvent plus que les autres. C'est à un de ceux-là qu'elle s'adresse ; elle s'en approche à une distance convenable, & se fixant sur la queue & sur les anneaux qui en sont proche, elle porte sa tête sur le bord de la feuille, & de-là la ramene sur le plat de la feuille, du côté de la principale nervûre * ; elle file de suite plusieurs fils parallèles les uns aux autres, qui sont le commencement d'une pièce de toile qu'elle va étendre.

* Fig. 24.

* Fig. 25.

Nous avons considéré la feuille comme à peu-près platte ; mais seulement comme à peu-près platte, ainsi les fils qui viennent d'être filés ne sont appliqués contre cette feuille que par leurs bouts, le reste de leur longueur est en l'air. La Chenille monte sur ces fils qui, chargés de son poids, forcent le bord de la feuille à avancer vers la principale nervûre. Les nouveaux fils, que la Chenille file en cette position, maintiennent le bord de la feuille dans le commencement de la courbure qu'elle a prise ; en étendant ensuite cette toile, & marchant dessus à mesure qu'elle l'étend, la Chenille force toujours de plus en plus la feuille à se plier. Cette mécanique

est bien simple, & ne méritoit pas de nous arrêter, après avoir vû pratiquer l'équivalent par nos rouleuses, mais le supplément qu'il faut y ajouter ne doit pas être passé sous silence. Les fils qui composent la toile, n'ont qu'une longueur proportionnée aux arcs que la tête de la Chenille peut décrire, étant fixée sur une portion de son corps. Si au moyen de cordes si courtes, & dirigées comme elles le sont, la Chenille forçoit la feuille à se courber entièrement, la feuille ainsi courbée décriroit une circonférence d'un très-petit rayon, telles que sont celles des premiers tours de certains rouleaux. Or la courbure qu'elle veut, & qu'elle a besoin de donner à cette partie de la feuille, doit être celle d'un cercle, ou d'une autre courbe d'un plus grand rayon. Pour parvenir à la lui donner, elle ne continue pas à la tirer par des cordes si courtes, ou dont les directions soient si inclinées. Après avoir filé une certaine étendue de toile, elle cesse de suivre la même ligne, elle vient se placer plus près de la grosse nervûre *, & là elle commence à filer une toile composée de fils; elle colle un des bouts de chacun des nouveaux fils à la toile précédente; & l'autre le plus près qu'elle peut aller de la principale nervûre; ou même par de-là. Ce qui fait le même effet que si elle eût augmenté près d'une fois la longueur des premières cordes. Elle monte alors sur ce nouveau plan, & se place vers l'endroit où les deux pièces de toiles ont été réunies. Là placée, elle attache des fils au bord de la feuille, & vers la principale nervûre, elle forme une nouvelle toile; à cette nouvelle toile, elle attache bien-tôt les fils d'une autre, qui croisent ceux de la précédente, & ainsi de suite elle continue à faire courber la feuille, mais doucement, & sans que sa courbure soit considérable. Des plans de toile s'élèvent ainsi successivement les uns aux dessus des autres, & quand la Chenille a avancé son ouvrage, elle paroît, par rapport à la surface de la feuille, comme sur un échafaud.

* Fig. 26.

Elle ne se tient pourtant pas toujours sur ces plans de toile; de temps en temps elle en descend, & vient sur la surface de la feuille, quelquefois c'est pour s'y reposer en mangeant;

mangeant ; quelquefois on l'y voit la tête levée ; agiter avec vîtesse ses premières jambes ; elles lui servent alors de mains pour briser les toiles des plans inférieurs , qui ne peuvent plus que l'incommoder , lorsqu'elle veut marcher sur la feuille , & qui peuvent même s'opposer à l'effet qu'elle a à faire produire aux toiles des plans supérieurs.

Celles-ci , comme je l'ai assés dit , se contentent de courber une portion de la feuille ; mais celles qui achevent de la plier , ne commencent pas leur ouvrage autrement ; elles commencent par faire prendre de la courbure à la partie qui doit être ramenée à plat , & quand elle en a pris suffisamment , la Chenille passe sous le plan de toile qui la tient courbée , & au dessous de ce plan elle en file d'autres , successivement , qui sont tous de plus proches en plus proches du pli de la partie recourbée. L'effet de ceux-ci dépend de leur position. N'en considérons qu'un , celui qui suit immédiatement l'extérieur. D'un côté les bouts de ses fils ne sont pas attachés à la dentelure , ils le sont un peu au dessous , & par l'autre bout ils sont attachés à partie de la feuille correspondante. D'où il est clair que quand la Chenille charge ce plan de fils , cette toile , qu'elle approche l'une de l'autre les deux parties de la feuille , qu'elle les approchera encore davantage , & qu'elle les conduira à s'appliquer l'une contre l'autre , en filant une seconde , une troisième couche de fils , s'il en est besoin , dont les bouts des fils se trouvent toujours attachés plus près de l'endroit où doit être le pli.

Les couches de fils , les toiles qui précèdent la dernière filée , ne produisent presque plus d'effet *. Les fils des premières se trouvent en dehors de la dentelure , & la Chenille y pousse ceux des toiles qui la suivent. De-là il arrive que ces fils lâches , entrelassés , & poussés par de-là le bord de la partie pliée , forment une espece de bourlet , qui semble avoir été fait avec plus d'artifice qu'il ne l'a été *.

* Fig. 28.

* Fig. 27.

Au reste , quelque soit la position de la feuille , la Chenille fait toujours le même usage du poids de son corps pour la courber ou plier. Si une feuille est posée horizontalement ,

& que la Chenille la courbe en dessus, alors le plan des fils est plus élevé que la surface de la feuille, & la Chenille va se mettre sur le dessus de cette toile. Mais si la Chenille roule la feuille en dessous, le plan de chaque toile est plus bas que celui de la feuille, & la Chenille charge cette toile, tantôt en se posant sur la surface intérieure, & elle est alors dans une situation naturelle, tantôt en se mettant à la renverse sur la surface extérieure, & tenant ses jambes cramponnées entre les fils de la toile. Il y en a même qui ne travaillent à plier les feuilles de Chêne, qu'en se tenant cramponnés de la sorte.

Des circonstances déterminent quelquefois des Chenilles, qui plient ordinairement des feuilles en dessous, à les plier en dessus, elles profitent des dispositions qu'a la feuille à se contourner plus d'un côté que de l'autre; c'est ce que m'ont fait voir celles que j'ai fait travailler chés moi. Ainsi il ne leur est pas absolument essentiel de ronger la feuille par une de ses surfaces plutôt que par l'autre. Il y a des feuilles de Chêne qui sont pliées par le moyen de paquets, de liens de fils, pareils à ceux qu'employent les rouleuses, mais on trouve assés ordinairement dans l'intérieur du pli des toiles, qui ont apparemment servi à achever d'approcher les deux parties l'une de l'autre.

Toutes ces Chenilles se métamorphosent en Papillons, mais la plupart très-petits, ce qui m'a fait négliger de les faire graver.

Diverses especes d'Araignées courbent aussi des feuilles; d'autres les plient, & d'autres les assemblent en paquet. Ce que nous avons vû pratiquer aux Chenilles, met assés au fait des différentes manières dont s'y peuvent prendre les Araignées, qui sont de maîtresses fileuses. Au reste si les Araignées plient des feuilles, c'est pour s'y renfermer avec leurs œufs, qu'elles déposent sur ces mêmes feuilles, & qu'elles y enveloppent de soye. Là elles se placent sur le paquet d'œufs, sur lequel elles restent constamment, comme s'il avoit besoin d'être couvé.

EXPLICATION DES FIGURES,

LA *Figure 1*, représente une feuille, dont le bout a été roulé vers le dessous. La face *AA*, qui paroît ici, est celle de dessous. *BC* le rouleau, dont la partie qui paroît est une portion du dessus de la feuille. *lo, lo, lo*, marquent quelques-uns des liens de soye qui tiennent cette feuille roulée.

La *Figure 2*, est celle d'une feuille roulée parallèlement; ou à peu-près, à sa principale nervure *N*. La face *AN* est le dessous de la feuille. *BC* le rouleau. *lo, lo, lo*, quelques-uns des liens de soye qui conservent ce rouleau dans sa forme. Ici il n'y a à peu-près que la moitié de la feuille roulée.

La *Figure 3*, est celle d'une feuille roulée en entier, parallèlement à sa principale nervure. *ll, ll*, les liens du rouleau.

La *Figure 4*, fait voir une Chenille, qui profitant de la petite courbure que la feuille a en *A*, va travailler à la rouler parallèlement à sa principale nervure.

La *Figure 5*, & la *Figure 6*, représentent des Chenilles en différentes attitudes, qui n'ont encore collé leurs fils que sur le plat de la feuille, & au dessous de la partie courbée, ou à son bord.

La *Figure 7*, représente une Chenille qui colle un fil en dessus de la feuille, en dessus de la partie repliée.

La *Figure 8*, est celle d'une feuille qu'une Chenille a commencé à rouler par le bout. Elle a déjà attaché les liens *lo, lo*, & file actuellement le lien *IK*.

Dans la *Figure 9*, la Chenille a filé trois liens *lo, lo, lo*; & va en commencer un quatrième.

La *Figure 10*, montre un rouleau, dont le premier tour est fini, & dont le second est commencé. Les liens *MN* de ce tour sont au dessus des liens *lo* du tour précédent.

La *Figure 11*, est celle d'une feuille, dont le second tour est roulé sur une plus grande longueur que dans la *Fig. 10*.

La *Figure 12*, représente deux plans de lignes *AB, CD*, qui se croisent en *E*: elle donne en grand une image de la

structure de chaque lien *lo* des autres Figures. Les lignes de chacun de ces plans doivent être regardées comme autant de fils.

Dans la *Figure 13*, une Chenille est représentée filant le premier plan *AB* des fils, dont un paquet ou lien est composé.

Dans les *Figures 14 & 15*, la Chenille a changé de côté, & file le second plan, le plan supérieur des fils du lien *CD*. Dans la *Fig. 14*, elle colle le bout d'un nouveau fil en *C*, & dans la *Fig. 15*, elle colle l'autre bout du même fil en *D*; & pendant qu'elle l'y colle, le poids de son corps charge le premier plan.

La *Figure 16*, est la coupe d'un rouleau, qui fait environ deux tours; on y voit les fils des liens *lo* lâches & flottants, pendant que les fils supérieurs du lien *NM* du second tour sont seuls tendus.

La *Figure 17*, représente nôtre Chenille rouleuse dans la grandeur naturelle. On l'a dans d'autres attitudes dans plusieurs des Figures précédentes.

La *Figure 18*, est celle d'une feuille que la Chenille a roulée, lorsqu'elle étoit prête de se métamorphoser. Les fils qui maintiennent le dernier tour de ce rouleau depuis *p* jusqu'en *q*, ne sont pas disposés par paquets, ils forment une espèce de toile. En *r* est la coque de la Crysalide, d'où l'Insecte est sorti sous la forme de Papillon.

La *Figure 19*, représente une Crysalide de cette Chenille; vûë par dessous en *A*, & par dessus en *B*.

La *Figure 20*, est la Crysalide *A* dessinée plus grande que nature.

Les *Figures 21 & 22*, sont celles de deux des Papillons dans lesquels nos Chenilles se transforment. Celui de la *Figure 21* est plus petit que celui de la *Fig. 22*.

La *Figure 23*, est celle d'une feuille de Chêne, dont le bout *bcb* a été plié en dessous.

La *Figure 24*, représente une de ces feuilles de Pommiers que les Chenilles se contentent de courber.

La *Figure 25*, fait voir une Chenille qui commence à

attacher des fils à une feuille de Pommier pour la courber : elle a déjà fait une espece de toile composée de fils paralleles.

Dans la *Figure 26*, la Chenille a filé une seconde portion de toile ; un des bouts de chacun des fils de celle-ci est attaché sur la toile précédente. Les fils de la dernière croisent les fils de la première, leur direction est oblique à celle des autres. Entre *f, f*, on voit que les fils de la seconde toile sont attachés à ceux de la première.

La *Figure 27*, est celle d'une feuille de Pommier pliée vers le dessous. *BCD* est un bourlet ou cordon soyeux, qui entoure la dentelure de la partie pliée.

La *Figure 28*, fait voir la feuille précédente dans un temps où elle n'étoit pas entièrement pliée. En *efg* paroissent les toiles, qui plus pressées les unes contre les autres, font le bourlet soyeux, lorsque la portion de la feuille est entièrement pliée.



M E T H O D E

Pour trouver les Tautochrones , dans des Milieux résistants , comme le Quarré des Vîteſſes.

Par M. BERNOULLI, Professeur de Mathématiques à Bâle.

AVANT que d'entreprendre la Solution générale , voici quelques considérations nécessaires sur les fonctions semblables composées d'indéterminées proportionnelles.

DÉFINITION I. Si l'on forme une fonction quelconque d'une quantité déterminée a , & d'une indéterminée x , de manière que a & x fassent ensemble le même nombre de dimensions dans chaque terme ; prenant ensuite une autre déterminée A , & une indéterminée X , proportionnelles aux premières a & x , c'est-à-dire, telles que $a : A :: x : X$, si l'on forme de A & X une nouvelle fonction, pareille à celle qu'on a formée de a & x , j'appelle ces deux fonctions, & les autres de cette espèce, *fonctions semblables*. Ainsi par ex. $a^3 + faax + gaxx + hx^3$ & $A^3 + fAAX + gAXX + hX^3$ sont des fonctions semblables ; de même $V(a^4 + fx^4)$ & $V(A^4 + fX^4)$; $\frac{aa + fax + gxx}{ha^3 + ix^3}$ & $\frac{AA + fAX + gXX}{hA^3 + iX^3}$; $a + V(ax + fxx)$ & $A + V(AX + fXX)$; $\frac{a+x}{axx + f\sqrt{a^6 + x^6}}$ & $\frac{A+X}{AXX + f\sqrt{A^6 + X^6}}$; & ainsi des autres , prenant toujours f, g, h, i , &c. pour des coefficients numériques.

DÉFINITION II. J'appelle aussi *fonctions semblables transcendentes*, celles des précédentes qui seroient multipliées par dx & dX , & qui seroient supposées intégrées par le signe \int . Ainsi par ex. $\int \frac{adx}{\sqrt{aa - xx}}$ & $\int \frac{AdX}{\sqrt{AA - XX}}$ sont des fonctions semblables transcendentes , & ainsi des autres.

DÉFINITION III. Les fonctions semblables, soit algébriques, soit transcendentes, sont estimées être d'une telle ou telle dimension, dont l'exposant est le nombre qui reste, quand on retranche l'exposant des termes du dénominateur, de l'exposant des termes du numérateur, en comptant dx ou dX pour une dimension; & s'il y a des signes radicaux, en divisant d'abord l'exposant des termes par l'exposant du signe. Ainsi $V(a^4 + x^4)$ est réputé de deux dimensions; $\frac{a+x}{axx + f\sqrt{(a^6 + x^6)}}$ aura pour dimension $1 - 3 = -2$; $\int \frac{adx}{\sqrt{(aa - xx)}}$ est d'une dimension, parce que adx est de deux dimensions, & $V(aa - xx)$ d'une; ainsi cette fonction $\int \frac{adx}{\sqrt{(aa - xx)}}$ a pour exposant $2 - 1 = 1$, de même $\frac{a^3 + fxxx}{gaxx + hxx^3}$ & $\int \frac{axdx}{f^3a^3 + gxx^3}$ n'ont aucune dimension, parce que $3 - 3 = 0$.

THEOREME.

Toutes les fonctions semblables, soit transcendentes, soit algébriques, sont entre elles comme leurs quantités semblables a & A , ou x & X , élevées au même exposant que ces fonctions. Ainsi

$$\begin{aligned} \text{par ex. } aa.AA :: (xx.XX ::) & \frac{a^3 + fxxx}{gx} \cdot \frac{A^3 + fAXX}{gX} \\ :: fdx V(aa + xx) \cdot f dX V(AA + XX) :: & \int \frac{x^3 dx}{aa + ax} \\ \cdot \int \frac{X^3 dX}{AA + AX} ; \text{ de même } \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{A} :: & \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{X} :: \right) \frac{1}{\sqrt{(aa - xx)}} \\ \cdot \frac{1}{\sqrt{(AA - XX)}} :: & \int \frac{adx}{\sqrt{(a^6 - x^6)}} \cdot \int \frac{AdX}{\sqrt{(A^6 - X^6)}} :: \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(a^6 + x^6)}} \\ \cdot \int \frac{dX}{\sqrt[3]{(A^6 + X^6)}}, & \text{ \& ainsi des autres.} \end{aligned}$$

COROLL. L'on voit par-là que toutes les fonctions semblables, qui n'ont aucune dimension, sont égales entre elles: car elles sont entre elles comme a^0 à A^0 , ou comme x^0 à X^0 . Mais $a^0 = 1 = A^0$, ou $x^0 = 1 = X^0$. Ainsi par exemple

$$\begin{aligned} \int \frac{adx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}} &= \int \frac{AdX}{\sqrt{(A^4 - X^4)}}; \int \frac{aadx + xxx}{a^3 + f^3} = \int \frac{AAdX + XXX}{A^3 + fX^3}; \\ \frac{a + \sqrt{(aa - xx)}}{f\sqrt[3]{(axx)}} &= \frac{A + \sqrt{(AA - XX)}}{f\sqrt[3]{(AXX)}}; \frac{a + fz}{a - gx} = \frac{a + hax}{aa - gxx} \end{aligned}$$

$$= \frac{A+fX}{A-gX} + \frac{AA+hAX}{AA-gXX}, \text{ \& ainsi des autres.}$$

SCHOLIE. J'ai déjà traité ce même sujet autrefois dans un Mémoire que donna feu mon Fils Nicolas, inféré dans le VII.^e Tome des Suppl. des Act. de Leipf. pag. 322. La démonstration se présente d'elle-même, pour peu qu'on y fasse attention, & est plus facile à concevoir qu'à expliquer. Cette considération est le seul moyen de se bien conduire dans la recherche des Tautochrones, & des autres Courbes où l'on est obligé de considérer les fonctions semblables, comme l'on verra dans la suite.

PROBLEME I, ET PRINCIPAL.

Décrire la Courbe par laquelle un corps descendant par sa pesanteur dans un milieu d'une densité uniforme, de quelque point de la Courbe qu'il commence à descendre, parvienne toujours dans un temps égal au point le plus bas; & de-là remonte dans le même temps par l'autre branche de la Courbe jusqu'où il pourra remonter, en supposant la résistance comme le quarré des vitesses.

§. I. SOLUT. J'appelle l'Arc total *descendu*, celui qui est compris entre le point le plus élevé d'où le corps commence à descendre, & le point le plus bas; l'Arc total *remonté*, celui qui est compris entre le point le plus bas que je prends pour le *sommet* de la Courbe, & le point jusqu'où il peut remonter avec sa vitesse acquise, jusqu'à ce qu'il ait perdu toute sa vitesse; l'Arc *partial*, soit *descendu*, soit *remonté*, est une partie quelconque indéterminée d'un Arc total quelconque, prise depuis le sommet jusqu'au lieu de la Courbe où se trouve le corps, soit en descendant, soit en montant.

II. Soit maintenant la gravité qui anime les corps $=g$, la vitesse dans un point quelconque de l'Arc total $=v$, l'Arc partial $=r$ (je l'appelle plutôt r que s , parce que la lettre s se confondroit facilement avec le nombre 5) l'Abcisse prise sur l'Axe élevé verticalement depuis le sommet de la Courbe, correspondante à l'Arc partial, $=x$, l'Appliquée correspondante au même Arc, $=y$, la résistance qu'on suppose proportionnelle

proportionnelle au quarré de la vitesse, $= \frac{vv}{n}$, où j'entends par $\frac{1}{n}$, l'intensité de cette résistance, n étant constant pour un arc total quelconque.

III. Par la décomposition de la force de la pesanteur en tangentielle & normale, l'on a la force tangentielle $= \frac{gdx}{dr}$; de laquelle ôtant, lorsque le corps descend, ou à laquelle ajoutant, lorsque le corps remonte, la force de la résistance $\frac{vv}{n}$, l'on a pour la force accélératrice ou retardatrice $(\frac{gdx}{dr} \mp \frac{vv}{n})$

Not. B. (le signe supérieur ayant lieu lorsque le corps descend, & l'inférieur lorsqu'il remonte, ce qu'il faudra aussi toujours observer dans la suite) l'on aura donc $(\frac{gdx}{dr} \mp \frac{vv}{n}) \times \frac{dr}{v}$

$= -dv$; d'où l'on tire cette Equation $gdx \mp \frac{vv dv}{n}$

$= -v dv$ à laquelle il faut satisfaire. En faisant $dr = \frac{dz}{z}$,

il vient $ngzdx \mp vvdz = -nzv dv$, ou $-2gzdx$

$= \mp \frac{2}{n} vvdz + 2zv dv$; divisant par $z^{\pm \frac{2}{n} + 1}$, l'on

aura $-2gz^{\mp \frac{2}{n}} dx = (\mp \frac{2}{n} vvdz + 2zv dv) z^{\mp \frac{2}{n} - 1}$.

Pour intégrer cette Equation, il ne suffit pas d'écrire $-2g$

$\int z^{\mp \frac{2}{n}} dx = vv z^{\mp \frac{2}{n}}$, (car cette valeur de $vv z^{\mp \frac{2}{n}}$,

exprimée par $-2g \int z^{\mp \frac{2}{n}} dx$, est incomplète, n'apparté-

nant à aucun arc total) mais $2gA - 2g \int z^{\mp \frac{2}{n}} dx =$

$vv z^{\mp \frac{2}{n}}$, où je prends A pour quelque chose de constant;

à quoi $\int z^{\mp \frac{2}{n}} dx$ devient égal, lorsque x devient l'Abscisse

correspondante à quelque arc total, de manière que A soit

constant pour cet arc total entier, mais différent pour un arc total différent.

IV. L'on a donc $vv = 2gAz^{\pm \frac{2}{n}} - 2gz^{\pm \frac{2}{n}} \int z^{\mp \frac{2}{n}} dx$
 $=$ (à cause de $z = cr$, j'entends par c le nombre dont le
 logarithme est l'unité) $2gAc^{\pm \frac{2r}{n}} - 2gc^{\pm \frac{2r}{n}} \int c^{\mp \frac{2r}{n}} dx$.
 Et ainsi dt ou le petit temps par l'élément d'un arc total
 quelconque sera $= \frac{dr}{\sqrt{(2gAc^{\pm \frac{2r}{n}} - 2gc^{\pm \frac{2r}{n}} \int c^{\mp \frac{2r}{n}} dx)}}$;

ou pour abrégér, en multipliant par la constante $\sqrt{2g}$, l'on
 aura $dt\sqrt{2g} = \frac{dr}{\sqrt{(Ac^{\pm \frac{2r}{n}} - c^{\pm \frac{2r}{n}} \int c^{\mp \frac{2r}{n}} dx)}}$. Afin donc

que le temps, que le corps employe à descendre ou à re-
 monter par un arc total quelconque, soit toujours le même;
 il faut faire enforte que la valeur de $\int \frac{dr}{2g}$, qu'on vient de
 trouver, soit égale à quelque fonction semblable de dimen-
 sion nulle, comme par ex. $\int \frac{m dP}{\sqrt{(AA - PP)}}$, où j'entends par m
 un nombre arbitraire constant, & dans laquelle le change-
 ment de la lettre A ne change point la valeur de la fonction;
 car $\int \frac{m dP}{\sqrt{(AA - PP)}}$ donne toujours un angle droit pris autant
 de fois que m contient d'unités, de quelque grandeur qu'on
 prenne A , lorsque PP devient $= AA$.

V. Pour faire donc enforte que la valeur du temps qu'on
 vient de trouver $\int \frac{dr}{\sqrt{(Ac^{\pm \frac{2r}{n}} - c^{\pm \frac{2r}{n}} \int c^{\mp \frac{2r}{n}} dx)}}$ soit sem-

blable à la somme qu'on a choisie $\int \frac{m dP}{\sqrt{(AA - PP)}}$, j'écris dans
 l'expression du temps AA pour A , & je divise l'un & l'autre
 terme par $c^{\pm \frac{r}{n}}$, & j'ai $\int \frac{c^{\mp \frac{r}{n}} dr}{\sqrt{(AA - \int c^{\mp \frac{2r}{n}} dx)}}$, que je

suppose $= \int \frac{m dP}{\sqrt{(AA-PP)}}$. La question se réduit donc à faire

enforte que $c^{\mp \frac{r}{n}} dr = m dP$, & que de plus $\int c^{\mp \frac{2r}{n}} dx = PP$, car on tirera de-là la relation entre r & x dans laquelle A n'entrera point : ce que je fais ainsi.

VI. Par la première Equation, l'on a $\frac{1}{m} c^{\mp \frac{r}{n}} dr = dP$; je l'integre, en observant la correction nécessaire, afin que r & P s'évanouïssant, la valeur de P s'évanouïsse aussi, &

l'on aura $\mp \frac{n}{m} c^{\mp \frac{r}{n}} \pm \frac{n}{m} = P$; en quarrant, l'on a $\frac{1}{mm} (\mp n c^{\mp \frac{r}{n}} \pm n)^2 = PP$ qui doit être $= \int c^{\mp \frac{2r}{n}} dx$;

en différenciant le premier & le dernier, l'on aura $\frac{2}{mm} c^{\mp \frac{r}{n}} dr$
 $(\mp n c^{\mp \frac{r}{n}} \pm n) = c^{\mp \frac{2r}{n}} dx$; d'où l'on tire tout d'un

coup $dx = \frac{2}{mm} c^{\pm \frac{r}{n}} dr (\mp n c^{\mp \frac{r}{n}} \pm n) = \mp \frac{2n}{mm} dr$

$\pm \frac{2n}{mm} c^{\pm \frac{r}{n}} dr$, ou $mm dx = \mp 2n dr \pm 2nc^{\pm \frac{r}{n}} dr$;

en intégrant & faisant encore la correction nécessaire, afin que x s'évanouïssant, r s'évanouïsse aussi, l'on aura $mmx =$

$- 2nn \mp 2nr \pm 2nnc^{\pm \frac{r}{n}}$; qui est l'Equation exponentielle en termes finis, qui détermine la Tautochrone que l'on cherche. Si l'on veut avoir une Equation différentielle sans quantités exponentielles, on le pourra de la manière suivante : Par l'Equation qu'on vient de trouver, l'on a

$2nnc^{\pm \frac{r}{n}} = mmx \mp 2nn \pm 2nr$; mais par l'Equation différentielle qu'on avoit trouvée auparavant, l'on a aussi

$2nnc^{\pm \frac{r}{n}} = \pm \frac{mmndx}{dr} \mp 2nn$; donc $mmx \mp 2nn$

$\mp 2nr = \pm \frac{mmndx}{dr} \mp 2nn$, qui réduite, donne $mmx dr$

$$\pm 2nrdr = \pm mmndx, \text{ ou } \pm mmxdr + 2nrdr = mmndx.$$

VII. *Coroll. 1.* Lorsque $n = \infty$, c'est-à-dire, lorsque $\frac{yy}{n}$ ou la résistance est nulle, l'on aura $2rdr = mm dx$ & $rr = mmx$; d'où l'on voit que les abscisses sont proportionnelles aux quarrés des arcs correspondants, & qu'ainsi la Courbe est la Cycloïde, comme il doit arriver; car dans le Vuide, ou dans un Milieu qui ne résiste point, il n'y a que la Cycloïde qui puisse être Tautochrone.

VIII. *Coroll. 2.* Mais si n demeurant finie, l'on prend $m = \infty$, l'on trouve $\pm xdr = ndx$, qui est l'Equation de la Tractoire de M. Huygens, dont la tangente est par-tout $= n$; enforte que cette Tractoire est une des Tautochrones dans un milieu résistant comme les quarrés des vitesses; mais comme ici le point le plus bas est à une distance infinie, car c'est le point où la tangente se confond avec l'asymptote horizontale, l'on voit que les temps de chaque descente, de quelque point de la Courbe qu'on commence à les compter, sont infinis, mais cependant égaux, car dans certains cas les infinis ont entre eux une raison déterminée; paradoxe qui n'a rien de nouveau pour ceux qui sont versés dans le Calcul infinitésimal.

Construction de la Tautochrone.

IX. Voici comme on peut construire la Tautochrone; que nous venons de trouver: Puisque $dx = \mp \frac{2n dr}{mm}$ $\pm \frac{2nc \pm \frac{r}{n} dr}{mm}$, l'on aura dy ou $V(dr^2 - dx^2) = dr \sqrt{(m^4 - 4nn + 8nnc \pm \frac{r}{n} - 4nnc \pm \frac{2r}{n}) : mm}$, & ainsi $y = \int dr \sqrt{(m^4 - 4nn + 8nnc \pm \frac{r}{n} - 4nnc \pm \frac{2r}{n}) : mm}$. Et comme l'on a de plus $x = (-2nn$

$\pm 2nr \pm 2nnc^{\pm \frac{r}{n}} : mm$, l'on aura les deux valeurs de x & y , en supposant les quadratures & les logarithmes pour une indéterminée r qu'on prendra.

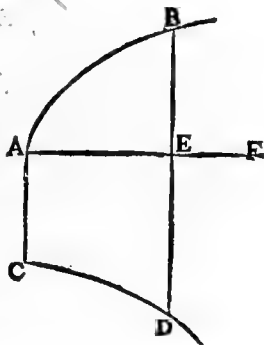
Ayant donc décrit sur l'Axe commun AF les deux Courbes AB & CD , telles que prenant l'abscisse $AE = r$, l'on ait l'appliquée BE

$$= \pm \frac{2n}{mm} \pm \frac{2nc^{\pm \frac{r}{n}}}{mm}, \text{ \& l'autre}$$

$$ED = \sqrt{(m^4 - 4nn \pm 8nnc^{\pm \frac{r}{n}} - 4nnc^{\pm \frac{2r}{n}}) : mm},$$

les aires ABE & $ACDE$ divisées

par une ligne arbitraire L , donneront les coordonnées de la Courbe que l'on cherche; sçavoir $\frac{ABE}{L} = x$ & $\frac{ACDE}{L} = y$.



SCHOLIE.

X. m marquant un multiple quelconque arbitraire de l'angle droit, nôtre solution donnera toujours une infinité de Tautochrones particulières selon la diversité infinie de m ; ce qu'on voit assés, puisque dans le cas même où $m = \infty$, l'on trouve encore une Tautochrone, qui est la Tractoire de M. Huygens (§. 8.) Au reste l'on tire de nôtre Solution générale plusieurs autres Problemes utiles & curieux, comme ceux-ci.

PROBLEME II.

XI. La longueur d'un Arc total quelconque descendu dans l'Hypothese que nous avons prise d'une résistance proportionnelle au quarré de la vitesse, étant donnée, trouver la longueur de l'Arc total remonté qui le suit immédiatement.

SOLUTION.

Puisque nous avons trouvé pour la descente (§. 4.) $v \bar{v}$

$$= 2gAc^{\frac{2r}{n}} - 2gc^{\frac{2r}{n}} \int c^{-\frac{2r}{n}} dx \& \int c^{-\frac{2r}{n}} dx = (S. 6.)$$

$$\frac{1}{mm} (-nc^{-\frac{r}{n}} + n)^2 = \frac{nn}{mm} (c^{-\frac{2r}{n}} - 2c^{-\frac{r}{n}} + 1)$$

$$\text{l'on aura } vv = 2gAc^{\frac{2r}{n}} - \frac{2nn g}{mm} (1 - 2c^{\frac{r}{n}} + c^{\frac{2r}{n}}),$$

Supposant maintenant l'Arc total descendu $= a$, il faut qu'au commencement de la descente, vv soit $= 0$, c'est pourquoi

$$\text{il faut faire } 2gAc^{\frac{2r}{n}} = \frac{2nn g}{mm} (1 - 2c^{\frac{r}{n}} + c^{\frac{2r}{n}}),$$

$$\text{d'où l'on tire } A = \frac{nn}{mm} (c^{-\frac{2r}{n}} - 2c^{-\frac{r}{n}} + 1) =$$

$$(\text{lorsque } r \text{ devient } = a) \frac{nn}{mm} (c^{-\frac{2a}{n}} - 2c^{-\frac{a}{n}} + 1)$$

$$= \frac{nn}{mm} (1 - c^{-\frac{a}{n}})^2. \text{ Et puisque au point le plus bas de}$$

la descente, lorsque $r = 0$, $\int c^{-\frac{2r}{n}} dx$ s'évanouït, l'on

aura vv , ou le quarré de la vîtesse finale du mobile descen-

$$\text{dant } = 2gAc^{\frac{2r}{n}} = (\text{à cause de } r = 0) 2gA = (\text{à cause}$$

$$\text{de } A = \frac{nn}{mm} (1 - c^{-\frac{a}{n}})^2) \frac{2nn g}{mm} (1 - c^{-\frac{a}{n}})^2. \text{ Je}$$

trouve par un raisonnement semblable, en prenant les signes inférieurs, & nommant l'arc total remonté b , le quarré de la

$$\text{vîtesse initiale du mobile remontant } = \frac{2nn g}{mm} (c^{\frac{b}{n}} - 1)^2.$$

Mais la vîtesse finale du mobile descendant est la même que la vîtesse initiale du mobile remontant; d'où il suit que

$$1 - c^{-\frac{a}{n}} = c^{\frac{b}{n}} - 1, \& c^{\frac{b}{n}} = 2 - c^{-\frac{a}{n}} = 2 - \frac{1}{c^{\frac{a}{n}}}$$

$$= \frac{2c^{\frac{a}{n}} - 1}{c^{\frac{a}{n}}}; \text{ prenant les logarithmes du premier \& du}$$

dernier, l'on a $\frac{b}{n} = l(2c^{\frac{a}{n}} - 1) - \frac{a}{n}$, d'où enfin l'on

$$a = nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a.$$

XII. *Scholie.* La valeur de b qu'on vient de trouver, a toujours lieu pour quelque valeur de n que ce soit; mais si $n = \infty$, c'est-à-dire, si la résistance est infiniment petite ou nulle, l'on devroit trouver $b = a$, parce que le mobile dans le vuide remonte aussi haut qu'il étoit descendu, & l'arc total remonté dans la Cycloïde (qui est la Tautochrone dans le vuide) doit être égal à l'Arc total descendu précédent; cependant nôtre expression ne paroît pas donner $b = a$, car

$$nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a \text{ devient } \infty l(2c^{\frac{a}{\infty}} - 1) - a \\ = \infty l(2c^0 - 1) - a = \infty l(2 - 1) - a = \infty l(1) - a = \infty \times 0 - a, \text{ ce qui ne fait rien connoître de déterminé, puisque } \infty \times 0 \text{ ou le produit de l'infini par un infiniment petit peut exprimer une quantité quelconque. Pour résoudre cette difficulté, j'ai deux moyens, l'un indirect,}$$

l'autre direct, de faire voir que $nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a$ devient effectivement $= a$, lorsque $n = \infty$. En me servant du premier moyen, je supposerai $b = a$, & chercherai ensuite ce qu'il faut prendre pour n , afin que la valeur de b ,

$$nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a \text{ devienne } = a; \text{ pour cela je fais } \\ a = nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a, \text{ d'où l'on a } 2a = nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1);$$

& passant des logarith. aux nombres, j'ai $e^{2a} = (2c^{\frac{a}{n}} - 1)^n$ ou $c^{\frac{2a}{n}} = 2c^{\frac{a}{n}} - 1$, qui est une Équation quarrée, dont

la racine extraite à l'ordinaire, donne $c^{\frac{a}{n}} = 1 \pm \sqrt{1 - 1}$ $= 1 \pm 0$, & prenant les logarithmes, l'on a $\frac{a}{n} = l1 = 0$, donc $n = \infty$; d'où il suit que dans le cas où $n = \infty$,

l'on aura b ou $n l (2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a = a$.

XIII. Par le moyen direct, voici ce que je fais ; de la quantité $n l (2c^{\frac{a}{n}} - 1)$ je fais cette fraction $l (2c^{\frac{a}{n}} - 1)$

qui lorsque $n = \infty$, devient $\frac{0}{0}$; c'est une fraction dont les deux termes s'évanoüissent, il faut donc chercher sa valeur par la règle donnée dans l'Anal. des Infin. petits, art. 163, en considérant n comme variable, & divisant la différentielle du numérateur par la différentielle du dénominateur ; ce qui

étant fait, l'on aura $dl (2c^{\frac{a}{n}} - 1)$ divisé par $d(\frac{1}{n})$ c'est-à-dire $-\frac{2c^{\frac{a}{n}} \frac{a}{n} \frac{dn}{n^2}}{2nnc^{\frac{a}{n}} - n^2}$ divisé par $-\frac{dn}{n^2}$, d'où il vient

$$\frac{2c^{\frac{a}{n}} \times a}{2c^{\frac{a}{n}} - 1} = (\text{en substituant } \infty \text{ pour } n) \frac{2a}{2-1} = 2a ; \text{ d'où}$$

je conclus que lorsque $n = \infty$, l'on aura $n l (2c^{\frac{a}{n}} - 1) = 2a$, & qu'ainsi $b = n l (2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a = 2a - a = a$.

PROBLEME III.

XIV. *Trouver le lieu de la plus grande vitesse dans un Arc total quelconque de descente.*

SOLUTION. Puisque (S. 11.) $vv = 2gAc^{\frac{2r}{n}} - \frac{2nng}{mm}$
 $(1 - 2c^{\frac{r}{n}} + c^{\frac{2r}{n}}) = (\text{ibid.}) \frac{2nng}{mm} (1 - c^{\frac{a}{n}})^2$
 $c^{\frac{2r}{n}} - \frac{2nng}{mm} (1 - 2c^{\frac{r}{n}} + c^{\frac{2r}{n}}) ;$ qui étant divisé par la quantité constante $\frac{2nng}{mm}$, donnera $c^{\frac{2r}{n}} (1 - c^{\frac{a}{n}})^2$

— $(1 - 2c^{\frac{r}{n}} + c^{\frac{2r}{n}})$, qui doit être un *maximum*; il faut donc faire la différentielle $= 0$, & l'on aura $\frac{2c^{\frac{r}{n}} dr}{n}$
 $(1 - c^{\frac{r}{n}})^2 + \frac{2c^{\frac{r}{n}} dr - 2c^{\frac{2r}{n}} dr}{n} = 0$, ou divisant
 par $\frac{2c^{\frac{r}{n}} dr}{n}$, l'on aura $c^{\frac{r}{n}} (1 - c^{\frac{r}{n}})^2 + 1 - c^{\frac{r}{n}} = 0$,
 d'où l'on tirera par la réduction & le secours des logarithmes;
 $r = 2a - nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1)$. Si donc d'un arc total $= a$,
 l'on retranche depuis le point le plus bas, une partie $= 2a$
 $- nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1)$ l'on aura le point de la plus grande
 vitesse.

XV. *Coroll. 1.* L'arc intercepté entre le commencement de la descente & le point de la plus grande vitesse, $= a$
 $- 2a + nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1) = nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a$.
 D'où l'on voit (S. 11.) que cet arc, depuis le commencement de la descente jusqu'au lieu de la plus grande vitesse, est égal à l'arc remonté suivant.

XVI. *Coroll. 2.* Ajoutant l'arc commun compris entre le point le plus bas & le lieu de la plus grande vitesse, l'on aura l'arc total descendu égal à l'arc compris entre le point de la plus grande vitesse, & le point où le mobile cesse de remonter; c'est-à-dire, que le mobile, après qu'il est parvenu à la plus grande vitesse en descendant, a encore à parcourir jusqu'à ce qu'il cesse de remonter un chemin égal à celui qu'il a parcouru depuis le commencement de la descente jusqu'au point le plus bas.

XVII. *Coroll. 3.* Puisque (S. 11.) l'arc total remonté, ou $b = nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a$, l'on aura la somme de l'arc total descendu & de l'arc total remonté, ou $a + b = nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1)$.

Démonstr. D'un point quelconque K , soit menée l'appliquée KL , & soit appelée OK, z ; l'on aura par la nature de l'hyperbole, $KL = \frac{n}{n-z}$, & partant l'aire $OKLD = \int \frac{n dz}{n-z} = n l(\frac{n}{n-z})$, & l'aire entière $OEGD = n l(\frac{n}{n-OE})$. L'on trouve de même $OFHD = n l(\frac{n+OF}{n})$. Prenant donc l'aire $OEGD = a \times OD = a \times 1 = a$, l'on aura $n l(\frac{n}{n-OE}) = a$. De-là repassant aux nombres, l'on aura $(\frac{n}{n-OE})^n = c^a$, ou $\frac{n}{n-OE} = c^{\frac{a}{n}}$; d'où l'on tire OE ou $OF = n - n c^{-\frac{a}{n}}$, qui étant substitué pour OF dans $n l(\frac{n+OF}{n})$, l'on a l'aire $OFHD = n l(\frac{2n - n c^{-\frac{a}{n}}}{n}) = n l(2 - c^{-\frac{a}{n}}) = n l(\frac{2c^{\frac{a}{n}} - 1}{c^{\frac{a}{n}}}) = n l(2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a$. Or nous avons trouvé dans l'analyse précédente (§. 11.) que cette expression étoit celle de b ; donc l'aire $OFHD = b = b \times 1 = b \times OD$.

L E M M E

Qui sert à déterminer la plus grande vitesse.

XIX. Si du centre O , & d'un rayon quelconque OE , moindre que OA , l'on décrit un demi-cercle ERF à la circonférence duquel l'on prolonge l'ordonnée LK , le rectangle $LK \times KR$ sera proportionnel à la vitesse qu'aura le mobile, après qu'il sera descendu depuis le commencement d'un arc total exprimé par l'aire $OEGD$, dans l'instant qu'il acheve un arc exprimé par l'aire $EGLK$.

Démonstr. Car ayant pris, comme nous avons fait ci-dessus, l'aire $OEGD$, où l'arc total $= a$, l'on a trouvé $OE = n - n c^{-\frac{a}{n}}$. Si donc l'on fait de la même manière, l'aire

$OKLD$, ou l'arc qui
reste à parcourir $= r$,
l'on aura $OK = n -$

$nc^{-\frac{r}{n}}$. Et ainsi KL A

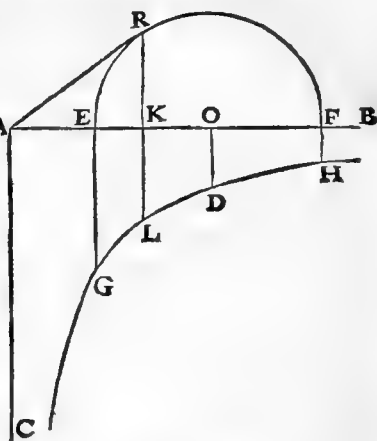
$$= \frac{AO \times OD}{AK} = c^{\frac{r}{n}}, \&$$

$$KR = \sqrt{OE^2 - OK^2}$$

$$= n \sqrt{2c^{-\frac{r}{n}} -$$

$$2c^{-\frac{a}{n}} - c^{-\frac{2r}{n}} +$$

$$c^{-\frac{2a}{n}}). \text{ Si l'on multiplie }$$



KL par KR , l'on aura $LK \times KR = nc^{\frac{r}{n}} \sqrt{2c^{-\frac{r}{n}} -$

$2c^{-\frac{a}{n}} - c^{-\frac{2r}{n}} + c^{-\frac{2a}{n}})$, dont le carré $= 2nnc^{\frac{r}{n}}$

$- 2nnc^{\frac{2r-a}{n}} - nn + nnc^{\frac{2r-2a}{n}}$, divisé par nn , donne

$2c^{\frac{r}{n}} - 2c^{\frac{2r-a}{n}} - 1 + c^{\frac{2r-2a}{n}}$. Mais il est facile de

voir que cette quantité est $= c^{\frac{2r}{n}} (1 - c^{-\frac{a}{n}})^2 -$

$(1 - 2c^{\frac{r}{n}} + c^{\frac{2r}{n}})$, ce que nous avons fait voir dans la
Solution précédente (S. 14.) être proportionnel à vv ou
au carré de la vitesse. Donc $LK \times KR$ est proportionnel à
la simple vitesse.

XX. L'on voit par-là que pour déterminer le lieu de la
plus grande vitesse, il n'est question que de tirer entre l'hy-
perbole & le cercle, la ligne LKR , enforte que $LK \times KR$
soit le plus grand de tous les rectangles pareils; ce qui étant
fait, l'arc total descendu sera à l'arc compris entre le point
le plus bas & le point de la plus grande vitesse, comme
l'aire $EGDO$ à l'aire $KLDO$. Or il est évident que le plus
grand de tous les rectangles $LK \times KR$ est celui qui se fait

lorsque la soutangente de l'hyperbole pour L & la soutangente du cercle pour R sont égales. Mais la soutangente de l'hyperbole est égale à l'abscisse AK par la nature de l'hyperbole ; donc la même AK doit aussi être la soutangente du cercle pour le point R . On tire de-là une construction facile & élégante. Du centre de l'hyperbole A , soit tirée AR tangente au cercle, & du point d'attouchement R soit abaissée la perpendiculaire RKL ; elle partagera l'aire $EGDO$; qui représente l'arc total, en deux aires $GEKL$ & $LKOD$, en même raison que le point de la plus grande vitesse partage l'arc total.

XXI. *Coroll. 1.* On voit de-là tout d'un coup, sans aucun calcul, pourquoi, lorsque $n = \infty$, b devient $= a$, c'est-à-dire, pourquoi, dans un milieu qui ne résisteroit point, l'arc total remonté doit être égal à l'arc total descendu. Car n ou AO étant infini, l'arc hyperbolique GDH peut passer pour une droite parallèle à l'asymptote AB , & l'aire $ODHF = EGDO$, c'est-à-dire, $b = a$. L'on voit aussi que la tangente AR , tirée d'une distance infinie, peut passer pour parallèle au diamètre du cercle EF , & que partant RL passera par le centre O , & se confondra avec OD . D'où l'on voit que dans ce cas le lieu de la plus grande vitesse est le point le plus bas, comme il doit arriver dans la Cycloïde, qui est la Tautochrone dans le vuide.

XXII. *Coroll. 2.* Puisque nous avons trouvé ci-dessus (§. 15.) que l'arc descendu, pris depuis le commencement jusqu'au point de la plus grande vitesse, est égal à l'arc total remonté ; il suit de-là que l'aire $EGLK$ est égale à l'aire $DOFH$, & qu'ainsi $AE.AK :: AO.AF$. Ce qu'on voit d'ailleurs, puisque la tangente AR est moyenne proportionnelle tant entre AE & AF , qu'entre AK & AO , comme il est clair par la nature du cercle.

XXIII. *Scholie.* Voici quelque chose d'utile & de digne de remarque sur notre Courbe tautochrone ; c'est de déterminer jusqu'à quelle hauteur elle peut s'élever, ou quel peut être le plus grand arc total descendu ; car il est certain que

cette Courbe, à prendre son commencement au point le plus bas, loin de s'élever à une distance infinie, doit au contraire se terminer, & redescendre ensuite par une espece de pointe ou point de rebroussement, comme on sçait qu'il arrive à la Cycloïde elle-même, qui est la Tautochrone dans le cas d'une résistance nulle ou infiniment petite. En effet si quelque Tautochrone s'étendoit à l'infini, l'on voit assés que le temps de la descente par un arc infiniment long ne pourroit pas être fini & déterminé, contre l'hypothese; car une vitesse toujours finie dans un temps fini ne sçauroit faire parcourir un espace infini. Afin donc que nous trouvions jusqu'où nôtre Tautochrone doit s'élever, & que nous déterminions le point où commence le plus grand arc possible de descente, ou le point de rebroussement, voici comme je raisonne: Puisque l'on a trouvé ci-dessus (§. 9.) $dy =$

$dr \sqrt{(m^4 - 4nn + 8nnc^{\frac{r}{n}} - 4nnc^{\frac{2r}{n}})} : mm$, l'on voit d'abord qu'au point le plus bas, lorsque $r = 0$, $dy = dr$; ce qui fait voir que l'axe est perpendiculaire à la Courbe; comme il doit arriver; autrement ce ne seroit pas le point le plus bas: mais ensuite en s'éloignant de ce point, la raison de dy à dr décroît jusqu'à ce qu'elle devienne nulle, ce qui arrive lorsque la Courbe est perpendiculaire à l'appliquée. Je dis maintenant que la Courbe ne s'étend pas au de-là de ce point, & qu'ainsi c'est le point le plus élevé; car si

la Courbe s'élevoit davantage, $4nn - 8nnc^{\frac{r}{n}} + 4nnc^{\frac{2r}{n}}$ seroit plus grand que m^4 , & partant dy ou $dr \sqrt{(m^4 - 4nn + 8nnc^{\frac{r}{n}} - 4nnc^{\frac{2r}{n}})}$ seroit imaginaire ou impossible; donc afin que dy soit $= 0$, ce qui termine le plus grand arc, il faut que m^4 soit $= 4nn - 8nnc^{\frac{r}{n}} + 4nnc^{\frac{2r}{n}}$, ou extrayant la racine, il faut que mm soit $= 2nc^{\frac{r}{n}} - 2n$; d'où l'on tire $\frac{mm + 2n}{2n} = c^{\frac{r}{n}}$; & prenant les logarithmes;

$l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right) = \frac{r}{n}$, c'est-à-dire, $r = n l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right) =$ au plus grand arc possible de descente qui termine la Courbe.

XXIV. *Coroll. 1.* Nous avons trouvé en général (S. 6.) pour la descente $mmxdr + 2nrdr = mmndx$; donc pour le plus grand arc total, lorsque $dy = 0$, & qu'ainsi $dx = dr$, l'on aura $mmx + 2nr = mmn$, d'où l'on tire $x = \frac{mmn - 2nr}{mm} =$ (substituant pour r la valeur) $n - \frac{2nn}{mm} l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right) =$ la plus grande abscisse possible.

XXV. *Coroll. 2.* Si $m = \infty$, mais que n soit fini, l'on aura r ou $n l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right) = \infty$; mais $\frac{2nn}{mm} l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right) = 0$; donc x ou la plus grande abscisse $= n$, ce qui convient à la Tractoire.

XXVI. *Coroll. 3.* Si au contraire m est fini, mais n infini, ce qui est le cas de la Tautochrone ordinaire dans le vuide, l'on aura $r = \infty l 1 = \infty \times 0$; ce qui ne donne rien de déterminé; il faut donc encore se servir ici de la regle de l'Anal. des Infin. petits, art. 163. En considérant $n l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right)$ sous la forme de cette fraction $\frac{l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right)}{\frac{1}{n}}$, dont la différentielle du numérateur, divisée par la différentielle du dénominateur, donne cette autre fraction $\frac{mmn}{mm+2n} =$ (lorsque $n = \infty$) $\frac{1}{2} mm$.

XXVII. *Coroll. 4.* Dans ce même cas la plus grande abscisse $n - \frac{2nn}{mm} l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right)$ devient $\infty - \frac{2\infty^2}{mm} l 1 = \infty - \frac{2\infty^2}{mm} \times 0$, ce qui encore ne détermine rien; il faut donc, afin d'y pouvoir appliquer la regle dont on s'est déjà servi, l'exprimer sous la forme de cette fraction $\frac{\frac{1}{n} - \frac{2}{mm} l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right)}{\frac{1}{nn}}$,

& l'on trouve, en opérant bien, $x = \frac{1}{4} mm$; enforte que le plus grand arc est double de la plus grande abscisse, comme il arrive dans la Cycloïde, où le plus grand arc, depuis le

96 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 point le plus bas, est double du diametre du Cercle géné-
 rateur. Ce qui confirme merveilleusement nôtre méthode.

P R O B L E M E I V.

XXVIII. *La longueur d'un Arc total remonté quelconque étant donnée, trouver la longueur de l'Arc total descendu qui l'a précédé.*

S O L U T I O N.

On peut se servir ici de la méthode que nous avons employée dans la Solut. du Probl. 2. (S. 11.) En prenant les signes inférieurs dans l'expression du quarré de la vitesse vv , & opérant ensuite, comme l'on a fait, avec les changements nécessaires. Mais on parviendra plus facilement au but, si l'on fait à l'Equation que l'on a trouvée pour la longueur de l'arc remonté (S. 11.) $b = nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a$, les changements nécessaires, afin d'avoir la valeur de a exprimée par b ; ce que je fais ainsi : Puisque $b = nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a$, l'on aura $a + b = nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1)$ ou $\frac{a+b}{n} = l(2c^{\frac{a}{n}} - 1)$, & passant des logarith. aux nomb. l'on a $c^{\frac{a+b}{n}} = 2c^{\frac{a}{n}} - 1$; divisant maintenant par $c^{\frac{a}{n}}$, il vient $c^{\frac{b}{n}} = 2 - c^{-\frac{a}{n}}$, & repassant aux logarith. l'on aura $\frac{b}{n} = l(2 - c^{-\frac{a}{n}})$, d'où l'on tire $b = nl(2 - c^{-\frac{a}{n}})$; & ainsi l'on trouve b autrement & plus simplement que l'on n'a fait (S. 11.). Mais comme c'est ici a que l'on cherche, je transpôse $c^{\frac{b}{n}}$ & $c^{-\frac{a}{n}}$ en changeant les signes, & j'aurai $c^{-\frac{a}{n}} = 2 - c^{\frac{b}{n}}$, & prenant les logarith. $-\frac{a}{n} = l(2 - c^{\frac{b}{n}})$, d'où l'on tire

$a =$

$a = -n l(2 - c^{\frac{b}{n}})$, ou, ce qui revient au même, $a = n l(1 : 2 - c^{\frac{b}{n}})$.

XXIX. Puisque $a = n l(1 : 2 - c^{\frac{b}{n}})$ & $b = n l(2 - c^{-\frac{a}{n}})$, l'on aura $a + b = n l(\frac{2 - c^{-\frac{a}{n}}}{2 - c^{\frac{b}{n}}})$; mais

par §. 11, l'on a aussi $a + b = n l(2 c^{\frac{a}{n}} - 1)$, donc $2 c^{\frac{a}{n}} - 1 = \frac{2 - c^{-\frac{a}{n}}}{2 - c^{\frac{b}{n}}}$; & l'on a, en réduisant, $4 c^{\frac{a}{n}} - 2 c^{\frac{a+b}{n}}$

$+ c^{\frac{b}{n}} - 1 = 0$. L'on peut donc trouver, en rétrogradant, par cette Equation exponentielle, quoique fort composée, a par b , & réciproquement b par a , ce qui seroit peut-être fort difficile à trouver *a priori*.

XXX. *Scholie*. Par ce que nous avons démontré (§. 23.) l'on pourra encore déterminer le plus grand arc possible remonté, comme aussi la plus grande abscisse qui lui convient. Cela se peut par le moyen de l'Equation trouvée (§. 11.)

$b = n l(2 c^{\frac{a}{n}} - 1) - a$, ou de cette autre équivalente

dont nous venons de parler, $b = n l(2 - c^{-\frac{a}{n}})$, substituant dans l'une ou l'autre pour a ce qu'on a trouvé ci-dessus (§. 23.) $n l(\frac{m m + 2 n}{2 n})$ pour le plus grand arc descendu; car l'on aura b ou le plus grand arc remonté (en se servant de

la dernière formule) $= n l(2 - c^{-l(\frac{m m + 2 n}{2 n})})$; mais cette expression étant embarrassée & peu élégante, à cause de l'exposant logarithmique contenu sous un autre signe logarithmique; voici une manière particulière de la réduire à une expression logarithmique simple & ordinaire: je fais

Mem. 1730.

. N

$2 - c^{-l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right)} = z$, partant $c^{-l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right)} = 2 - z$, & leurs logarith. $-l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right) = l(2 - z)$; d'où repassant aux nombres, à la manière ordinaire, l'on aura $\frac{2n}{mm+2n} = 2 - z$; donc $z = \frac{2mm+2n}{mm+2n}$, & $2 - c^{-l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right)} = \frac{2mm+2n}{mm+2n}$, & $nl\left(2 - c^{-l\left(\frac{mm+2n}{2n}\right)}\right) = nl\left(\frac{2mm+2n}{mm+2n}\right) =$ au plus grand arc total remonté.

XXXI. *Coroll.* L'on peut par-là trouver la plus grande longueur de toute la Tautochrone, c'est-à-dire, celle que le mobile peut parcourir pendant une oscillation entière, en descendant & remontant ensuite. Car le plus grand arc total descendu étant $= nl\left(\frac{mm+2n}{2n}\right)$, & le plus grand arc total remonté immédiatement après, étant $= nl\left(\frac{2mm+2n}{mm+2n}\right)$, leur somme $nl\left(\frac{mm+2n}{2n}\right) + nl\left(\frac{2mm+2n}{mm+2n}\right)$, qui étant réduite, donne $nl\left(\frac{mm+n}{n}\right)$, fera $=$ à la plus grande longueur de la Tautochrone qui puisse être parcourüe par le mobile en descendant & remontant consécutivement.

XXXII. Quant à la plus grande abscisse x , qui répond au plus grand arc remonté; il faut remarquer qu'il n'est plus permis de supposer $dx = dr$, comme nous avons fait pour la descente (§. 24.) car le plus grand arc remonté n'est point absolument le plus grand, mais seulement relativement au plus grand arc descendu, par lequel le mobile parvenant au point le plus bas, remonte ensuite aussi haut que le lui permet la vitesse qu'il avoit acquise au point le plus bas; mais ce n'est pas à dire pour cela que quelque force externe, indépendamment de la force de la chute, imprimant au mobile une plus grande vitesse que celle qu'il acquiert en descendant librement par le plus grand arc de descente, ne pût le faire remonter plus haut, & partant ne pût lui faire décrire un arc plus long. Il faut donc distinguer le cas où le

mobile remonte librement par la seule force qu'il a acquise en descendant, & celui où le mobile remonte, poussé par quelque force étrangère qui agiroit sur lui au point le plus bas de la Tautochrone, quand même il ne seroit point descendu. Ici donc nous entendons le plus grand arc remonté librement, dont nous cherchons l'abscisse x , ou la plus grande hauteur verticale à laquelle le mobile puisse s'élever, après être descendu par le plus grand arc. Pour cela je prends l'Equation trouvée (§. 6.) avec les signes inférieurs, $mmx = -2nn$

$$+ 2nr + 2nnc - \frac{r}{n}, \text{ dans laquelle, à la place de } r, \text{ j'écris le plus grand arc total remonté librement, qui (§. 30.) est } \\ = nl \left(\frac{2mm+2n}{mm+2n} \right); \text{ \& j'aurai } mmx = -2nn + 2nn \\ l \left(\frac{2mm+2n}{mm+2n} \right) + 2nnc - l \left(\frac{2mm+2n}{mm+2n} \right) = (\text{parce que comme} \\ \text{nous avons vu (§. 30.) } c^{-l \left(\frac{2mm+2n}{mm+2n} \right)} = \frac{mm+2n}{2mm+2n}) - \\ 2nn + 2nnl \left(\frac{2mm+2n}{mm+2n} \right) + \frac{mmnn+2n^3}{mm+n} = (\text{après la réduction}) \\ 2nnl \left(\frac{2mm+2n}{mm+2n} \right) - \frac{mmnn}{mm+n}; \text{ donc } x = \frac{2nn}{mm} l \left(\frac{2mm+2n}{mm+2n} \right) \\ - \frac{nn}{mm+n}.$$

XXXIII. Puisque pour la descente, la plus grande abscisse (§. 24.) $= n - \frac{2nn}{mm} l \left(\frac{mm+2n}{2n} \right)$; si l'on en retranche la plus grande abscisse pour l'ascension libre, le reste sera la quantité, dont la hauteur de laquelle est descendu le corps, surpasse la hauteur à laquelle il est remonté, & cette différence sera $= \frac{mmn+2nn}{mm+n} - \frac{2nn}{mm} l \left(\frac{mm+n}{n} \right)$; qui s'évanouit, lorsque $n = \infty$, comme on le trouve par la règle tirée de l'Anal. des Infin. petits; & cela doit être ainsi dans la Tautochrone ordinaire pour le vuide, où le mobile descend & remonte à la même hauteur.

XXXIV. Il nous reste à déterminer aussi le plus grand arc remonté par une force imprimée au mobile au point le plus bas, c'est-à-dire, jusqu'où la Tautochrone s'étend du côté

de l'arc remonté, avant que de parvenir au point de rebroussement, si elle en a un, où la Courbe se termine & change sa courbure, comme font les Courbes rebrousantes. Pour cela il nous faut recourir à l'Equation (S. 9.) pour l'arc re-

monté, qui est celle-ci, $dy = dr \sqrt{(m^4 - 4nn - 8nnc - \frac{r}{n} - 4nnc - \frac{2r}{n})} : mm$. Afin donc d'avoir le plus grand arc total remonté par une force étrangere, il faut faire $dy = 0$, & par conséquent $m^4 = 4nn - 8nnc - \frac{r}{n} + 4nnc - \frac{2r}{n} = (2n - 2nc - \frac{r}{n})^2$; & extrayant la racine, $mm = 2n - 2nc - \frac{r}{n}$, d'où l'on tire $c - \frac{r}{n} = \frac{2n - mm}{2n}$, & prenant les logarithmes $-\frac{r}{n} = l(\frac{2n - mm}{2n})$, ce qui donne $r = -nl(\frac{2n - mm}{2n})$, ou, ce qui est la même chose, $r = nl(\frac{2n}{2n - mm})$ == au plus grand arc total remonté par une force étrangere au de-là duquel la Courbe ne s'étend plus.

XXXV. *Coroll. 1.* Si l'on prend $mm = 2n$, l'on aura $r = nl(\frac{2n}{0}) = \infty$; dans ce cas donc l'arc remonté devient infiniment long, d'où l'on voit encore que les Tautochrones se varient selon la valeur du nombre arbitraire mm .

XXXVI. *Coroll. 2.* Le plus grand arc remonté par une force étrangere, est toujours plus grand que le plus grand arc remonté librement, quelque soit le nombre mm , ce que je démontre ainsi: $2n \times (mm + 2n) = 2mmn + 4nn > 2mmn + 4nn - 2m^4 = (2n - mm) \times (2mm + 2n)$, donc $\frac{2n}{2n - mm} > \frac{2mm + 2n}{mm + 2n}$, & partant aussi $nl(\frac{2n}{2n - mm})$ ou le plus grand arc remonté par une force étrangere, est plus grand que $nl(\frac{2mm + 2n}{mm + 2n})$, c'est-à-dire, plus grand que le plus grand arc remonté librement. (S. 30.)

XXXVII. Enfin il faut trouver la plus grande abscisse

pour l'arc remonté par une force étrangere, c'est-à-dire, celle qui répond au point de rebroussement de l'arc remonté. Pour cela je me sers de l'Equation (5.6.) dont je me suis déjà servi (5.32.) pour trouver le plus grand arc remonté

librement, sçavoir $mmx = -2nn + 2nr + 2nnc - \frac{r}{x}$,
 & maintenant j'y substitüe pour r le plus grand arc total remonté par une force étrangere, qui est (5.33.) $= nl(\frac{2n}{2n-mm})$,
 ce qui me donnera $mmx = -2nn + 2nnl(\frac{2n}{2n-mm})$
 $+ 2nnc - l(\frac{2n}{2n-mm}) = (e^{-l(\frac{2n}{2n-mm})} \text{ étant } = \frac{2n-mm}{2n}) -$
 $2nn + 2nnl(\frac{2n}{2n-mm}) + 2nn - mmn = 2nnl(\frac{2n}{2n-mm})$
 $- mmn$; d'où l'on tire $x = \frac{2nn}{mm} l(\frac{2n}{2n-mm}) - n =$ à la plus
 grande abscisse pour l'arc remonté par une force étrangere.

XXXVIII. Si $mm = 2n$, l'on aura $x = nl(\frac{2n}{0}) - n = \infty$; d'où il suit que le point de rebroussement de l'arc remonté, dans le cas $mm = 2n$, est infiniment éloigné de l'horizontale tirée par le point le plus bas, c'est-à-dire, que l'abscisse devient infiniment longue. Et afin que le mobile puisse remonter dans la Courbe à cette hauteur infinie, il faut qu'il ait au point le plus bas une vitesse initiale infinie, c'est-à-dire, plus grande qu'aucune vitesse donnée.



DE L'IMPORTANCE DE L'ANALOGIE,
*& des rapports que les Arbres doivent avoir entre
 eux pour la réüffite & la durée des Greffes.*

Par M. DU HAMEL.

19 Avril
 1730.

J'EUS occasion l'année dernière, dans un Mémoire qui avoit pour titre, *Recherche sur les Causes de la Multiplication des Eſpeces de Fruits, &c.* d'examiner en paſſant l'anatomie de la Greſſe, ou l'arrangement organique des fibres de pluſieurs eſpeces d'Arbres dans l'endroit de l'application de cette Greſſe, & j'y reconnus un changement de direction dans les fibres & un entortillement de vaiſſeaux, qui imitant fort la mécanique de certaines glandes, ou formant un viſcere nouveau, peuvent bien être capables de donner quelques perfections aux Fruits, mais nullement de produire ces changements prompts & eſſentiels que lui attribuent la plupart des Auteurs d'Agriculture.

Cet examen des parties de la Greſſe ne m'ayant pas paru ſuffiſant pour détruire un ſentiment ſi généralement adopté, à moins que ces obſervations anatomiques ne fuſſent ſoutenües par des expériences exactes & pluſieurs fois réitérées; je rapportai pluſieurs Greſſes que l'on pratique tous les jours ſur différents ſujets, ſans qu'il en arrive de changement dans les eſpeces; comme d'une même eſpece de Pêche ſur Aman-dier, ſur différentes eſpeces de Pruniers & ſur Abricotiers; d'une même eſpece de Poires ſur Pommier, ſur Coignaffier, ſur Sauvageon-Poirier, ou ſur l'Épine blanche; d'une même eſpece de Prune ſur diverſes eſpeces de Pruniers, & ſur Pêcher de Noyau, même ſur Abricotier & ſur Amandier; car quoique ces deux dernières Greſſes ne m'aient point donné de fruit, leurs bois & leurs ſeuilles m'ont fait ſuffiſamment connoître que les eſpeces n'étoient pas changées.

Je promis outre cela de rendre compte à l'Académie du succès d'un nombre d'autres Greffes & d'Ecuissions que j'avois fait executer conformément aux différents procédés qui se trouvent dans presque tous les Traités d'Agriculture, tels que de greffer le Poirier sur le Chêne, sur le Charme, sur l'Orme; sur l'Erable, sur le Prunier, &c. le Meurier sur l'Orme, sur le Figuier & sur le Coignassier, le Cerisier sur le Laurier-Cerise, le Pêcher sur le Noyer, la Vigne sur le Cerisier & sur le Noyer, & une infinité d'autres Greffes & Ecuissions de cette nature.

Le peu de succès de ces Greffes n'a pas seulement servi à me persuader que ces Auteurs avoient avancé ces expériences sans les avoir faites, & seulement sur des vrai-semblances; mais outre cela m'a fait faire des réflexions sur un certain rapport & un accord nécessaire qui doivent être entre la Greffe & le sujet, sans lequel, ou elle ne prend point du tout, ou si elle prend, elle ne durera pas long-temps; je crois cependant devoir remarquer que quoique les Greffes que je viens de nommer, ne m'aient pas réussi trois années de suite que je les ai fait executer successivement en fente, en écuission, à œil poussant, à œil dormant & par approche; cependant la plupart ne me serviront pas d'exemple dans ce Mémoire, parce que j'entrevois encore quelques espérances de réussite dans des Expériences que je me propose d'exécuter l'année prochaine, je m'attacherai seulement à quelques-unes de ces Greffes que j'ai eu lieu d'examiner de plus près, & d'une manière plus circonstanciée, parce qu'elles m'ont donné occasion de faire plusieurs Remarques & Observations singulières, dont la Physique & l'Agriculture pourront, je crois, tirer quelque avantage.

Les voici en peu de mots, séparées des Expériences qui y ont donné naissance. Je réserve pour un autre lieu le détail de ces Expériences.

Il n'est pas besoin de remarquer qu'il y a des Greffes qui reprennent avec une facilité surprenante, c'est une chose trop connue.

Mais quelques-unes des Greffes que j'ai appliquées, ont péri sur le champ, & n'ont pas donné la moindre espérance de reprise.

Les autres, après s'être entretenues long-temps vertes, ont par la suite également péri; plusieurs ont poussé à la première sève, & n'ont pu subsister jusqu'à la seconde.

Quelques-unes se sont soutenues les deux sèves, & n'ont pu passer l'Automne. Il y en a eu qui ont fort bien poussé deux ou trois ans, & ont dans la suite subi le même sort que les précédentes.

Mais ce qui est important à observer, est que quelques-unes ont péri sans que le sujet en souffrit, & que d'autres n'ont paru périr que par la mort du sujet.

Ce qu'il y a encore de singulier, c'est que la plupart des Arbres greffés ne durent pas si long-temps que s'ils ne l'étoient pas, je dis la plupart, car j'en ai remarqué quelques-uns qui m'ont paru subsister plus long-temps étant greffés que ne l'étant pas. Mais ce secours étant indépendant de l'analogie, comme on le verra dans le détail de cette expérience, il n'en résulte aucune exception à la règle générale.

Quelquefois même une Greffe appliquée sur un sujet qui ne dure que peu d'années de sa nature, subsistera plus long-temps que l'étant sur un autre que l'on regarde comme plus robuste, & qui est d'un naturel à vivre davantage.

Quand on ne feroit aucune attention aux utilités de la Greffe, ces observations ne découvrent-elles pas une bizarrerie, souvent même une opposition d'événements assez singuliers pour exciter la curiosité d'un Physicien, & pour être surpris qu'une pratique, d'ailleurs si belle, si utile & si nécessaire, n'ait été étudiée, & ne le soit encore que de très-peu de personnes.

C'est ce qui m'a fait souhaiter depuis long-temps de connoître la Greffe, mais ce n'est que depuis quelques années que je me suis aperçu de la difficulté qu'il y avoit à y parvenir. Elle peut être pratiquée sur tous les Arbres; ainsi pour la connoître parfaitement, il faudroit avoir la connoissance

non

non seulement de tous les Arbres, mais encore de la nature & de l'organisation des parties dont ils sont composés pour établir les rapports & les contrariétés d'où naissent les succès différents que nous remarquons dans les Greffes.

Nos connoissances sont si bornées sur ce point, qu'il est presque impossible d'en établir des regles certaines.

Aussi mes vûes ne sont-elles point d'indiquer par l'anatomie des Arbres les Greffes qui pourroient réussir, mais seulement d'expliquer par le peu de connoissance que nous avons de cette anatomie, les observations qui résultent d'un nombre d'expériences que j'ai faites à ce sujet, c'est ce qui m'oblige de faire quelques réflexions sur l'anatomie des Arbres & de la Greffe avant de passer à l'explication de chaque observation, à laquelle je joindrai le détail des expériences qui y ont donné lieu.

Une regle générale pour qu'une Greffe réussisse parfaitement, est qu'il faut qu'elle se joigne si intimement avec le sujet sur lequel on l'applique, qu'elle ne fasse qu'un corps avec lui, & qu'elle devienne comme une de ses branches.

Si les Arbres se ressembloient tous, que leurs liqueurs fussent de même qualité, que la configuration de leurs parties solides & de leurs vaisseaux fût la même, que leurs diametres fussent égaux, leur élasticité semblable, la quantité de leurs trachées pareille, & ces trachées également remplies d'air, la réussite des Greffes seroit probablement certaine, & la même dans tous les Arbres. Mais cette conformité & ces rapports se trouvent-ils entr'eux? c'est ce qu'il faut examiner.

L'on sçait, & il est inutile de s'en souvenir, que les Arbres sont composés d'une multitude de fibres creuses; & depuis les observations de M.^{rs} Malpighi & Grew, l'on ne doute plus que chaque Arbre n'ait ses fibres de diametres inégaux & de figures différentes. Ainsi (comme je l'ai remarqué dans celui de mes Mémoires que j'ai cité) lorsqu'on applique une Greffe, il se doit faire tant aux orifices des fibres de la Greffe que de celles du sujet, des sections plus ou moins considérables suivant la différence des diametres & la disproportion de figure

qui se rencontre entre les fibres de l'un & de l'autre, & cette disproportion, lorsqu'elle est considérable, est probablement un obstacle à la réussite des Greffes.

Si nous entrevoyons quelques différences entre les parties solides des Plantes, nous n'en découvrons pas de moins marquées entre les fluides. Les unes ont leur sève blanche comme du lait, d'autres l'ont rousse, d'autres l'ont claire & limpide, les unes l'ont coulante, les autres l'ont visqueuse. Leurs différences se manifestent encore plus par le goût & à l'odorat, puisqu'il y en a de douces, de suaves, d'agréables, d'aigres, d'ameres, d'âcres, de caustiques, de même que quelques-unes sont aromatiques, au lieu que d'autres sont fétides & puantes.

Ces différences s'étendent presque à l'infini, & suivant qu'elles sont plus ou moins considérables, elles deviennent des causes de la variété du succès des Greffes.

Suivant ce que je viens d'établir, la différente qualité des sèves produit une grande différence entre les Arbres; mais si nous faisons attention à la quantité de cette sève, elle nous donnera une nouvelle cause de différences qui ne sera pas moins essentielle, puisqu'il y a des Arbres, tels que le Saule, qui dans une année font des poussées si considérables, que d'autres, comme les Buis, pourroient à peine les égaler dans l'espace de douze ou quinze années.

Examinons maintenant, pour ne pas s'arrêter à des particularités inutiles, une autre différence plus sensible, & peut-être plus considérable que les précédentes, qui se rencontre cependant entre plusieurs Arbres, c'est celle de leur printemps, ou plutôt du temps de leur pousse en cette saison : car l'Amandier est en fleur avant que les autres Arbres aient ouvert leurs boutons; quand les autres Arbres sont en fleurs, il est garni de feuilles, & son fruit est noué avant que le Meurier ait commencé à pousser.

Que de différences entre les Arbres, me dira-t-on? & comment se peut-il faire que malgré ces oppositions, quantité de Greffes reprennent, qu'un Arbre adopte une branche qui lui est si étrangère, pour la nourrir comme la sienne

propre, & que cette branche qui change subitement de nourriture, s'en accommode & profite assés souvent mieux que sur son propre tronc ?

La question est embarrassante, & j'avoüerai qu'il est plus aisé de comprendre comment certains Arbres refusent de s'allier par la Greffe, que d'expliquer la facilité avec laquelle d'autres reprennent. L'expérience est constante cependant ; & si l'on greffe en œil poussant un Poirier, par exemple, sur un autre, ou un Cerisier sur le Mérisier, on sera surpris de le voir pousser quelques jours après, & acquérir plus de demi-pied de longueur en quinze jours de temps. Je ne chercherai point d'autre explication de cette expérience qu'un grand rapport entre les deux Arbres à tous égards, de même qu'une contrariété manifeste entre le Prunier & l'Orme que je donne pour exemple des Greffes qui ne donnent aucune marque de reprise, parce que les ayant greffés plusieurs fois l'un sur l'autre, la Greffe a touëjours péri sur le champ.

Dans le nombre d'expériences que j'ai faites, j'ai remarqué une grande quantité de Greffes qui semblent tenir le milieu entre les deux exemples que je viens de donner, en ce qu'elles ne périssent pas si promptement, car celles qui étoient faites avant l'Automne s'entretenoient vertes tout l'Hiver, comme celles qui ont repris & celles que j'avois fait faire au Printemps s'entretenoient vertes un mois & même plus sans aucune apparence de pousser ; il y en a même eu entre les unes & les autres qui ont poussé la première sève, même quelquefois la seconde, & qui n'ont pas laissé pour cela de périr. La Greffe du Poirier sur l'Orme, le Charme, l'Erable ; celle du Meurier sur l'Orme, le Figuier, & un grand nombre d'autres, peuvent être donnés pour exemple.

Si l'on recherche les raisons de ces faits dans l'anatomie de ces Greffes, on trouvera par l'examen particulier des sujets, qu'ils n'ont eu avec elles qu'une légère communication par le moyen de quelques fibres qui leur ont fourni assés de nourriture pour les entretenir dans leur verdeur, même pour, dans le temps de la grande sève, leur faire produire quelques

bourgeons ; le reste des fibres , & qui assés souvent sont en plus grand nombre sera noir , desséché , ou plutôt abreuvé , tantôt de gomme , & tantôt d'une sève corrompüe , qui est presque comme de la boüe , ce qui n'arrive que par la disproportion des vaisseaux , ou par la différente qualité des liqueurs ; obstacles évidents à l'union parfaite de toutes les fibres & à l'introduction de la sève , qui n'ayant pû enfler les vaisseaux de la Greffe , a dû nécessairement séjourner & se corrompre dans l'endroit de l'application.

J'ai dit , dans le détail de mes observations , qu'il y avoit des Greffes qui pouffoient à merveille la première année , & donnoient de grandes espérances de réussite , que cependant la seconde ou la troisième année elles ne manquoient pas de périr.

La Greffe de l'Amandier sur le Prunier , & celle du Prunier sur l'Amandier , m'en ont fourni deux beaux exemples qui méritent bien d'être examinés chacun en particulier.

J'avois fait écussonner à la sève d'Août des Amandiers sur des Pruniers de petit Damas noir sur la foi de plusieurs Auteurs , qui assûrent que par ce moyen on retarde la sève de l'Amandier , ce qui fait qu'il n'est pas tant exposé aux gelées du Printemps , les écussions se collerent à merveille à leurs sujets , conserverent leur verdure pendant tout l'Hiver , poufferent avec force au Printemps & l'Été , ensorte qu'en Automne ces Amandiers étoient garnis de feuilles , lorsque les autres en étoient tout dépouillés ; on ne peut guere une plus belle espérance. J'en fis lever quelques-uns de la Pépinière pour mettre en place , mais ceux que j'avois ainsi transplanté , moururent au Printemps , & les autres qui étoient restés dans la Pépinière , continuèrent encore à pousser passablement le reste de l'année , & au Printemps de l'année suivante la plupart éprouverent le sort des premiers. Je dis la plupart , car j'en ai encore deux qui ne sont pas entièrement périés , mais à peine les Greffes ont-elles assés de force pour se garnir de feuilles , & les sujets diminuent tous les jours de grosseur , ce qui annonce une mort prochaine.

Des circonstances essentielles à remarquer, c'est que le Prunier, dans l'endroit de la Greffe, paroïsoit appauvri & comme diminué de grosseur, & que l'Amandier y formoit un gros bourlet, effet de la vivacité avec laquelle il avoit poussé.

On ne peut attribuer ce défaut de réussite, ni à la disproportion des fibres de ces deux Arbres, ni à la qualité différente de leur sève ; la facilité que cette Greffe a eûe à reprendre, & la vivacité avec laquelle elle a poussé, établissent au contraire l'analogie des sujets ; de plus on greffe tous les jours, & avec un égal succès, le Pêcher sur le Prunier & sur l'Amandier, ce qui ne pourroit pas être, si ces deux Arbres étoient d'une nature bien différente.

Pourquoi le Prunier a-t-il donc paru appauvrir, est-ce qu'il n'a pas assés de sève pour nourrir l'Amandier ? Il fait cependant dans nos Jardins un Arbre presque aussi grand, cela est vrai, mais il ne le fait pas en aussi peu de temps ; les fibres de l'Amandier plus souples que celles du Prunier, peut être entrelassées d'un plus grand nombre de trachées, remplies d'une sève plus éthérée, plus élastique, sont plus sensibles aux changements de l'Atmosphère, entrent plus aisément en jeu, & par cette raison poussent de meilleure heure au Printemps. En un mot l'Amandier croît plus vite que le Prunier.

Si les branches dépensent donc plus de sève que le tronc n'en peut fournir, elles le succent nécessairement, elles l'affaiblissent, & l'empêchent par-là de prendre de la grosseur.

Il n'est pas surprenant que la Greffe ait si bien poussé la première année, c'est que le Prunier étoit en état de suffire à la nourriture d'une jeune branche, mais si-tôt qu'elle aura pris une certaine grosseur, il faut nécessairement que le sujet périclisse.

Nous avons remarqué que ces Arbres périclissent plutôt au Printemps qu'en toute autre saison, ce qui est une suite nécessaire de ce que nous venons de dire, car l'Amandier prenant son jeu de ressort au Printemps plutôt que le Prunier,

il le succe, pour ainsi dire, dans le temps que déjà exténué & encore en repos, il n'étoit pas en état de lui fournir de la sève, ce qui acheve de le faire périr.

Cette cause, qui est plus considérable au Printemps qu'en toute autre saison, subsistera cependant toute l'année, si (comme je l'ai prouvé dans un Mémoire que j'ai lû l'année dernière à l'Académie) la condensation & la rarefaction successive de l'air sont les premiers principes du mouvement de la sève.

J'ai remarqué encore que les Arbres que j'avois fait lever pour mettre en place, étoient morts avant ceux qu'on avoit laissés dans la Pépinière, ce qui vient sans doute de ce qu'un Arbre transplanté n'est jamais si abondant en sève que celui dont les racines n'ont point changé de situation.

Avant de quitter cette Greffe, il est bon d'observer que j'ai fait cette expérience sur des Pruniers en plein vent & dans une terre plus sèche qu'humide, car si l'on n'avoit pas égard à ces circonstances, il pourroit bien arriver de la différence dans la réussite.

Si les Greffes des Amandiers sur Pruniers ont péri, nous allons voir que le Prunier sur l'Amandier a eu le même sort. Une conformité si exacte d'effets engage à admettre aussi de la conformité dans les causes, aussi s'y rencontre-t-elle, & quoique l'une de ces Greffes soit périée d'inanition, & l'autre d'une surabondance de substance, elles se réunissent comme nous allons le voir, en ce que la disproportion d'élasticité, de souplesse, de ressort dans les fibres, ou dans les liqueurs, a produit deux effets si contraires.

Le Frere Philippe, habile dans l'art du Jardinage, & qui a la direction des Pépinières des RR. PP. Chartreux, fit greffer en couronne le Prunier sur l'Amandier, les Greffes poussèrent d'abord à merveille, mais ensuite la gomme s'étant mise au lieu de l'insertion, elle les fit périr.

Cette seule observation découvre la cause de la perte de ces Greffes : l'Amandier qui pousse plus vite que le Prunier, & qui entre plus aisément en jeu, charie à la greffe, qui est

encore presque sans action, une grande quantité de sève, & beaucoup plus que la Greffe n'en peut dépenser, ce qui occasionne un dépôt de sève dans l'endroit de l'insertion, l'humidité s'en évapore, cette sève s'y épaisit, & forme la gomme qui successivement obstrue les vaisseaux, ferme les passages aux liqueurs, d'où s'ensuit la sécheresse & la perte de la Greffe.

Ainsi après avoir vû, dans la première expérience, l'Amandier, qui demande à son sujet plus de sève qu'il ne lui en peut fournir, périr d'inanition, nous voyons dans cette expérience le Prunier, qui ne dépense pas tant de sève que lui en fournit l'Amandier, périr, pour ainsi dire, de réplétion & d'engorgement.

C'est ici le lieu de rendre raison d'une autre singularité que j'ai remarquée dans le travail que j'ai fait sur la Greffe; puisque sans sortir de ces principes, & par cette même disproportion de sève entre la Greffe & le sujet, on découvre comment certaines Greffes périssent sans que le sujet en pâtisse, pendant que d'autres semblent ne périr que par la mort du sujet.

✓ Dans le premier cas il ne paroît pas surprenant qu'une Greffe, qui ne trouve point dans un sujet la quantité ou la qualité de sève qui lui convient, périsse, rien n'est plus naturel : l'Arbre sur lequel elle est appliquée, la regarde comme une branche inutile, il ne lui envoie plus de substance, mais il se forme de nouveaux jets auxquels il fournit de la sève en abondance.

Le contraire arrive cependant, & l'on voit des sujets périr en même temps, souvent même avant leurs Greffes, parce qu'ils ne leur fournissent pas assez de sève, & quelquefois parce qu'ils lui en fournissent trop.

Les Greffes de l'Amandier sur le Prunier, & du Prunier sur l'Amandier, que je viens de donner pour exemples, paroissent seules servir à établir ces deux observations, j'y ajouterai cependant, pour me servir d'exemples connus de tout le monde, ceux de la Greffe du Poirier sur le Coignassier, &

du Pommier sur le Paradis, pratiquées dans une terre sèche & légère ; car quoique dans ces sortes de terres ces dernières Greffes durent quelque temps, & ne périssent pas si promptement que celles de l'Amandier sur le Prunier, cependant les sujets ne prennent presque point de corps, ne poussent que peu en racines, la Greffe jaunit, & j'ai presque toujours remarqué que la mort est bientôt suivie de celle du sujet.

Nous ne pouvons pas, à la vérité, soupçonner, comme nous avons fait à l'égard de l'Amandier & du Prunier, une grande différence entre l'élasticité des fibres & des liqueurs de ces Arbres, puisqu'ils poussent à peu-près d'aussi bonne heure au Printemps, mais nous reconnoissons bien clairement que le Poirier dépense plus de sève que le Coignassier ne lui en peut fournir, ce qui arrive aussi aux différentes especes de Pommiers, à l'égard de celui de Paradis, puisque les Greffes formoient un gros bourlet à l'endroit de l'insertion, tandis que les sujets ne prenoient presque point de corps, & que les jeunes branches & les feuilles jaunissoient pendant que les racines ne faisoient aucun progrès.

Mais ce qu'il est bon d'observer encore, est que ces Arbres réussissent fort bien, & durent assés long-temps dans les terres grasses, parce que les sujets sont plus en état de fournir à la Greffe le suc qu'elle demande.

Il est donc constant, par les expériences que je viens de rapporter, que les sujets qui ne sont pas en état de fournir à la Greffe la sève qu'elle leur demande, périssent faute de substance.

Mais il peut aussi se faire, & il est même probable que cela est, qu'il y aura des sujets qui périront par une abondance de sève peu proportionnée à la capacité des branches ; car alors il est nécessaire que la sève surabondante soit, ou reportée aux racines selon le système de la circulation, ou que dans le système opposé elle reste dans les vaisseaux sans mouvement ; or dans l'un & dans l'autre cas il est nécessaire que la Greffe en patisse, plus à la vérité dans celui-ci, parce que cette stase, ce repos, emporte nécessairement la corruption.

Mais

Mais dans le système de la circulation, le reflux vers les racines étant considérablement augmenté, on conçoit, sans qu'il soit nécessaire que je l'explique, que l'Arbre en doit beaucoup souffrir; de-là peut-être ces galles, ces gourmes, ces chancres & ces écoulements de substance qui arrivent quelquefois aux Arbres greffés, mais presque toujours aux Arbres qu'on étête, comme les Ormes, les Peupliers & les Saules, qui ne manquent gueres au bout d'un temps de tomber en pourriture.

Que d'accord, que de convenance il faudroit entre la Greffe & le sujet pour qu'elle réussît parfaitement. Qu'il est rare de le trouver, cet accord! Je ne sçai même si en le cherchant avec beaucoup de peine, nous pouvons esperer de le trouver, aussi ne faut-il pas s'étonner s'il y a si peu de Greffes qui réussissent dans cette perfection. Il y en a qui refusent entièrement de reprendre, d'autres périssent peu de temps après, mais généralement tous les Arbres greffés ne durent pas, à beaucoup près, si long-temps que s'ils ne l'étoient pas.

On ne voit gueres périr de vieillesse un Coignassier, même dans les terres assés sèches: cependant dans ces sortes de terres, lorsqu'on greffe dessus un Poirier, il ne dure pas long-temps. Je pourrois dire la même chose du Prunier, lorsqu'on le greffe dessus un Pêcher, ou lorsqu'on le laisse sans être greffé: il n'y a que le Poirier greffé sur son Sauvageon, l'Orme femelle sur l'Orme mâle, & d'autres Greffes pareilles qui durent ordinairement très-long-temps. Mais malgré cette raison de convenance entre ces sortes de Greffes & leurs sujets, la durée de celles-là n'égale jamais celle du Sauvageon-Poirier, ou de l'Orme mâle, lorsqu'ils ne sont point greffés; cependant j'ai dit qu'il y avoit quelques Arbres qui m'avoient paru durer plus long-temps étant greffés que ne l'étant pas. Lorsque j'aurai rapporté l'expérience qui a donné lieu à cette observation, on sera en état de juger si ces Greffes ont quelque chose de singulier qui mérite faire une exception de la regle générale.

Mem. 1730.

. P.

Il y a bien dix-huit ans que nous avons fait greffer dans une terre grasse & auprès de terre des Pruniers de la Reine Claude sur des Pêchers de Noyau : ces Greffes n'ont pas beaucoup poussé en bois, mais elles ont donné de bon fruit, & subsistent encore assez bien à leur manière, c'est-à-dire, dans leur état languissant, pour espérer qu'elles dureront encore du temps ; cependant c'est un fait que le Pêcher de Noyau ne dure pas si long-temps, & je crois qu'ils seroient périés, s'ils n'avoient pas été greffés.

Pour comprendre le secours que le Pêcher a pû recevoir du Prunier, il faut sçavoir que le Pêcher est fort délicat, qu'il pousse avec une vivacité extrême, qu'il produit beaucoup plus de branches qu'il n'en peut nourrir, ce qui fait qu'il est presque toujours plein de bois mort, qu'il perd souvent quelques-unes de ses grosses branches, quelquefois même le tronc meurt, & il repousse quelques foibles jets du pied, ce qui oblige presque toujours à l'arracher, parce que ces sortes de rejets ne sont pas bons à grande chose, aussi le plante-t-on en espalier à cause de la délicatesse de son bois, qui veut être mis à couvert des injures du temps ; c'est aussi dans cette même vûë qu'on lui retranche beaucoup de bois par les différentes tailles qu'on lui fait, afin de le mettre plus en état de nourrir les branches qu'on lui laisse.

Ce sont à peu-près les mêmes avantages qu'il retire de la Greffe du Prunier : à ses branches délicates on en substitue de robustes, & on n'a pas besoin de lui retrancher de son bois, puisque le Prunier ne pousse qu'autant qu'il en peut nourrir ; mais le Prunier fait un plus grand Arbre que le Pêcher, c'est aussi pour cela que nos Greffes ont donné si peu de bois, & elles seroient, je crois, périés, si les sujets n'avoient pas été dans une terre très-grasse & fertile ; de plus les fibres du Pêcher sont un peu plus souples que celles du Prunier, la fève de celui-là est plus éthérée, plus élastique, & c'est peut-être pour cette raison que nos Arbres sont jaunes & languissants.

Malgré ce que je viens de dire de la Greffe du Prunier

sur le Pêcher, je crois qu'on doit regarder comme une règle générale, que les Arbres greffés ne durent pas si long-temps que ceux qui ne le sont pas, & que le plus ou le moins de durée qu'on peut remarquer entre les Arbres greffés dépend du plus ou moins de rapport qui se rencontre entre la Greffe & le sujet.

Enfin j'ai dit avoir remarqué certains Arbres qui duroient plus long-temps greffés sur des sujets, qui de leur nature ne durent que peu d'années, que l'étant sur d'autres qui sont plus robustes, & durent plus long-temps. La Greffe du Pêcher nain sur le Pêcher de Noyau, ou sur Prunier, m'a donné occasion de faire cette observation; car quoique le Prunier vive plus long-temps que le Pêcher de Noyau, cependant le Pêcher nain dure plus long-temps sur le Pêcher de Noyau que sur le Prunier, ce qui est encore un effet bien sensible de l'analogie dont dépend la réussite des Greffes.

Mais voici encore une expérience qui découvre bien l'effet de ces rapports, nous la devons au Frere Philippe, Chartreux, & elle subsiste encore à Moulinot, Maison de Campagne de son Ordre.

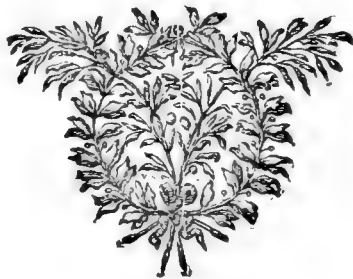
On y voit un Poirier, sur lequel on a appliqué une Greffe de Poirier & uné de Pommier. Toutes deux portent du fruit, mais la Greffe de Pommier est chétive & petite, au lieu que celle de Poirier, qui se trouve sur son sujet, est forte & vigoureuse. On voit au contraire dans le même endroit un Poirier greffé sur Pommier. Ce Poirier donne du fruit, & est assez beau, quoiqu'il ne soit pas si vigoureux que sur son Sauvageon. J'ai fait executer l'une & l'autre Greffe dans mon Jardin, mais ce sont de jeunes Greffes, les Arbres sont petits, & ainsi ne peuvent pas encore nous servir à porter un jugement aussi assuré que ceux de Moulinot, qui sont en plein rapport.

Si cette recherche est utile à la Physique, par le détail où l'on est entré des effets que produisent l'analogie & les rapports qui se trouvent entre les Arbres & les explications que l'on a données de quantité de phénomènes qui appartiennent

116 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE

à la Greffe, l'Agriculture en peut aussi tirer de grands avantages, puisqu'elle peut servir à détromper de quantité de faits rapportés dans les ouvrages d'Agriculture, & qu'on reconnoîtra que la plupart des Greffes qu'on nous y propose ne peuvent réussir, & que celles qui reprennent, ne produisent point les effets qu'on nous en fait espérer, puisque, comme nous l'avons vû, les especes se conservent, quoique greffées, sur des sujets de nature bien différente, comme le Poirier sur l'Épine, & le Prunier sur le Pêcher.

Pour faire encore plus d'usage de cette théorie, pour l'avantage de la pratique, nous pourrions faire sentir, par exemple, qu'il est quelquefois utile que l'analogie ne se trouve pas dans toute sa perfection. Mais cette réflexion & bien d'autres nous meneroient trop loin, pour peu qu'on voulût entrer dans le détail à proportion de leur utilité, ainsi je les réserve pour un autre Mémoire.



SECONDE PARTIE
DE L'EXAMEN
DE LA
POUSSEE DES VOÛTES.

Par M. COUPLET.

J'AI donné à l'Académie en 1729 la première Partie de l'Examen de la Poussée des Voûtes, dans laquelle, en considérant les Vouffoirs comme polis, je déterminois la forme & la poussée des Voûtes, avec l'épaisseur de leurs pied-droits, & la charge que les Cintres de Charpente souffrent dans la construction des Voûtes uniformes.

15 Mars
1730.

Dans cette hypothese des Vouffoirs polis, on est obligé de donner aux Voûtes beaucoup d'épaisseur dans leurs reins, pour qu'elles en ayent une suffisante au sommet, & qu'elles ayent la forme qui leur est nécessaire pour que leurs Vouffoirs fassent équilibre entr'eux, ce qui fait que les pied-droits doivent avoir une épaisseur considérable.

Comme dans le Coroll. 3. du Théor. 2. de la première Partie, j'ai remarqué que les Voûtes se soutiennent sans qu'on leur donne la forme nécessaire à l'équilibre de leurs Vouffoirs, considérés comme polis, j'ai promis de donner une seconde Partie de l'examen des Voûtes, dans laquelle je considérerois les Vouffoirs comme grenus, & assés liés ensemble, ou assés adhérents, pour ne point glisser les uns contre les autres.

Deux raisons m'ont engagé à considérer dans la première Partie les Vouffoirs comme polis; la première, parce que tous ceux qui ont traité de la poussée des Voûtes, les ont regardé comme tels, & la seconde, pour faire voir la différence qu'il y a entre la poussée des Voûtes dont on regarde les Vouffoirs

comme polis, & la poussée de celles dont on regarde les Voussoirs comme grenus, & assés adhérents, ou liés ensemble, pour ne pouvoir point glisser les uns sur les autres.

Quand je dis que je considère les Voussoirs comme assés liés pour ne pouvoir point glisser l'un sur l'autre, je ne prétends pas pour cela les considérer dans la Voûte comme ne faisant tous ensemble qu'une seule pièce, ou un seul corps, j'entends seulement, par cette liaison, que les faces des Voussoirs qui se toucheront, seront assés embarrassées par l'engrénement de leurs parties, pour ne point glisser les unes contre les autres, & que cette liaison ne s'opposera point à l'écartement des Voussoirs dans la rupture de la Voûte, en sorte que ces Voussoirs pourront être écartés l'un de l'autre par toutes forces où il n'y aura point de frottement de leurs faces l'une contre l'autre.

C'est suivant cette nouvelle hypothèse que j'ai résolu les Problemes qui composent cette suite, ou seconde Partie de la Poussée des Voûtes.

Dans le premier Probleme & ses Corollaires, je détermine la moindre épaisseur uniforme que l'on puisse donner à une Voûte circulaire de 180° .

Dans le second Probleme je détermine la plus petite épaisseur uniforme d'une Voûte circulaire de 120° .

Dans le troisième Probleme je détermine la poussée horizontale d'une Voûte, dont l'intrados & l'extrados sont circulaires.

Dans le quatrième Probleme je détermine la base du pied-droit, telle que l'effort composé de la pesanteur de la Voûte, de sa poussée horizontale & de la pesanteur dudit pied-droit soit dirigé vers un point donné quelconque de ladite base.

Enfin les formules que j'ai déduites dans la Solution de ces Problemes, & les moyens dont je me suis servi pour les résoudre, pourront facilement être employés pour déterminer les moindres épaisseurs que l'on puisse donner à une Voûte circulaire & uniforme pour un Arc circulaire quelconque;

comme aussi pour déterminer les épaisseurs nécessaires aux pied-droits, suivant leur hauteur quelconque, pour résister à la poussée des Voûtes dont ils seroient chargés.

THEOREME.

Si l'on suppose que les Voussoirs ne puissent point glisser les uns contre les autres, la Voûte ne cassera point, si la corde de la moitié de l'extrados ne coupe point l'intrados, mais qu'elle se trouve dans l'épaisseur de la Voûte.

DÉMONSTRATION.

Soit une Voûte $BMANC$, si la corde AB de sa moitié Figure 14
 BMA ne coupe point l'intrados IKL ; je dis que la Voûte ne cassera point, car quelle que soit la charge du sommet A de cette Voûte, elle se communiquera directement & sans interruption au Coussinet B , suivant la ligne droite AFB qui se trouve dans l'épaisseur de la Voûte.

Car pour que la Voûte s'écrasât, il faudroit que l'angle BAC s'ouvrit, & par conséquent que les Coussinets B & C s'écartassent, ce qui ne peut point être, puisque nous les regardons comme des obstacles invincibles.

Donc la Voûte ne cassera point, si la corde de la moitié de l'extrados ne coupe point l'intrados.

Ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE.

Si la corde AB de la demi-Voûte coupoit l'intrados $ODEP$, il arriveroit que si le sommet A étoit trop chargé, l'angle DAE pourroit s'ouvrir, & par conséquent les angles ADB , AEC , pourroient se fermer, si les parties $BMDO$, $CNEP$, de la Voûte n'étoient pas suffisantes pour résister à l'ouverture qu'elles seroient forcées de faire.

Mais si l'on remplit de Maçonnerie la partie $AMBQ$, suivant la ligne horizontale AQ , cette charge, toute grande qu'elle est, qui fait perdre entièrement l'équilibre qui étoit

observé précédemment dans tous les Voussoirs, n'occasionnera cependant point la rupture de la Voûte, puisque nous avons supposé que la Clef *A* ne peut point glisser, & aussi ces constructions se pratiquent-elles dans les Salons voûtés, ou Berceaux de Terrasses, avec tout le succès que l'on peut desirer.

Lorsqu'on ne remplit point les reins de la Voûte, ce qui arrive dans les Edifices publics très-exhaussés, comme les Eglises, où l'on craint que la poussée ne soit trop grande contre les pied-droits, la partie supérieure de la Voûte tend toujours à baisser plutôt que les parties les plus proches des Coussinets, ce qui fait souvent rompre la Voûte.

Or l'on voit que ces Voûtes rompües, dont on n'a que trop d'exemples, manquent toujours à peu-près à distances égales du Coussinet & du sommet; d'où l'on peut conclurre que cet endroit est le plus foible de la Voûte.

Il faut donc, suivant cette remarque, donner à la Voûte une épaisseur telle que cet endroit par lequel la Voûte manque presque toujours, ait une force suffisante pour se soutenir, & empêcher la Voûte de changer de courbure, c'est pourquoi nous allons chercher dans le Probleme suivant quelle est l'épaisseur qu'il faut donner à cet endroit le plus foible, je veux dire à l'endroit également distant du Coussinet & du sommet, pour que la Voûte se soutienne dans sa première courbure, autant qu'il est possible qu'elle s'y soutienne; je dis autant qu'il est possible, car il est constant que quand on décintre une Voûte ou une Plate-bande, elle se surbaisse de plusieurs pouces, sans que pour cela les Voussoirs ou Clavaux glissent les uns sur les autres, parce que pour lors ils ne font que se serrer plus étroitement sur leurs joints.

PROBLEME

PROBLEME I.

Trouver la moindre épaisseur que l'on puisse donner à une Voûte circulaire de 180°, c'est-à-dire, d'un demi-Cercle entier, dont on suppose l'épaisseur uniforme.

SOLUTION.

Soit une Voûte circulaire RAF , dont l'intrados SBE & l'extrados RAF soient des demi-Cercles concentriques, il s'agit de déterminer la moindre épaisseur AB qu'on lui puisse donner. Figure 2.

Pour cela je suppose que la Voûte est composée de quatre Voussiors égaux, attachés ensemble, comme par des charnières, aux points A, T, K , & aux Coussinets par les charnières F, R .

Cela posé, il est évident que les Voussiors AK, AT , feront effort par leur pesanteur pour s'ouvrir sur la charnière A , & pour se fermer sur les charnières K, T , & par conséquent pour écarter les Voussiors KF, TR , en les faisant tourner sur les charnières F, R , par lesquelles ils tiennent aux Coussinets; & que les Voussiors KF, TR , feront par leur poids effort pour tourner à contre-sens sur les mêmes charnières F, R , & par conséquent pour résister aux Voussiors AK, AT , qui font effort pour les renverser. Voyons maintenant quels sont ces efforts.

Le Voussior AK , dont la pesanteur est réunie à son centre de gravité H , laquelle j'exprime par la diagonale GI , du parallélogramme OK , fera en même temps deux efforts; l'un exprimé par GO , pour résister à la poussée du Voussior AT , qui fait un effort semblable, & l'autre exprimé par GK , pour pousser contre le Voussior KF . Mais cet effort GK se décompose aussi en deux autres efforts, dont l'un est horizontal, exprimé par IK , & l'autre vertical, exprimé par XK , en sorte que ces deux efforts font des effets opposés, puisque l'effort horizontal IK tend à renverser le Voussior KF , en le faisant tourner sur la charnière F , & que l'effort vertical XK tend

à affermir ce même Vouffoir KF , en le faisant tourner à contre-sens sur la même charnière F , ainsi l'excès de l'énergie de l'effort horizontal IK , sur l'énergie de l'effort vertical KK , fera l'énergie qui reste au Vouffoir AK , pour renverser le Vouffoir KF sur la charnière F .

Il faut donc faire l'épaisseur de la Voûte telle que cet excès soit égal à l'énergie que le Vouffoir KF a pour tourner du côté du centre de la Voûte, puisqu'il faut que le Vouffoir KF résiste à la poussée du Vouffoir AK .

Pour cela soit l'épaisseur AB de la Voûte..... $= x$.

Le rayon BC de l'intrados $= KC = CE$ $= r$.

Le rayon AC de l'extrados sera..... $= r + x$.

Soit l'arc BK , ou son égal KE $= a$.

Soit BZ , ou son égal LE $= d$.

L'on aura CZ ou son égal $CL = ZK$ $= r - d$.

Du centre de gravité H du Vouffoir AK , soit tiré HD perpendiculairement sur AC , & du centre de gravité P de l'autre Vouffoir FK soit tiré PQ , perpendiculaire sur CF , pour lors, puisque les Vouffoirs sont égaux,

L'on aura $CD = CQ$, & par la propriété des centres de gravité, l'on aura HD , ou son égal $ZI = \frac{6dr + 6drx + 2dxx}{6ar + 3ax}$.

Mais pour faciliter le calcul, soit fait HD , ou $ZI = z$, puisque $CZ = ZK$, & que le triangle CZK est rectangle.

L'on aura CZ , ou $ZK = \sqrt{\frac{CK^2}{2}} = \sqrt{\frac{rr}{2}}$; ou plutôt comme nous avons fait $BZ = d$, nous aurons CZ , ou son égal $ZK = r - d$.

Et par conséquent $IK = ZK - ZI = r - d - z$.

Et l'on aura GI , ou $KK = AZ = x + d$.

Mais l'effort horizontal $IK = r - d - z$ du Vouffoir AK est appliqué au bras de levier $MF = CZ = r - d$, ainsi l'énergie de cet effort horizontal IK , pour faire tourner le Vouffoir KF sur la charnière F , est $= rr - 2rd + dd + dz - rz$.

Et en la place de $rr - 2rd + dd$, qui est le carré

de $r - d = ZK$, si l'on met $\frac{rr}{2}$, qui est aussi le carré

de ZK , puisque nous avons trouvé ci-dessus $ZK = \sqrt{\frac{rr}{2}}$,

l'on aura l'énergie de la force horizontale $IK = \frac{rr}{2} + d\zeta - r\zeta$.

Et la force verticale $KK = d + x$ est appliquée au bras de levier $LF = d + x$, ainsi son énergie, pour affermir le Vouffoir KF , est $= dd + 2dx + xx$.

Et si l'on retranche, comme nous avons dit ci-devant, l'énergie verticale $dd + 2dx + xx$ du Vouffoir AK , de son énergie horizontale $\frac{rr}{2} + d\zeta - r\zeta$, le reste $\frac{rr}{2} + d\zeta - r\zeta - dd - 2dx - xx$ fera l'énergie qui reste au Vouffoir AK , pour renverser le Vouffoir KF autour de la charnière F .

Voyons maintenant quelle est l'énergie du Vouffoir KF pour résister.

Puisque le Vouffoir KF est égal au Vouffoir AK , sa pesanteur sera comme celle du Vouffoir $AK = d + x$.

Mais cette pesanteur $d + x$ étant réunie au centre de gravité P , est appliquée au bras de levier $QF = AD$, ainsi son énergie sera $= d + x \times AD$.

Maintenant pour trouver le levier $QF = AD$, il faut considérer que CH divisant l'angle ACK ou ZCK en deux parties égales, l'on aura... $CK : CZ :: KV : VZ$. Et *componendo*.... $CK + CZ : CZ :: KV + VZ : VZ$. C'est-à-dire..... $2r - d : r - d :: r - d : VZ$.

$$\text{Donc } VZ = \frac{r-d \times r-d}{2r-d}.$$

$$\text{Mais } VZ : CZ :: HD : CD.$$

$$\text{C'est-à-dire, } \frac{r-d \times r-d}{2r-d} : r-d :: \zeta : CD = \frac{2r\zeta - d\zeta}{r-d}.$$

$$\text{Mais } AD \text{ ou le levier } QF = AC - CD = r + x - \frac{2r\zeta + d\zeta}{r-d}.$$

Donc l'énergie $d + x \times AD$, que nous avons trouvée

pour le Vouffoir KF , est $d+x \times r+x+d+x$
 $\times \frac{2rz+dz}{r-d}$, c'est-à-dire, $dr+dx+xr+xx -$
 $\frac{2drz+ddz-2rzx+dzx}{r-d}$, laquelle énergie du Vouffoir KF
 doit être égale à l'énergie $\frac{rr}{2}+dz-rz-dd-2dx$
 $-xx$ qui reste au Vouffoir AK pour le renverser sur la
 charnière F , ce qui donne cette Equation,
 $dr+dx+xr+xx - \frac{2drz+ddz-2rzx+dzx}{r-d} = \frac{rr}{2}$
 $+dz-rz-dd-2dx-xx$ (A).

Comme nous avons trouvé $\frac{rr}{2} = rr - 2dr + dd$.

L'on aura $\frac{r}{\sqrt{2}} = r - d$.

Et par conséquent l'on aura $d = r - \frac{r}{\sqrt{2}}$.

Mettant $\frac{6dr+6dx+2dx}{6ar+3ax}$ en la place de z .

Et $r - \frac{r}{\sqrt{2}}$ en la place de d dans l'Equation (A).

Elle se changera en cette Equation ordonnée

$$x^3 + x^2 \times \left\{ \frac{-3rr}{+12ra\sqrt{2}} \right\} + x \times \left\{ \frac{-3r^3}{+15ar\sqrt{2}} \right\} - \frac{9ar^3}{3a\sqrt{2}-r} + \frac{6ar^3\sqrt{2}}{3a\sqrt{2}-r} = 0.$$

Maintenant si l'on fait le rayon BC ou r de la
 Voûte = 14.

Et que l'on multiplie ce rayon par $3\frac{1}{2}$, qui est
 à peu-près le nombre de fois que la circonférence
 contient son diamètre, l'on aura la demi-circonfér. ... = 44.

Et l'arc BK ou a , qui est $\frac{1}{4}$ de la demi-circ. sera = 11.

Et $\sqrt{2}$ étant = $1\frac{41421}{100000}$, l'Equation se changera
 en celle-ci,

$$x^3 + 40.787xx + 257.05x - 475.587... = 0.$$

Mettant $y = \frac{40.787}{3}$ en la place de x , l'on aura cette
 Equation, qui n'aura point de second terme,

$$y^3 * - 297.473y + 1043.38618 = 0.$$

Or comme $\frac{297.473}{27} > \frac{1043.3618}{4}$, & que le troisième terme est négatif, il s'en suit que cette Équation est irréductible, & l'on trouvera par approximation la valeur positive de x , qui est celle que nous cherchons entre 1.4866 & 1.4865, qui est la plus petite épaisseur d'une Voûte uniforme en plein Cintre, c'est-à-dire, en demi-cercle, dont le diamètre porteroit sur les Couffinets, & seroit, comme nous l'avons supposé, de 28 pieds dans l'intrados.

COROLLAIRE.

Si l'on vouloit que l'effort GK du Vouffoir AK fut dirigé vers la charnière F sur le Couffinet, pour lors la pesanteur du Vouffoir AK ne pourroit jamais renverser le Vouffoir KF , parce que ce Vouffoir KF trouveroit sur la charnière F un obstacle invincible. Figure 2.

Et dans ce cas l'épaisseur de la Voûte seroit telle, que l'on auroit cette proportion $GI : IK :: KL : LF$, puisque l'on suppose que la direction GK passe par le point F , & que les triangles GIK , KLF , sont semblables.

Mais dans le Probleme précédent nous avons trouvé $GI = d + x$ aussi-bien que LF , & nous avons trouvé $IK = r - d - z$ & $KL = r - d$.

L'on aura donc cette proportion $d + x : r - d - z :: r - d : d + x$. Donc $dd + 2dx + xx = rr - 2dr + dd - rz + dz$.

Mettant en la place de z sa valeur, que nous avons trouvée, Probleme précédent, $= \frac{6drr + 6drx + 2dxx}{6ar + 3ax}$, & mettant aussi en la place de d sa valeur, que nous avons aussi trouvée dans le même Probleme $= r - \frac{r}{\sqrt{2}}$, l'on aura, en ordonnant l'Équation,

$$x^3 + xx \times \left\{ \begin{array}{l} 12ar \\ -rr \\ -3ar\sqrt{2} \\ +rr\sqrt{2} \end{array} \right\} + x \times \left\{ \begin{array}{l} 15ar^2 \\ -3r^3 \\ -9ar^2\sqrt{2} \\ +3r^3\sqrt{2} \end{array} \right\} - 3r^4 + 6ar^3 - 6ar^3\sqrt{2} + 3r^4\sqrt{2} = 0.$$

Mettant, comme dans le Probleme précédent, 11, 14,
 $1. \frac{41421}{100000}$ en la place de $a, r, \sqrt{2}$, l'on aura
 $x^3 + xx \times 38.661 + x \times 251.771 - 826.6125 = 0.$

Et l'on trouvera, par approximation, la valeur positive de x entre 2.3678 & 2.3688 pour la moindre épaisseur uniforme que l'on puisse donner à la Voûte de 28 pieds de diametre, afin que l'effort GK de la moitié AK de la demi-Voûte soit dirigé vers la charnière F du Couffinet.

P R O B L E M E I I.

Déterminer la plus petite épaisseur uniforme AB d'une Voûte RAF de 120°.

S O L U T I O N.

Figure 3.

Soit, comme dans le Probleme précédent, la Voûte RAF , divisée en quatre Vouffoirs égaux attachés ensemble par trois charnières T, A, K , & aux Couffinets par deux charnières R, F .

Cela posé, soient les arcs de l'intrados

BK, KE , &c. = a .

Soit le rayon BC de l'intrados..... = r .

L'épaisseur AB de la Voûte..... = x .

L'on aura le rayon AC de l'extrados... = $r + x$.

L'on aura ZK , ou son égal EV , qui est

le sinus de 30°..... = $\frac{r}{2}$.

L'on aura ZC = $\sqrt{\frac{3rr}{4}}$.

Et l'on aura BZ = $r - \sqrt{\frac{3rr}{4}}$.

Ou, si l'on veut, soit, comme dans le
 Probleme précédent, BZ = d .

L'on aura $AZ = d + x = BZ + AB = r - \sqrt{\frac{3rr}{4}} + x$.

Soit H le centre de gravité du Vouffoir AK , l'on aura par la propriété des centres de gravité, HD , ou AG , ou ZI
 $= \frac{6drr + 6dix + 2dxx}{6ar + 3ax}$, comme dans le Probleme précédent.

Et par conséquent $IK = ZK - ZI = \frac{r}{2} - \frac{6drr - 6drx - 2dxx}{6ar + 3ax}$.

Mais la pesanteur du Vouffoir AK , étant réunie à son centre de gravité H , & agissant verticalement suivant la diagonale GI du parallélogramme YK , se décompose en deux autres forces, dont l'une agit suivant le côté GY du parallélogramme YK , & l'autre suivant le côté GK du même parallélogr. en sorte que si l'on exprime la pesanteur du Vouffoir AK par la diagonale $GI = d + x$, l'effort que ce Vouffoir fera suivant GK contre le Vouffoir KF , sera exprimé par GK .

Mais cet effort exprimé par GK , que le Vouffoir AK fait contre le Vouffoir KF , se décompose en deux forces, suivant l'horizontale IK , exprimé par $IK = \frac{r}{2} - \frac{6drr - 6drx - 2dxx}{6ar + 3ax}$, & l'autre suivant la verticale XK , exprimé par XK , ou par la pesanteur GI du Vouffoir $= x + d$.

Ainsi le Vouffoir AK fait contre le Vouffoir KF deux efforts contraires, c'est-à-dire, l'un horizontal IK , pour le renverser sur la charnière F , & l'autre XK , pour l'affermir.

Donc l'excès de l'énergie de l'effort horizontal IK sur l'énergie de l'effort vertical XK , sera l'énergie qui reste au Vouffoir AK , pour renverser le Vouffoir KF , en le faisant tourner sur la charnière F .

Ainsi il faut faire l'épaisseur x de la Voûte telle que cet excès d'énergie soit égale à l'énergie que le Vouffoir KF a pour tourner vers le centre de la Voûte, ou pour résister au Vouffoir AK .

Si l'on multiplie l'effort horizontal $IK = \frac{r}{2} - \frac{6drr - 6drx - 2dxx}{6ar + 3ax}$ par son bras de levier $MF = MN - FN = \sqrt{\frac{3rr}{4} - \frac{r-x}{a}}$ (parce que FN étant le sinus de 30° , vaut la moitié du rayon $FC = r + x$).

Le produit $\frac{rr}{4} \sqrt{3} - \frac{3dr^2\sqrt{3} - 3drrx\sqrt{3} - drxx\sqrt{3}}{6ar + 3ax} - \frac{rr}{4} + \frac{3dr^2 + 3drrx + drxx}{6ar + 3ax} - \frac{rx}{4} + \frac{3drrx + 3drxx + dx^2}{6ar + 3ax}$ sera l'énergie horizontale du Vouffoir AK .

Maintenant si l'on multiplie l'effort vertical $XK = x + d$ par son bras de levier $LF = \rho F - \rho L$, l'on aura l'énergie de l'effort vertical.

Mais F_ρ étant le sinus de 60° , est égal $\sqrt{\frac{3}{4}CF^2}$, c'est-à-dire, $\frac{CF}{2} \sqrt{3} = \frac{r+x}{2} \sqrt{3}$, & nous avons trouvé $\rho L = ZK = \frac{r}{2}$. Donc le levier $LF = F_\rho - \rho L = \frac{r+x}{2} \sqrt{3} - \frac{r}{2}$.

Multipliant, comme nous avons dit, ce levier par l'effort vertical $XK = x + d$, le produit $\frac{rx\sqrt{3}}{2} + \frac{xx\sqrt{3}}{2} + \frac{dr\sqrt{3}}{2} + \frac{dx\sqrt{3}}{2} - \frac{rx}{2} - \frac{dr}{2}$ fera l'énergie de l'effort vertical.

Et si l'on retranche cette énergie verticale de l'énergie horizontale que nous avons trouvée, le reste

$$\begin{aligned} & \frac{3dr^3\sqrt{3} - 3drxx\sqrt{3} - drxx\sqrt{3} + 3dr^3 + 3drxx + drxx}{6ar + 3ax} \\ & + \frac{3drxx + 3drxx + dx^3}{6ar + 3ax} + \frac{rr\sqrt{3} - rr - rx}{4} \\ & - \frac{rx\sqrt{3} - xx\sqrt{3} - dr\sqrt{3} - dx\sqrt{3} + rx + dr}{2} \text{ fera l'énergie qui reste} \\ & \text{au Vouffoir } AK, \text{ pour renverser le Vouffoir } KF \text{ sur la char-} \\ & \text{nière } F \text{ de son Couffinet, lequel reste étant abrégé, devient} \\ & = \frac{-3dr^3\sqrt{3} - 3drxx\sqrt{3} - drxx\sqrt{3} + 3dr^3 + 6drxx + 4drxx + dx^3}{6ar + 3ax} \\ & + \frac{rr\sqrt{3} - rr + rx - 2xx\sqrt{3} - 2dr\sqrt{3} - 2dx\sqrt{3} + 2dr}{4}. \end{aligned}$$

Lequel reste doit être égal à l'énergie du Vouffoir KF , que nous allons chercher.

Comme le Vouffoir KF est égal au Vouffoir AK , sa pesanteur sera comme celle du Vouffoir $AK = d + x$.

Mais cette pesanteur étant réunie au centre de gravité P du Vouffoir KF , est appliquée au bras de levier OF , qu'il faut trouver.

Nous avons..... $OF = F_\rho - O_\rho$.

Mais nous avons trouvé..... $F_\rho = \frac{r+x}{2} \sqrt{3}$.

Il ne s'agit donc plus que de trouver.... O_ρ .

Pour

Pour cela il faut considérer que KS est la différence du sinus de 60° au sinus de 30° , puisque $KS = ZC - EV$, c'est-à-dire, $= \sqrt{\frac{3rr}{4}} - \frac{r}{2}$.

Mais pour abrégé, soit fait $KS = b$, l'on aura, par la propriété du centre de gravité, $P\pi$, ou son égal $O\rho = \frac{6br r + 6br x + 2bx x}{6ar + 3ax}$.

$$\text{Donc le levier } OF = F\rho - O\rho = \frac{r+x}{2} \sqrt{\frac{3}{3}} - \frac{6br r - 6br x - 2bx x}{6ar + 3ax}.$$

Et multipliant ce levier par la pesanteur $d+x$ du Vouffoir KF , le produit $\frac{dr\sqrt{3} + dx\sqrt{3} + rx\sqrt{3} + xx\sqrt{3}}{2}$

$$- \frac{6bdr r - 6bdr x - 2bdxx - 6brxx - 6brxx - 2bx^3}{6ar + 3ax} \text{ sera l'énergie}$$

du Vouffoir KF , laquelle énergie doit être égale à l'énergie qui reste au Vouffoir AK , pour renverser le Vouffoir KF ,

ce qui donne cette Equation $\frac{dr\sqrt{3} + dx\sqrt{3} + rx\sqrt{3} + xx\sqrt{3}}{2}$

$$= \frac{6bdr r - 6bdr x - 2bdxx - 6brxx - 6brxx - 2bx^3}{6ar + 3ax}$$

$$= \frac{-3dr^3\sqrt{3} - 3drxx\sqrt{3} - drxx\sqrt{3} + 3dr^3 + 6drxx + 4drxx + dx^3}{6ar + 3ax}$$

$$+ \frac{rr\sqrt{3} - rr + rx - 2rx\sqrt{3} - 2xx\sqrt{3} - 2dr\sqrt{3} - 2dx\sqrt{3} + 2dr}{4}.$$

Mettant $r = \sqrt{\frac{3rr}{4}}$ en la place de d , & $\sqrt{\frac{3rr}{4}} - \frac{r}{2}$ en la place de b . Et ordonnant l'Equation, l'on aura

$$x^3 + xx \times \left\{ \frac{24ar\sqrt{3}}{-3rr\sqrt{3}} \right\} + x \times \left\{ \frac{30arr\sqrt{3}}{-3r^3\sqrt{3}} \right\} + 12ar^3\sqrt{3} \\ \frac{-\frac{3}{2}ar}{6a\sqrt{3} - r\sqrt{3}} = 0.$$

Maintenant si l'on fait $r = 14$; a étant un arc de 30° sera $= 7\frac{1}{3}$, & substituant 14 & $7\frac{1}{3}$ en la place de r & a , dans cette Equation l'on aura

$$x^3 + 40.227xx + 291.5959x - 83.416 = 0.$$

D'où l'on tirera par approximation la valeur positive de x

Mem. 1730.

R

130 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 entre 0.276 & 0.275, qui est la moindre épaisseur uni-
 forme que l'on puisse donner à une Voûte de 120 degrés.
 Ce qui donne x approché à $\frac{1}{1000}$ près.

REMARQUE.

Nous avons trouvé dans le Probleme 1^{er}, qu'une Voûte en plein Cintre, d'une épaisseur uniforme de 14 pieds de rayon, ou de 28 pieds de diametre, devoit avoir son épaisseur entre 1.4866 & 1.4865 pour être en équilibre & conserver sa figure.

Nous avons aussi trouvé dans le Probleme 2, qu'une Voûte circulaire de 120°, d'une épaisseur uniforme, & de 14 pieds de rayon, devoit avoir une épaisseur entre 0.276 & 0.275 pour se soutenir en équilibre & ne point changer de figure.

Si l'on veut comparer l'épaisseur de la Voûte en plein Cintre avec la Voûte de 120°, il faut réduire ces Voûtes à une même largeur, comme, pour exemple, à une même largeur de 28 pieds.

La Voûte en plein Cintre ayant, dans l'hypothese du Probleme 1^{er}, 28 pieds de diametre, a aussi 28 pieds de largeur.

La Voûte de 120°, ayant dans l'hypothese du Probl. 2, 14 pieds de rayon, a pour sa largeur 14 $\sqrt{3}$, & nous avons trouvé que cette Voûte devoit avoir son épaisseur entre 0.276 & 0.275.

Si l'on prend 0.276 pour l'épaisseur de cette Voûte, l'on aura l'épaisseur d'une Voûte semblable de 120° sur 28 pieds de largeur par cette analogie $14\sqrt{3} : 28 ::$ ou $\sqrt{3} : 2 :: 0.276$ est à l'épaisseur de la Voûte de 120° de 28 pieds de large, laquelle épaisseur est égale $\frac{0.552}{\sqrt{3}} = 0.184\sqrt{3} = 0.3187$.

Mais nous avons trouvé 1.4866 pour l'épaisseur uniforme d'une Voûte en plein Cintre & de 28 pieds de diametre; d'où l'on voit que l'épaisseur d'une Voûte de 120° doit être près de cinq fois plus petite que l'épaisseur d'une Voûte en plein Cintre de pareille largeur de 28 pieds.

Si l'on veut réduire en lignes l'épaisseur 1.4866 de la

Voûte en plein Cintre de 28 pieds de diametre, l'on fera cette analogie $10000 : 14866 :: 144 \text{ lignes} : 214 \text{ lignes}$ environ $\frac{1}{14}$, dont le quatrième terme $214 \text{ lignes} \frac{1}{14}$ ou 1 pied 5 pouces 10 lignes $\frac{1}{14}$ est l'épaisseur d'une Voûte en plein Cintre de 28 pieds de diametre.

L'on aura, par une analogie semblable, l'épaisseur de la Voûte de 120° de 14 pieds de rayon $1000 : 276 :: 144 \text{ lignes} : 39 \frac{744}{10000}$, ou 3 pouces 3 lignes environ $\frac{3}{4}$.

L'on aura pareillement l'épaisseur d'une Voûte de 120° de 28 pieds de largeur par cette analogie $10000 : 3187 :: 144 \text{ lignes} : 45 \text{ lign.} \frac{8928}{10000}$, ou 3 pouces & près de 10 lignes.

Comme toutes les épaisseurs que nous venons de trouver sont très-petites, il n'est pas étonnant que l'on trouve aujourd'hui des Voûtes très-minces qui subsistent depuis plus de cinq cents ans.

Cependant il faut bien se garder de donner à une Voûte de 120° & de 28 pieds de corde une épaisseur qui soit, comme nous la venons de trouver, seulement de 46 lignes; car les charnières ou points d'appuis des Vouffoirs se trouveroient dans les surfaces de la Voûte, enforte que ces Vouffoirs qui porteroient sur leurs arrêtes, éraferoient bien-tôt ces Arrêtes, & par conséquent la Voûte périroit, ou changeroit de figure, c'est pourquoi il faut au moins doubler l'épaisseur que la formule nous donne, & pour lors les points d'appuis des Vouffoirs seront de la quatrième partie de l'épaisseur totale, car pour lors l'épaisseur de la Voûte que la formule donne se trouvera au milieu de l'épaisseur totale, & comme elle en occupera la moitié, il y aura un quart de l'épaisseur totale au dessus de l'extrados que donne la formule, & un quart au dessous de l'intrados de la formule, & par conséquent les charnières qui se trouvent dans l'intrados & l'extrados de la formule, se trouveront au quart de l'épaisseur totale, & dans ce cas la corde appartiendra à un arc pris au quart de l'épaisseur de la Voûte du côté de l'intrados. Il faut remarquer que ceci n'est qu'à peu-près, & n'est pas exactement

132 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE

vrai dans la rigueur géométrique, parce que les centres de gravité des Vouffoirs changent en augmentant leur épaisseur.

L'épaisseur de la Voûte étant ainsi doublée, les charnières ou points d'appuis seront en état de résister, enforte que cette Voûte de 28 pieds de corde auroit 92 lignes, ou 7 pouces 8 lignes, & les points d'appuis des Vouffoirs en auroient le quart, c'est-à-dire, auroient 1 pouce 11 lignes, ce qui n'est encore qu'une trop foible épaisseur, si la Voûte doit souffrir quelque charge. En un mot il faut augmenter l'épaisseur trouvée par la formule de la quantité nécessaire à deux appuis, & cette nécessité doit se régler sur la bonté des matières dont on doit construire la Voûte.

Ainsi pour que l'épaisseur résultante de nôtre formule, qui est de près de 3 pouces 10 lignes, soit au milieu de l'épaisseur, il faudroit tripler cette épaisseur résultante 3 pouc. 10 lignes, ce qui donneroit 11 pouc. 6 lign. pour l'épaisseur que l'on doit donner à la Voûte demandée de 14 pieds de rayon, & formée sur un arc de 120 degrés.

P R O B L E M E I I I.

Déterminer la poussée horizontale d'une Voûte, dont l'intrados & l'extrados sont circulaires, en supposant que les Vouffoirs ne sont point polis, & ne peuvent pas par conséquent glisser les uns sur les autres.

S O L U T I O N.

Figure 4. Soit le rayon MC de l'intrados. $= r$.
 L'épaisseur AM de la Voûte. $= m$.
 L'on aura le rayon AC de l'extrados. $= r + m$.
 Soit en P le centre de gravité de la demi-Voûte ANM .
 Et soit l'arc MN de l'intrados. $= a$.
 La hauteur MO de l'intrados. $= d$.

L'on aura, par la propriété des centres de gravité, la distance Pp du centre de gravité P de ladite Voûte AN à la flèche MO de la Voûte $= \frac{6drr + 6drm + 2dmm}{6ar + 3am}$.

Maintenant puifque la pefanteur de la demi-Voûte eft réunie à fon centre de gravité P ; fi par ce centre de gravité P , l'on tire la verticale LR , & que par le point S , milieu de AM , l'on tire l'horizontale SL , & que du point L , où elle rencontre la verticale LR , l'on tire LX au milieu du Couffinet, & que du point X , l'on tire XR parallèle à LT , & que l'on faffe RT parallèle à LX , l'on aura un parallélogramme TX , dont la diagonale LR exprimant la pefanteur de la demi-Voûte AN , la ligne LT exprimera l'effort que cette demi-Voûte AN fait horizontalement pour réfifter à l'effort femblable de l'autre demi-Voûte, & la ligne LX exprimera l'effort que cette même demi-Voûte AN fait fuyant cette direction LX contre le Couffinet.

Mais l'effort LX n'étant point perpendiculaire fur le rayon BC , ou, ce qui eft le même, fur le joint BN , & faifant un angle obtus LXB , glifferoit fur ce joint BN du côté de B , fi le joint étoit parfaitement poli; mais fi le joint BN n'eft point poli, la force LX y trouvera un appui folide, malgré fon obliquité, attendu l'engrénage des parties.

Il faut donc néceffairement fuppofer que les joints d'une Voûte circulaire font graveleux, enforte que les Vouffoirs ne puiffent point gliffer les uns fur les autres.

Cela pofé, il faut chercher quel eft l'effort LX que le Vouffoir AN fait contre le Couffinet BN .

Mais cette force LX fe décompofant en deux forces ZX , RX , dont la verticale ZX exprime la pefanteur du Vouffoir, & l'horizontale RX exprime l'effort horizontal qui fe fait contre le pied-droit, il vaut mieux chercher quelle eft cette force verticale ZX , & cette force horizontale RX , comme ci-après.

Comme le feûteur XCS eft femblable au feûteur NCM . L'on aura $CM : CS :: MO : SQ$.

C'eft-à-dire $r : r + \frac{m}{2} :: d : SQ = \frac{dr + \frac{dm}{2}}{r}$

Mais $SQ = LR$. Donc $LR = \frac{dr + \frac{dm}{2}}{r} = \frac{2dr + dm}{2r}$.

L'on aura aussi..... $CN : CX :: NO : XQ$.

C'est-à-dire..... $r : r + \frac{m}{2} :: NO : XQ$.

Mais..... $NO^2 = CN^2 - CO^2$.

Et... $CO^2 = rr - 2dr + dd$, parce que $CO = r - d$.

Et... $CN^2 = rr$. Donc $NO^2 = CN^2 - CO^2 = 2dr - dd$.

Donc $r : r + \frac{m}{2} :: \sqrt{2dr - dd} : XQ = \frac{r + \frac{m}{2} \times \sqrt{2dr - dd}}{r}$.

Maintenant si de XQ , que nous venons de trouver

$= \frac{r + \frac{m}{2} \times \sqrt{2dr - dd}}{r}$, l'on retranche RQ , ou son égal $P\rho$,

que nous avons trouvé $= \frac{6dr + 6dr + 2dm}{6ar + 3am}$, le reste

$\frac{r + \frac{m}{2} \times \sqrt{2dr - dd}}{r} - \frac{6dr + 6dr + 2dm}{6ar + 3am}$ fera la valeur

de XR , qui exprime l'effort horizontal que la Voûte fait contre le pied-droit ou pilier butant.

Maintenant si l'on exprime la pesanteur de la demi-Voûte par la surface ANM , au lieu de l'exprimer par LR , comme nous l'avons fait ci-devant, l'on aura cette surface ANM de la manière suivante.

Puisque l'arc MN de l'intrados $= a$, l'on aura l'arc $A\varepsilon$ de l'extrados par cette analogie,

$$CM : CA :: MN : A\varepsilon.$$

C'est-à-dire..... $r : r + m :: a : A\varepsilon = \frac{ar + am}{r}$.

Et si l'on multiplie ces deux arcs $MN = a$ & $A\varepsilon = \frac{ar + am}{r}$ par la moitié de leur distance AM , c'est-à-dire,

par $\frac{m}{2}$, le produit $\frac{ma}{2} + \frac{amr + amm}{2r} = \frac{2amr + amm}{2r}$ sera la surface de la demi-Voûte $A\varepsilon NM$, c'est-à-dire, sera la pesanteur de cette demi-Voûte.

Mais la pesanteur de cette demi-Voûte est à l'effort horizontal RX comme LR est à RX ; l'on aura donc l'effort horizontal qui se fait suivant RX par cette analogie LR , que nous avons trouvée $= \frac{2dr + dm}{2r}$

$$\text{est à } RX = \frac{r + \frac{m}{2} \times \sqrt{2dr - dd}}{r} - \frac{6dr - 6dr - 2dm}{6ar + 3am}$$

comme la pesanteur $\frac{2amr + am}{2r}$ de la demi-Voûte est à l'effort horizontal de la Voûte suivant RX , que l'on trouvera

$$= \frac{2amr + am}{2dr + dm} \times \frac{r + \frac{m}{2} \sqrt{2dr - dd}}{r} - \frac{6dr - 6dr - 2dm}{6ar + 3am}$$

$$= \frac{am}{d} \times \frac{r + \frac{m}{2} \sqrt{2dr - dd}}{r} - \frac{6dr - 6dr - 2dm}{6ar + 3am}$$

$$= \frac{2amr + am}{2dr} \times \sqrt{2dr - dd} - \frac{6mr - 6rm - 2m^3}{6r + 3m} \text{ qui}$$

est la poussée horizontale qu'il falloit trouver.

PROBLEME IV.

Lorsque les Voussoirs ne sçauroient glisser les uns sur les autres, Figure 44
trouver la base EF du pied-droit, telle que l'effort composé de la pesanteur de la Voûte, de sa poussée horizontale, & de la pesanteur dudit pied-droit, soit dirigé vers un point donné quelconque H de ladite base EF .

SOLUTION.

Pour abrégér le calcul, soit regardé le trapeze $BIFN$ comme un parallelogramme, dont la hauteur soit GV , moyenne entre BI & NF .

Quoique dans ce changement, où les surfaces sont égales, le centre de gravité D du trapeze se trouve transporté au centre de gravité K du parallelogramme, & que l'on donne par conséquent à la surface $BIFN$, regardée comme un parallelogramme, plus d'énergie qu'elle n'en auroit en la regardant comme un trapeze, ce changement est si léger, qu'on le peut regarder comme zero, puisque l'on est obligé de faire aux pied-droits des changements beaucoup plus considérables, comme d'y percer des Fenêtres & des Portes, auxquelles cependant on ne fait aucune attention.

Soit donc la hauteur moyenne VG du pied-droit $= p$.

La base IF du trapeze regardé comme parallelogramme..... $= q$.

Puisque $BIFN$ est regardé comme un parallelogramme, nous aurons sa surface..... $= pq$.

Soit la base entière EF du pied-droit..... $= x$.

La base EI de son fruit fera..... $= x - q$.

Si l'on fait la hauteur $BI = VG = p$, l'on aura la surface du talus $BIE = \frac{px - pq}{2}$.

Comme nous exprimons la pesanteur de la Maçonnerie par son profil ou surface de sa coupe, nous aurons la pesanteur de la partie $BIFN = pq$, & nous aurons la pesanteur de la partie $BIE = \frac{px - pq}{2}$.

Maintenant soit le point d'appui H , placé de manière que l'on ait..... $EF : EH :: f : g$.

C'est-à-dire, que l'on ait... $x : EH :: f : g$.

L'on aura... $EH = \frac{gx}{f}$.

Comme la pesanteur du parallelogramme $BIFN$ est réunie à son centre de gravité, ou son milieu K , elle est appliquée au bras de levier HG .

Mais $HG = EF - GF - EH = x - \frac{q}{2} - \frac{gx}{f}$.

Ainsi en multipliant la pesanteur pq par ce bras de levier $HG = x - \frac{q}{2} - \frac{gx}{f}$, le produit $pqx - \frac{pqq}{2} - \frac{pqgx}{f}$ fera l'énergie de la partie $BIFN$ du pied-droit.

De même si l'on multiplie la pesanteur de la partie $BIE = \frac{px - pq}{2}$ par son bras de levier HZ , le produit sera son énergie, mais $HZ = EZ - EH = \frac{2x - 2q}{3} - \frac{gx}{f}$.
Donc l'énergie de la partie BIE du pied-droit sera $= \frac{2pxx - 4pqx + 2pqg}{6} - \frac{pgxx + pqgx}{2f}$.

Et si l'on ajoute ensemble l'énergie de la partie $BIFN$ & celle de la partie BIE , leur somme $pqx - \frac{pqq}{2} - \frac{pqgx}{f}$

— $\frac{2pxx - 4pqx + 2pqq}{6}$ — $\frac{pgxx + pqgx}{2f}$ fera l'énergie du pied-droit entier sur le point d'appui *H*.

Laquelle énergie étant abrégée, devient $\frac{2pxx + 2pqx - pqq}{6}$ — $\frac{pqgx - pgxx}{2f}$.

Voyons maintenant l'énergie de la Voûte qui doit faire équilibre avec le pied-droit sur le point d'appui *H*.

Nous avons trouvé, dans le Probleme précédent, que l'effort de la Voûte, suivant *LX*, se décomposoit en deux autres, l'un suivant *ZX*, égal à la pesanteur de la Voûte, & l'autre suivant *RX*.

Mais dans le même Probleme précédent nous avons trouvé la pesanteur de la Voûte $= \frac{2amr + amm}{2r}$, & l'effort horizontal suivant *RX* $= \frac{2amr + amm}{2dr} \times \sqrt{2dr - dd} - \frac{6mrr - 6mmr - 2m^3}{6r + 3m}$.

Ainsi en multipliant la pesanteur ou l'effort vertical suivant *ZX* par son bras de levier *HY* $= HF - YF$, l'on aura l'énergie de l'effort vertical de la Voûte, laquelle énergie sert à affermir le pied-droit.

Mais $HF = EF - EH = x - \frac{gx}{f}$.

Et l'on peut, pour abrégér, faire *YF* égale à la moitié de l'épaisseur de la Voûte, c'est-à-dire, $= \frac{m}{2}$.

Donc le levier *HY* $= x - \frac{gx}{f} - \frac{m}{2}$, lequel levier étant multiplié par la pesanteur $\frac{2amr + amm}{2r}$ de la Voûte, le produit $\frac{2amrx + amm x}{2r} - \frac{2amrgx - ammgx}{2fr} - \frac{2ammr - am^3}{4r}$ fera l'énergie de l'effort vertical que la Voûte fait pour affermir le pied-droit.

Et si l'on multiplie l'effort horizontal *RX* de la Voûte $= \frac{2amr + amm}{2dr} \times \sqrt{2dr - dd} - \frac{6mrr - 6mmr - 2m^3}{6r + 3m}$ par son bras de levier $\pi H = VG = p$, le produit
Mem. 1730. S

$$\frac{2amp + ammp}{2dr} \times \sqrt{2dr - dd} - \frac{6mrrp - 6mmrp - 2m^3p}{6r + 3m}$$

sera l'énergie de l'effort horizontal que la Voûte fait pour renverser le pied-droit.

Comme l'effort vertical que la Voûte fait, sert à affermir le pied-droit, & que l'effort horizontal tend à le renverser, si l'on retranche l'énergie de l'effort vertical de la Voûte, de l'énergie de son effort horizontal, le reste sera la véritable énergie que la Voûte employe pour renverser le pied-droit sur le point d'appui *H*, & ce reste sera

$$\frac{2amp + ammp}{2dr} \times \sqrt{2dr - dd} - \frac{6mrrp - 6mmrp - 2m^3p}{6r + 3m} - \frac{2amrx - ammx}{2r} + \frac{2amrgx + ammgx}{2fr} + \frac{2ammr + am^3}{4r}.$$

Maintenant puisque, suivant l'hypothèse, l'effort composé de la pesanteur de la Voûte, de son effort horizontal, & de la pesanteur du pied-droit doivent être dirigés vers le point d'appui *H*, il faut que l'énergie du pied-droit & l'énergie de la Voûte soient en équilibre, c'est-à-dire, égales sur ce point d'appui *H*, ce qui donne cette Équation

$$\frac{2pxx + 2pqx - pqq}{6} - \frac{pqgx - pxx}{2f} - \frac{2amp + ammp}{2dr} \times \sqrt{2dr - dd} - \frac{6mrrp - 6mmrp - 2m^3p}{6r + 3m} - \frac{2amrx - ammx}{2r} + \frac{2amrgx + ammgx}{2fr} + \frac{2ammr + am^3}{4r}.$$

D'où l'on tire

$$x = \sqrt{\left\{ \begin{aligned} &\frac{qqf}{2f - 3g} + \frac{6amfr - 3ammf}{2fdr - 3gdr} \times \sqrt{2dr - dd} \\ &- \frac{12mrrf - 12mmrf - 4m^3f}{4rf + 2mf - 6rg - 3gm} + \frac{6ammr + 3am^3f}{4prf - 6pgr} \\ &+ \left\{ \frac{q}{2} + \frac{6amrf + 3ammf - 6amrg - 3ammg}{4pfr - 6pgr} \right\}^2 \end{aligned} \right\}} - \frac{q}{2} - \frac{6amrf - 3ammf + 6amrg + 3ammg}{4pfr - 6pgr}.$$

Ce qu'il falloit trouver.

C O R O L L A I R E.

Si l'on vouloit que le point d'appui *H*, vers lequel est

dirigé l'effort composé de la Voûte & du pied-droit fut dans la surface extérieur du pied-droit, il faudroit faire $EH = 0$; & comme nous avons fait $EF : EH :: f : g$, l'on aura $EF : 0 :: f : g$, & par conséquent l'on aura $g = 0$.

Substituant donc 0 en la place de g dans la formule du Probleme, l'on aura une autre Equation qui nous donnera la base x du pied-droit, telle que l'effort composé de la poussee de la Voûte & de la pesanteur du pied-droit sera dirigé vers l'extrémité extérieure de la base, & cette formule sera

$$x = \sqrt{\left\{ \begin{aligned} &\frac{qq}{2} + \frac{6amr - 3amm}{2dr} \times \sqrt{2dr - dd} \\ &- \frac{6mrr - 6mmr - 2m^3}{2r + m} + \frac{6ammr + 3am^3}{4pr} \\ &+ \left\{ \frac{q}{2} + \frac{6amr + 3amm}{4pr} \right\} \end{aligned} \right\} - \frac{q}{2} - \frac{6amr - 3amm}{4pr}}.$$

Application du Probleme précédent à une Voûte, dont les dimensions & la hauteur du Pied-droit soient données, & dans laquelle il s'agit de trouver la base EF du Pied-droit.

Soit une Voûte, dont l'intrados soit un arc de 120° , & dont la corde soit de 28 pieds, la moitié de cette corde sera le sinus de 60° , ainsi l'on aura le rayon r de la Voûte par cette analogie, Figure 4.

Le sinus de 6° , qui est de 86602.

Est au rayon ou sinus total 100000.

Comme la moitié de la corde de Voûte, c'est-à-dire 14, Est au rayon de ladite Voûte, lequel rayon se trouve par l'opération de $16 \frac{17}{100}$.

Soit l'épaisseur de la Voûte $= \frac{2}{3}$,

Puisque l'arc MN est de 60 degrés, l'on aura MO , c'est-à-dire, la hauteur de la flèche de l'intrados au-dessus du pied-droit égale à la moitié du rayon, c'est-à-dire, égale 8.085.

Mais nous avons fait $MO = d$, donc l'on aura $d = 8.085$
 Puisque le rayon de la Voûte..... = 16. 17.
 Son diametre sera..... 32. 34.
 Multipliant ce diametre par..... 3. $\frac{1}{2}$.

97. 02.
 4. 62.

Le produit..... 101. 64. donnera
 la circonférence, dont la sixième partie 16. 94 sera la valeur
 de l'arc de 60 degrés, c'est-à-dire, sera la valeur de la moitié
 de l'intrados, laquelle moitié nous avons appelée a .

Maintenant soit la hauteur p du pied-droit = 20
 la base q de la partie parallelipipedale du
 pied-droit..... = $\frac{2}{3}$ de même
 que l'épaisseur de la Voûte.

Enfin le point H , où l'on veut que soit dirigé l'effort
 composé de tous les efforts, soit éloigné de la face extérieure
 dudit pied-droit de la valeur de $\frac{1}{3}$ de sa base, c'est-à-dire, de
 manière que l'on ait $EF:EH::3:1$.

Mais nous avons dans le Probleme précédent $EF:EH$
 $::f:g$, donc nous avons $f=3$, & $g=1$.

Et si l'on substitué dans l'Equation qui donne la valeur de x
 ces grandeurs 16. 17 | 8. 085 | 16. 94 | 20 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | 3 | 1 |
 en la place de r | d | a | p | q | m | f | g |

L'on trouvera $x = 5$ pieds $\frac{1}{2}$ pour la base du pied-droit
 cherchée, sur laquelle base $x = EF$, le point d'appui H est
 au tiers de ladite base, enforte que HF sera de 3 pieds $\frac{2}{3}$.

*Application du Corollaire du Probleme précédent à une
 Voûte, dont les dimensions sont comme celles du Probleme,
 & dans laquelle il s'agit de trouver la base EF , telle
 que la poussée de la Voûte & de la pesanteur du pied-
 droit soient dirigées vers l'extrémité extérieure E de
 ladite base.*

Comme les dimensions de la Voûte sont toujours les

mêmes, l'on aura, comme dans l'application du Probleme,

$$\text{pour } r \quad \left| \begin{array}{c} 16.17 \\ d \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 8.085 \\ a \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 16.94 \\ p \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 20 \\ q \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \frac{2}{3} \\ m \end{array} \right|$$

Substituant ces grandeurs déterminées en la place des lettres dans l'Equation du Corollaire, l'on aura la base $x = 3. \frac{66}{100}$, c'est-à-dire $= 3$ pieds $\frac{2}{3}$.

Comme le pied-droit ou son profil est composé de deux parties, dont l'une est parallélogrammique, & que l'épaisseur ou base de la partie parallélogrammique est égale à l'épaisseur de la Voûte qui est de $\frac{2}{3}$, il restera 3 pieds pour le fruit ou base de l'autre partie qui est triangulaire, & si l'on ajoute $\frac{1}{3}$ à ces 3 pieds pour prévenir l'écrasement des parties, la base totale du pied-droit sera de 4 pieds, & comme la hauteur du pied-droit est de 20 pieds, cette base totale de 4 pieds sera égale à la cinquième partie de sa hauteur.

Si l'on faisoit l'épaisseur de la muraille au pied-droit de 2 pieds par en haut, c'est-à-dire, au Couffinet, pour lors l'on trouvera la base entière $EF = x = 3.597$, c'est-à-dire $= 3$ pieds 7 pouc. 2 lignes, en dirigeant l'effort composé à l'extrémité extérieure E de la base EF . On pourra faire de semblables applications pour toutes sortes de Voûtes circulaires, dont l'épaisseur & la grandeur seront données avec la hauteur du pied-droit.



SUITE DES OBSERVATIONS SUR L'AIMANT.

Par M. DU FAY.

19 Avril
1730.

DANS le Mémoire que je lus en 1728, je rapportai plusieurs expériences qui tendoient à prouver que si l'on veut aimanter un morceau de Fer, en sorte que sa direction soit déterminée, il ne faut que le rompre, le frapper, le frotter, enfin donner par quelque moyen que ce soit un ébranlement à ses parties, tel que les petites branches, pointes ou poils, que j'ai supposés, après Descartes & la plupart des Physiciens, remplir les pores du Fer; puissent être abbattus ou renversés vers celle des extrémités qu'on veut faire diriger vers le Nord. J'ai varié ces expériences d'un grand nombre de façons, & il me paroît qu'il peut demeurer pour constant qu'un Fer n'est aimanté que lorsque tous les poils, ou du moins la plus grande partie, sont couchés en un même sens.

Je ne dois pas obmettre une objection qui m'a été faite sur l'extrême mobilité que je suppose dans ces petites branches ou poils; ils doivent être si déliés que leur pesanteur sera, dit-on, regardée comme nulle, & qu'il est impossible qu'ils tombent par leur seul poids, suivant les différentes situations ou les ébranlements qu'on peut donner à la barre de Fer. Quoique cette objection semble forte, il est très facile d'y répondre. On sçait que les corps n'ont de pesanteur que relativement au milieu dans lequel ils se trouvent, & qu'une plume mise dans un tuyau vuide d'air, y tombe avec la même vitesse, c'est-à-dire, y a la même pesanteur qu'un morceau de bois : or, il est certain que les pores du Fer ne sont pas remplis d'air; par conséquent, quelques déliés que soient ces petits poils, ils ont une pesanteur relative au milieu dans lequel ils se trouvent, une pesanteur réelle qui fait qu'ils se

renversent d'un côté ou de l'autre, suivant les mouvements qu'on donne à la barre.

Si l'on a frotté un morceau de Fer sur une Pierre d'Aimant, & que le tenant dans une situation perpendiculaire, on frappe sur l'extrémité qui se dirige au Sud, on ne fera qu'augmenter sa vertu, parce qu'on ne fait qu'abattre un plus grand nombre de poils vers le côté où ils doivent être, mais si on frappe sur l'autre bout, les poils se redressent, le passage se ferme à la matière magnétique, la vertu du Fer diminuë, & si l'on continuë de frapper, elle se perd entièrement, passe à l'autre bout du Fer, & lui donne une direction contraire à celle qu'il avoit auparavant.

Ces faits qui sont fondés sur l'expérience, étant une fois bien établis, il suit assés naturellement qu'il n'y a qu'un seul courant de la matière magnétique, & qu'elle entre dans le Fer aimanté par le côté qui se dirige vers le Sud, puisque les poils qui sont couchés vers l'autre extrémité la laissent entrer & sortir sans peine lorsqu'elle va dans ce sens, mais qu'ils s'opposeroient à son entrée en lui présentant leurs pointes, si elle alloit dans le sens opposé. Cette hypothèse, & celle du renversement des poils, étant admises, tous les phénomènes de l'Aimant s'expliquent avec une facilité infinie. J'ai donné dans mon premier Mémoire l'explication de ceux qui sont le plus connus, mais si l'on veut se donner la peine d'en faire l'application à tous les autres, en y joignant l'unité du courant, j'ose assurer que l'on en trouvera l'explication plus facile que dans aucun autre système.

Je dois avertir ici que pour éviter l'obscurité ou l'équivoque, je ne désignerai point les poles de l'Aimant par les noms de Boreal & d'Austral, parce que, quoiqu'il soit reçu que le pole qui se dirige vers le Sud soit le Boreal, il m'a paru que cette définition ne se presentoit pas toujours bien nettement à l'esprit, & j'ai crû qu'il valloit mieux les désigner par celui qui se dirige au Nord, & celui qui se dirige au Sud.

Une particularité très-connuë de l'Aimant & du Fer aimanté, est que le pole qui se dirige vers le Nord, leve plus

de Fer que l'autre ; Descartes & presque tous les Physiciens qui l'ont suivi, ont supposé, premièrement que cela n'arrivoit que dans les Pays septentrionaux, sans se fonder sur aucune expérience, que je sçache, & ils ont expliqué ce fait, en disant que le pole boréal de la Terre, considéré comme un grand Aimant, fortifioit le pole Austral des Pierres d'Aimant, ou du Fer aimanté, de même qu'il arrive à deux Aimants qu'on approche l'un de l'autre par les poles de différent nom.

Il y a plusieurs choses à considérer dans cette explication, 1.^o Quoiqu'il soit certain que dans ce Pays-ci le pole de l'Aimant qui se dirige vers le Nord leve plus de Fer que l'autre, & qu'il n'y ait qu'à plonger une Pierre d'Aimant dans la limaille pour en être convaincu, il est néanmoins très-douteux que cela n'arrive pas de même dans les Pays méridionaux, & il sera du moins permis d'en douter jusqu'à ce qu'on en ait fait quelques expériences. 2.^o L'expérience qui est apportée en comparaison n'est vraie que dans un cas qui n'est assurément pas celui de la Terre à l'égard d'un Aimant, & il est très aisé de s'en éclaircir de la manière la plus convaincante, il ne faut qu'approcher l'un de l'autre deux Aimants à peu-près d'égale force, par les poles de différent nom, sans qu'ils se touchent cependant, parce qu'alors ils ne feroient plus l'effet que d'un seul Aimant ; on plongera ensuite dans la limaille le pole de l'un des Aimants qui se dirige vers le Nord, enforte qu'il se charge de tout ce qu'il en pourra porter. S'il étoit vrai que la proximité du pole de l'autre Aimant augmentât sa force, il n'est pas douteux que lorsqu'on viendra à éloigner le second, une partie de la limaille ne dût se détacher, il doit même en tomber encore davantage si on le retourne, & que l'on presente le pole du Nord à la place de celui du Sud, car si l'un augmentoit la force du pole du premier Aimant, l'autre doit certainement la diminuër ; il n'arrive cependant rien de tout cela, & il ne tombe point de limaille du premier, soit que l'on en éloigne l'autre, ou qu'on l'en approche par l'un ou l'autre de ses poles.

J'ai

J'ai observé de prendre deux Aimants à peu près d'égale force, parce que si l'un des deux est de beaucoup plus fort que l'autre, comme il est environné d'un tourbillon de matière très-étendu, il fortifie nécessairement le tourbillon de l'Aimant foible, de même qu'un Fer reçoit en présence de l'Aimant une vertu magnétique qu'il perd lorsqu'on l'en éloigne ; c'est aussi l'explication que donna M. de Reaumur en 1723, de ce qu'un outil foiblement aimanté enlevait plusieurs clous posés sur une grosse enclume, tandis qu'il en enlevait un avec peine lorsqu'on les mettoit sur une table : mais si la force des deux Aimants dans nôtre expérience n'est pas bien différente, leur vertu n'est point du tout augmentée par l'approche des poles de différent nom.

C'est cependant sur cette supposition qu'est fondée l'explication de Descartes, mais on peut aller plus loin, & dire que quand l'expérience seroit vraie dans le cas de deux Aimants d'une force à peu près égale, cela ne suffiroit pas pour en conclure qu'il arrive la même chose à l'égard de la Terre, car le peu d'effet que pourroit faire la proximité du pole boréal de la Terre, ne peut être comparé à celui de deux Aimants que l'on met l'un après de l'autre, & l'on ne peut pas raisonnablement regarder l'un comme une conséquence de l'autre : l'explication donnée jusqu'à présent ne peut donc pas se soutenir, & il faut nécessairement en chercher une autre ; elle se trouve naturellement dans le système d'un seul courant.

Presque tous les Physiciens ont supposé que la matière magnétique se meut avec plus de facilité dans l'Aimant & dans le Fer aimanté que dans l'air. M. de Reaumur a cependant fait contre ce principe quelques difficultés, qui lui semblent prouver que la matière magnétique trouve peut-être plus de difficulté à se mouvoir dans le Fer que dans les autres corps, & qu'on pourroit expliquer par-là tous les phénomènes de l'Aimant. Cette idée est très-ingénieuse, & mérite fort d'être approfondie, j'espère même que M. de Reaumur voudra bien nous la donner quelque jour plus en détail : mais comme l'opinion contraire est aujourd'hui presque universellement

reçûe, je crois devoir en faire la base de mon système, d'autant plus même que l'opinion de M. de Reaumur étant précisément l'inverse de celle que j'admets, mon explication s'accordera également avec la sienne, en changeant seulement l'application.

Figure 1. M'en tenant donc à l'ancienne opinion, & supposant l'hypothèse d'un seul courant suivant laquelle la matière n'entre que par un des poles, & ne sort que par l'autre, on verra qu'elle doit non-seulement entrer par l'extrémité *S* dont j'ai supposé les poils couchés de façon à lui donner un passage libre, mais aussi par tous les points voisins de ce pole, comme *B*, *C*, *D*, *E*; mais la matière étant une fois dans le Fer, elle y reste le plus long-temps qu'il lui est possible par la difficulté qu'elle trouve à pénétrer les parties de l'air, & par conséquent la plus grande partie n'en sort que par l'extrémité *N* qui est la plus éloignée. C'est donc vers ce seul point que se trouvent réunis tous les torrents de matière qui sont entrés par divers points du pole opposé. Ce pole se trouvera donc avoir plus de vertu que l'autre par la réunion & l'abondance de la matière. Voilà où nous mene le raisonnement, & l'expérience nous prouve en effet que c'est ce pole qui enleve le plus de Fer.

Il faut encore quelque chose cependant pour que l'esprit soit entièrement satisfait; il faut voir, & toucher, pour ainsi dire, cette différence entre la densité du torrent de matière à l'entrée & à la sortie de la Pierre; il ne faut pour cela qu'examiner avec attention la plus commune de toutes les expériences de l'Aimant, qui est de poser sur une table une Pierre d'Aimant, ou une lame d'Acier aimantée, de mettre une feuille de papier par dessus, & de jeter avec un poudrier de la limaille de Fer sur le papier. On sçait qu'elle s'arrange en tourbillon, & trace exactement la route de la matière magnétique autour de la Pierre; mais si l'on y prend bien garde, on verra que les filets de limaille sont toujours un peu plus resserrés, & plus proche les uns des autres autour du pole *N*, qui se dirige vers le Nord, qu'autour de l'autre, comme on le

voit dans les Fig. 1 & 2. Si l'on n'a pas fait cette attention jusqu'à présent, c'est qu'il n'est pas facile de trouver un Aimant, ni même une lame d'Acier, dont les deux poles soient d'égale bonté; le mélange de parties hétérogènes dans l'Aimant, & la façon de toucher les lames, peuvent causer de si grandes variétés, qu'il n'est pas étonnant qu'on ne se soit point aperçu jusqu'à présent de cette disposition du tourbillon, qui n'est pas infiniment remarquable, mais que l'on trouvera toujours constante, si l'on se sert d'une lame touchée bien également, avec les précautions que je rapporterai à la fin de ce Mémoire, & que l'on ait soin de répandre la limaille le plus également qu'il sera possible.

Il me semble que cette observation est une nouvelle preuve de l'unité du courant, & de la direction de son mouvement. J'en ajoûterai encore une qui mérite quelque attention, quoiqu'à dire le vrai, elle doive être regardée comme une convenue avec le système plutôt que comme une preuve. M. Halley & plusieurs autres Physiciens depuis lui ont dit que la matière magnétique pouvoit avoir quelque part aux Lumières boréales. Sans entrer dans le détail de leurs opinions particulières, je dirai simplement qu'on pourroit les expliquer en cette sorte. Les exhalaisons inflammables, ou même dont quelques-unes sont déjà enflammées, étant répandues dans l'air, si leur degré de densité ou de pesanteur les amène à la distance de la Terre où la matière magnétique circule en plus grande abondance, ce torrent qui coule vers le Nord, rassemble ces exhalaisons éparées dans toute l'Athmosphère, & les réunit vers le pôle; celles qui sont déjà enflammées embrasent les autres, ou la seule collision les allume, & le courant de matière les dispose en forme de rayons, tels que nous les voyons. On peut encore ajoûter, que suivant les observations les plus exactes, le centre auquel aboutissent ces rayons, décline presque toujours vers l'Oüest de 14 ou 15 degrés, ce qui est à peu-près la quantité dont l'Aiguille décline présentement. Si ce centre des rayons des Aurores boréales venoit à suivre à l'avenir les variations de l'Aimant,

cela pourroit nous mener à quelque chose de plus positif, mais je ne pousserai pas maintenant plus loin cette explication, qui n'est qu'une conjecture, quoiqu'elle ne soit pas absolument sans vrai-semblance, & qu'elle puisse devenir beaucoup plus forte, si jamais nous sommes assurés par de bonnes observations, qu'on ne voit pas de pareilles lumières vers le pôle méridional.

Ce n'est pas assés d'avoir tâché d'établir le système d'un seul courant par les diverses preuves que j'ai pû en trouver, il faut à présent répondre aux objections qu'on peut y faire. Celle qui se présente le plus naturellement à l'esprit, est que s'il n'y avoit qu'un seul courant de matière magnétique, une Aiguille aimantée étant posée librement sur la surface de l'eau, seroit portée par le mouvement de la matière vers l'un des poles, & que pour que cela n'arrive point, il faut qu'elle soit poussée par deux courants d'égale force, dont l'un fasse équilibre à l'autre, & qui ne lui permettent que de tourner sur elle-même pour se diriger vers les poles, sans la pousser plutôt vers l'un que vers l'autre.

Avant que de répondre à cette objection, on peut dire qu'elle seroit presque aussi forte contre le système des deux courants; car comme le pôle qui se dirige vers le Nord est plus fort que l'autre, il s'ensuivroit que le courant du Sud au Nord auroit plus de force, & que par conséquent l'Aiguille devroit être emportée vers le Nord; ainsi l'objection est à peu-près la même dans tous les systèmes, mais elle n'en est pas plus solide, & il est facile d'y répondre; il ne faut pour cela que se souvenir du principe reçu dans presque toutes les hypothèses, qui est que la matière se meut avec plus de facilité dans l'Aimant, ou dans le Fer aimanté que dans l'air. Ce principe établi, l'Aiguille posée sur l'eau ne doit point avoir de mouvement processif vers le Nord, car pour qu'elle fût entraînée par le courant de la matière, il faudroit que la matière trouvât plus de résistance à pénétrer les pores de l'Aiguille, que l'Aiguille même n'en trouve à vaincre le frottement des parties de l'eau; mais comme la matière passe

très-librement dans les pores de l'Aiguille suivant sa longueur, il n'y a aucune partie de sa force employée à porter l'Aiguille vers le Nord, & cette force ne doit tendre qu'à la faire tourner, enforte que ses pores se présentent le plus avantageusement qu'il est possible au courant de la matière, ainsi l'Aiguille ne peut avoir que le mouvement de direction.

La seconde objection est prise d'un Mémoire présenté à l'Académie par M. de Créquy, dont l'objet étoit de prouver qu'il y a deux courants de matière dont les directions sont opposées. Il employe d'abord l'objection à laquelle nous venons de répondre, & qui a été faite plus d'une fois, & il se sert ensuite de l'expérience suivante. Il a fait faire une Aiguille dont l'un des bouts depuis la chape est de Cuivre, & l'autre est d'Acier; cette Aiguille est par rapport au torrent de matière magnétique, dans le même cas que si la moitié du Cuivre n'y étoit point, & en effet elle ne sert qu'à faire équilibre à l'autre. M. de Créquy prétend que si l'on touche une pareille Aiguille, enforte que le bout d'Acier se doive diriger vers le Sud, il est impossible qu'elle s'y dirige en cas que la matière vienne du Sud, de même qu'une giroüette ou une bannière ne dirigera jamais sa pointe vers le côté d'où vient le vent; il dit la même chose à l'égard du Nord, d'où il conclut qu'il y a nécessairement deux courants, dont l'un chasse l'Aiguille vers le Nord, & l'autre vers le Sud. Voilà les raisons & l'exemple sur lequel il se fonde; mais pour peu qu'on y fasse d'attention, on verra que rien n'est si différent que le cas de la giroüette & celui de l'Aiguille. Dans le premier, l'effort du vent est continuellement appliqué sur les parties extérieures de la giroüette, & la doit pousser par conséquent jusqu'à ce qu'il l'ait placée dans la direction de son courant. Mais il n'en est pas de même de l'Aiguille, le courant qui l'entraîne, n'agit en aucune façon sur ses parties extérieures; au contraire, la matière pénètre l'intérieur de l'Aiguille, & ce n'est que suivant la direction des parties internes du Fer que le courant doit agir. Nous avons suffisamment établi dans le premier Mémoire, qu'il ne falloit

qu'abbattre les pointes que l'on suppose dans les pores du Fer, vers celle des extrémités que l'on veut faire diriger vers le Nord. Si l'on tourne l'Aiguille, en sorte que les pointes se présentent au courant, il est certain que la matière qui n'agit que sur elles, puisque ce sont ces pointes seules qui résistent à son passage, les heurtera toutes, en sorte qu'elle fera tourner l'Aiguille jusqu'à ce qu'elle lui présente le pôle opposé par lequel elle doit entrer. La figure extérieure de l'Aiguille n'y fait rien, & il suffit qu'elle soit mobile; car quand on toucheroit l'Aiguille d'un sens contraire, ce qui renverseroit les pointes vers la chape, il arriveroit encore la même chose, l'Aiguille sera toujours portée par le courant dans le sens que ses pointes seront tournées, & sans que sa figure extérieure y entre pour rien, puisque dans aucun cas la force du courant de la matière ne peut y être appliquée, ainsi on voit qu'il n'y a nulle parité entre l'exemple de la giroïette & celui de l'Aiguille qui n'a qu'une moitié d'Acier, & que par conséquent l'objection tombe d'elle-même.

On peut ajouter que quand on voudroit supposer qu'une pareille Aiguille fut absolument dans le cas de la giroïette, il seroit impossible d'expliquer sa direction par le moyen de deux courants; car si une giroïette étoit exposée à deux vents, dont les directions fussent précisément opposées, la force de l'un des deux vents seroit supérieure à l'autre, ou elles seroient égales. Dans le premier cas, la giroïette seroit certainement entraînée par celui dont la force est la plus grande, & elle sera comme si elle n'étoit exposée qu'à un seul vent, dont la force sera exprimée par l'excès de l'un sur l'autre. Dans le second cas, les deux forces se feront équilibre, & laisseront la giroïette indifféremment dans toutes les situations où elle se trouvera; ainsi le système des deux courants est encore moins favorable que l'autre à l'explication de la direction de l'Aiguille qui n'a qu'un des bouts d'Acier, & nous venons de voir qu'il n'y a nulle difficulté en supposant un seul courant, puisque la matière n'agit que suivant l'inclinaison des parties intérieures de l'Aiguille auxquelles

seules elle est applicable, & nullement suivant sa forme extérieure.

Je ne crois pas qu'il y ait d'autre objection contre l'unité du courant qui mérite attention. Je ne parle point ici de la déclinaison qui n'a rien de plus difficile dans ce système que dans tous les autres, & qui n'a aucun rapport avec les propriétés de l'Aimant, dont j'ai entrepris de parler dans ces deux Mémoires. Pour ne me pas borner dans celui-ci à l'établissement d'un système qui n'est qu'une recherche purement spéculative, je vais ajouter quelques remarques sur la manière d'aimer les Aiguilles & les lames de Fer ou d'Acier, & d'armer les Pierres d'Aimant pour produire l'effet le plus avantageux. Ces observations tendent toutes à confirmer l'unité du courant, ou du moins elles s'accordent mieux avec ce système qu'avec tout autre.

On peut réduire à deux les différentes manières de toucher les Aiguilles sur la Pierre d'Aimant. L'une est de les passer sur une des armures de la Pierre, & l'autre de les passer sur toutes deux. Il est certain que la manière la moins avantageuse est de ne les passer que sur une; car premièrement pour toucher en cette sorte, il faut que l'Aiguille fasse avec la direction du courant de la matière un angle assez grand, ce qui fait que les poils ne peuvent pas être couchés bien exactement dans le sens de la longueur de l'Aiguille. En second lieu, le torrent de matière se trouve nécessairement partagé, parce qu'il y en a une partie qui tend à couler dans l'Aiguille, & le reste à passer dans l'autre pôle de l'Aimant. Enfin l'Aiguille touchée de cette manière sur le pôle de la Pierre qui se dirige au Sud, sera encore moins aimantée que si on la touche sur l'autre, parce que la matière sortant par ce dernier, est plus réunie, & a plus de force, comme nous l'avons prouvé au commencement de ce Mémoire. Ces conjectures sont confirmées par l'expérience, & il est aisé à chacun de les vérifier.

L'autre manière de toucher, est de glisser l'Aiguille sur les deux armures, la tenant parallèle à l'axe de la Pierre, ce

qui se peut encore faire en deux façons, car on verra que rien n'est à négliger dans une matière aussi susceptible des plus petites délicatesses. On peut retirer l'Aiguille de dessus les armures, en continuant de la glisser d'un bout à l'autre, en sorte que la partie qui a d'abord touché un des poles de l'Aimant, vienne ensuite à toucher l'autre. Pour peu qu'on réfléchisse, on verra bien que cette manière n'est pas la meilleure, puisque le même bout de l'Aiguille qui avoit posé d'abord sur le pole par lequel la matière sort de la Pierre, & dont les parties seront par conséquent disposées de façon à l'y laisser entrer, venant à passer ensuite sur le pole opposé, la matière qui entre dans la Pierre par ce pole doit nécessairement détruire une partie de l'arrangement qui s'étoit fait lorsque ce même bout étoit sur l'autre pole de la Pierre.

Il résulte donc de-là que la meilleure manière de toucher une Aiguille, est de la poser sur la tête des armures d'un Aimant, & si l'Aiguille est plus longue que l'axe de l'Aimant, on la glissera un peu, en sorte que chaque partie de l'Aiguille touche les armures, mais en la retirant, on la détachera parallèlement à l'axe, sans la glisser toute entière sur les deux poles, parce que, comme nous venons de l'observer, sa vertu diminueroit, si le bout qui a été d'abord sur un des poles venoit à passer sur l'autre. L'expérience confirme parfaitement cette théorie, & l'Acier touché en cette sorte a beaucoup plus de vertu magnétique que des deux premières manières, qui sont cependant presque les seules qui soient en usage.

Je rapporterai à cette occasion une expérience qui ne se trouve dans aucun des Auteurs qui sont venus à ma connoissance; c'est que si l'on glisse une Aiguille à la distance d'environ deux lignes des armures d'une Pierre, sans toucher à la Pierre, il n'importe pour cet effet qu'on la glisse du Nord au Sud, ou du Sud au Nord, ou même qu'on la tienne immobile pendant un instant à quelque distance des armures; elle acquiert dans ces trois cas une direction semblable à celle qu'elle auroit, si on la posoit simplement sur les armures de la Pierre, & qu'on la retirât ensuite parallèlement à l'axe;

& toute opposée à celle qu'elle auroit contractée, si on l'avoit glissée d'un bout à l'autre sur les deux armures de la Pierre.

Il ne faut que jetter les yeux sur la Figure 3.^e pour voir Figure 3. que tout cela doit arriver ainsi, sur-tout dans le système d'un seul courant ; car, supposé qu'il suive la direction désignée par les petites flèches, on voit que si l'on glisse l'Aiguille, ou qu'on la tienne seulement dans l'étendue du tourbillon *OP*, les petits poils doivent se coucher du sens que vont les flèches, c'est-à-dire, que la matière sortira par le bout *P*, qui par conséquent se dirigera vers le Nord. Il arrivera encore la même chose, si on pose l'Aiguille sur les armures, parce que le cours du tourbillon ne fera que se rapprocher de la Pierre, & la matière passera toujours par l'Aiguille en sortant d'un pôle & rentrant dans l'autre; mais si l'on vient à glisser l'Aiguille sur les armures, il est nécessaire qu'elle prenne une direction opposée, puisque le bout de l'Aiguille qui étoit d'abord sur le pôle *N*, vient ensuite sur le pôle *M*, & que ce n'est pas de celui qu'il a touché le premier, mais du dernier, qu'il contracte la vertu qu'il conserve dans la suite.

J'ai voulu essayer s'il ne seroit pas possible de déterminer à peu près la vitesse du courant de la matière magnétique, mais quoique j'aie fixé un degré de vitesse qu'elle excède de beaucoup, il s'en faut bien encore que je n'aie pu la déterminer au juste ; voici quelle étoit mon idée.

Supposant toujours un seul courant qui circule dans la Pierre, & qui en sortant, va de *N* en *M*; si je parviens à faire passer une Aiguille en ce sens dans le tourbillon avec autant ou plus de vitesse que n'en a le courant, elle ne doit point s'aimanter, parce qu'alors la matière ayant une vitesse égale, est comme en repos à l'égard de l'Aiguille, & par conséquent ne peut pas agir sur les poils, ni les coucher en aucun sens. Pour tâcher d'y parvenir, j'ai ajusté une Aiguille à angles droits à l'extrémité d'une Tringle de bois de deux pieds, attachée par son autre bout à une goupille, en sorte que l'extrémité à laquelle étoit l'Aiguille, pût décrire un arc de cercle; j'ai lié vers ce bout une corde qui faisoit plusieurs

tours sur un tambour de Montre. Ayant disposé le tout sur une planche, lorsque j'amenois vers moi la petite tringle, je bandois le ressort du tambour ; venant ensuite à la lâcher subitement, la tringle partoît avec beaucoup de vitesse, & emportoit l'Aiguille, qui par ce moyen traversoit très-rapidement le tourbillon d'un Aimant que j'avois disposé à cet effet sur la planche. J'ai recommencé cette expérience un grand nombre de fois, tantôt faisant aller l'Aiguille dans le sens du courant, tantôt dans le sens opposé, & quoique j'aye crû remarquer qu'elle étoit plus vivement aimantée, lorsqu'elle alloit à contre-sens du courant, la différence étoit néanmoins si peu considérable, qu'il en résulte toujours que le mouvement de la matière magnétique est infiniment plus rapide que celui qui peut être causé par le débandement d'un ressort.

Pour aimanter une lame d'Acier, on doit observer les mêmes choses que nous avons dites à l'égard des Aiguilles ; on la passera sur les deux armures d'un Aimant, & lorsque le bout par lequel on veut finir sera proche de l'armure, on détachera la lame parallèlement à l'axe de la Pierre ; on la frottera cinq ou six fois de la même manière, & elle sera aussi-bien aimantée qu'elle peut l'être. Si l'on veut composer un Aimant artificiel avec plusieurs de ces lames, il y a quelques précautions à prendre. A mesure qu'on les aura aimantées, il faut les poser contre une muraille, le bout qui se doit diriger au Nord en embas, & les éloigner les unes des autres assés pour que les poles de même nom ne puissent pas se nuire mutuellement. Lorsqu'elles seront toutes aimantées, on les rassemblera le plus subitement qu'il sera possible, mettant ensemble les poles de même nom, & on les ferrera bien avec les anneaux qui doivent avoir été préparés auparavant. Voilà la manière qui m'a paru la meilleure pour faire un Aimant artificiel aussi fort & aussi bon qu'il le peut être.

Il y a encore quelque chose à observer sur le choix de la matière qui se peut le mieux aimanter, & je fis quelques remarques à ce sujet, lorsque je travaillois à mon premier

Mémoire ; car les expériences qui y sont rapportées , ne réussissent pas à beaucoup près si parfaitement avec une lame d'Acier , & moins encore avec l'Acier trempé. Dans ces deux dernières , les petits poils ne sont pas si flexibles , ni si faciles à renverser que dans le Fer ordinaire , ainsi le seul renversement de la lame , ou des coups légèrement donnés sur une de ses extrémités , ne peuvent en abattre qu'un très-petit nombre , mais il doit résulter de cette difficulté , que lorsque les petits poils sont une fois couchés en un même sens , c'est-à-dire , lorsque l'Acier est aimanté , il doit perdre sa vertu plus difficilement , c'est aussi ce que l'expérience nous montre.

Comme les Auteurs varient extrêmement sur ce qui s'aimante le mieux du Fer , de l'Acier , ou de l'Acier trempé , j'ai voulu m'en assurer par des expériences exactes , & ayant fait faire quatre lames égales , l'une de Fer , l'autre d'Acier , la troisième d'Acier trempé & la quatrième de Fer fondu , toutes polies , je les ai toutes aimantées de la même manière. On sent , en les frottant , que celle de Fer s'attache à l'Aimant plus fortement que toutes , celle d'Acier plus que celle d'Acier trempé , & celle de Fer fondu moins que les trois autres. Les présentant à une Aiguille aimantée , la lame d'Acier l'attiroit de bien plus loin que les autres , celle d'Acier trempé l'attiroit de plus loin que celle de Fer fondu , & celle de Fer avoit beaucoup moins de vertu magnétique que toutes les autres ; celle d'Acier en avoit le plus , & leur enlevait l'Aiguille , quoiqu'elle en fût plus éloignée. Ces expériences ne varient point , & l'explication en est facile.

Le Fer s'aimante aisément par la grande souplesse de ses poils , leur mobilité , & la facilité qu'ils ont à être couchés en tout sens ; ces propriétés lui font aussi perdre la vertu magnétique avec presque autant de facilité qu'il l'a acquise , c'est ce que nous voyons par le changement de ses poles , lorsqu'on renverse la barre , qu'on la chauffe , qu'on la frappe ; &c. c'est ce qui fait aussi qu'ayant été aimanté , ses parties conservent moins l'arrangement qu'elles ont reçu par la présence de l'Aimant. L'Acier dont les poils sont moins flexibles ,

s'aimante plus difficilement par le renversement, par les coups ; mais lorsqu'en le passant sur un Aimant, ils ont été une fois inclinés & forcés à donner passage à la matière magnétique, ils demeurent bien plus constamment dans cet état, & la même résistance que leur manque de souplesse apportoit à l'arrangement nécessaire pour être aimantés, s'oppose aussi à leur dérangement.

Si par quelque moyen on pouvoit renverser de la même manière les poils qui sont dans l'Acier trempé, ou dans le Fer fondu, ils conserveroient certainement encore plus de vertu que l'Acier ordinaire, mais leurs parties sont trop inflexibles, & cèdent trop difficilement au torrent de matière magnétique, ils ne s'aimantent donc pas si-bien, & acquièrent moins de vertu que l'Acier ordinaire.

Enfin je concluerai de toutes ces considérations & ces expériences, que les armures & le portant d'un Aimant doivent être de Fer, parce qu'étant toujours proches de l'Aimant, ses poils sont facilement retenus dans la même situation, & que se prêtant à toutes les dispositions, il n'y a aucune partie de la force de l'Aimant employée à les y contraindre ; l'Acier dont les parties sont plus de résistance, sera moins bon, & l'Acier trempé sera encore plus mauvais. Comme c'est à l'expérience à achever de convaincre dans les choses qui en sont susceptibles, je me suis assuré par des épreuves exactes que le raisonnement ne m'avoit point trompé, & ayant fait faire à la même Pierre des armures de Fer, d'Acier & d'Acier trempé, les plus égales qu'il a été possible, j'ai éprouvé que celles de Fer pur & doux étoient les meilleures, & que les moins bonnes étoient celles d'Acier trempé, la même Pierre ayant considérablement moins de force avec ces dernières qu'avec les premières.

Au reste, s'il y a dans cette opinion quelque hypothèse qui paroisse difficile à admettre, c'est l'existence des branches ou poils repandus dans les pores du Fer, mais cela n'est point particulier à mon système ; Descartes, & presque tous les Physiciens après lui les ont admis ; il est vrai que ce n'est

qu'une petite portion du système de Descartes, mais c'est la plus simple, & celle qui a été le moins combattue. Ce n'est certainement pas rendre cette hypothèse plus composée, ni moins vrai-semblable, que de supposer ces poils assés mobiles pour que leur propre poids, ou des secousses réitérées les abbattent vers un des bouts du Fer. C'est cependant la seule supposition dont j'ai besoin pour expliquer un grand nombre d'expériences tant anciennes que nouvelles, qui ne l'avoient point été, ou du moins qui l'avoient été très-imparfaitement. Je vais plus loin dans ce second Mémoire, & je déduis de ces expériences, & de mes explications, l'unité du courant de la matière magnétique; mais ce n'est point encore là une supposition trop hardie, ni même une opinion nouvelle, plusieurs Physiciens l'ont admise, à la vérité plutôt par l'embarras qu'ils trouvoient dans le système opposé; que par les preuves qu'ils en ont apportées, car je ne crois pas même qu'aucun ait entrepris de déterminer de quel côté alloit le courant; je donne donc ici un nouveau jour à cette hypothèse, je la fortifie de nouvelles preuves, je réponds aux objections qu'on y a faites, & je détermine que le courant unique de la matière magnétique doit aller du Sud au Nord. On voit que ce n'est point un système nouveau que je hasarde, c'est celui de tous qui est le plus universellement reçu que je ne fais que débarrasser de ce qu'il avoit de plus impliqué, & qui, par l'extrême simplicité à laquelle je le réduis, acquiert un nouveau degré de vrai-semblance, & je dirois même quelque chose de plus, s'il étoit permis de se servir en Physique du terme de Démonstration.



*EXAMEN DES LIGNES
DU QUATRIEME ORDRE
OU
COURBES DU TROISIEME GENRE.*

Par M. L'Abbé DE BRAGELONGNE.

ON ne sçauroit disconvenir que la connoissance des Lignes courbes ne soit un des objets des plus utiles de la Géométrie. Les progrès que les Anciens firent dans les Mathématiques, après avoir reconnu les propriétés des quatre Sections coniques, en sont des preuves convaincantes. Si ces grands Hommes n'ont pas poussé leurs recherches plus loin, s'ils se sont bornés à quatre ou cinq autres Courbes d'un genre plus élevé que les Sections coniques, ce n'est pas une preuve qu'ils ayent crû la connoissance des Courbes plus composées, inutile & infructueuse : il paroît au contraire, qu'ils en ont senti tout le mérite, & qu'ils ont même fait de temps en temps de grands efforts pour y parvenir ; mais ils manquoient de secours, je veux dire d'une Méthode qui, portant la lumière dans les routes obscures & inconnûes qu'il falloit parcourir, conduisît l'esprit humain sans lui laisser la moindre appréhension de s'égarer.

L'application de l'Algèbre à la Géométrie, dont on est redevable au grand génie de M. Descartes ; le Calcul de l'Infini, & toutes les nouvelles découvertes qui y ont rapport, dont les illustres Auteurs ont été presque tous Membres de cette Académie, en faisant changer de face au Monde géometre, lui ont fourni successivement des secours qu'il attendoit depuis si long-temps ; enfin un des plus illustres Membres de cette Compagnie * vient de dévoiler ce qui pouvoit rester encore d'inconnu ou de mystérieux dans la théorie des nouvelles Méthodes : en faisant connoître l'Infini dès

* M. de Fontenelle.

son origine, en le suivant dans ses différentes modifications, en l'obligeant, pour ainsi dire, de manifester ses effets les plus cachés, il a non seulement affermi les secours que la Géométrie avoit déjà reçûs, mais il lui en a encore procuré de nouveaux.

Entreprendre un détail de tous les avantages que la Géométrie a reçû depuis près d'un Siècle, ce seroit m'écarter de mon sujet : ainsi, en me renfermant dans les bornes que je me suis prescrites, je me contenterai de rappeler dans la mémoire des Personnes qui me font l'honneur de m'entendre, que dès que la Géométrie de M. Descartes eût paru, comme elle apprenoit l'art de renfermer dans une seule Équation les principales propriétés d'une ou de plusieurs Courbes, on s'accoutuma aisément, avec ce grand homme, à distinguer les Courbes en Géométriques, qu'on a nommées depuis *Courbes algébriques* ou *rationnelles*, & en Mécaniques, qu'on a nommées ensuite *Courbes transcendantes* ou *algébriquement irrrationnelles*.

Les premières furent dès-lors distinguées en différents ordres, selon le degré d'élévation auquel leur Équation se trouve élevée. Cette distinction est connue de tout le monde, elle a été adoptée par tous les Géomètres, & personne n'ignore aujourd'hui que la Ligne droite est la seule Ligne du premier ordre, parce qu'elle est la seule dont l'Équation ne monte qu'au premier degré ; que les quatre Sections coniques sont les seules Lignes du second ordre, parce qu'elles sont les seules dont les Équations ne montent qu'au second degré.

Il y a cinquante ans qu'on ne connoissoit qu'un très-petit nombre de Lignes du troisiéme ordre ; les deux Paraboles cubiques, la Cissoïde de Dioclès, le *Folium* de M. Descartes, la Paraboloïde du même M. Descartes, & une sixième Courbe, qu'on peut nommer le *second Hyperbolisme parabolique*, étoient, je crois, les seules Lignes du troisiéme ordre dont on eût quelque connoissance, lorsque M. le Chevalier Newton publia son *Énumération des Lignes du troisiéme ordre*, l'un des plus beaux & des plus grands spectacles que la Géométrie eût

produit depuis long-temps, dans lequel on vit paroître sur la scène soixante & douze Courbes jusqu'à lors inconnûes aux Sçavants, à l'exception des six dont on vient de parler.

Le célèbre Géometre Anglois ayant supprimé l'Analyse qui lui avoit ouvert le chemin de cette belle découverte; M. Stirling, autre Géometre de la même Nation, entreprit treize ans après de développer cette Analyse; il en donna les Principes fondamentaux dans un Ouvrage, intitulé *Illustratio Tractatus D. Newtonii de Enumeratione Linearum tertii ordinis*, imprimé à Oxford en 1717, dans lequel l'Auteur, en faisant paroître une grande connoissance de la Géométrie la plus profonde, & une vaste étendue de génie, découvre plusieurs choses curieuses & utiles qui peuvent contribuer infiniment à la théorie des Courbes d'un genre plus élevé.

Enfin M. Nicole a commencé de lire à l'Académie un Traité de ces mêmes Courbes du second genre, ou Lignes du troisième ordre, dans lequel il répand un nouveau jour sur ce qui fait l'objet de son ouvrage, & le traite avec cette dextérité avec laquelle il manie les matières les plus épineuses de la Géométrie.

Je ne ferai pas difficulté d'avouer ici que j'ai travaillé quelque temps sur le même sujet, que mon dessein étoit de donner un Traité complet des Lignes du troisième ordre, en suivant le plan de celui des Sections coniques de M. le Marquis de l'Hôpital, & d'y ajouter une énumération des Lignes du quatrième ordre. Mais ce Traité ne devant plus avoir les agréments de la nouveauté, après les ouvrages des trois grands Géometres que je viens de nommer; j'ai crû que le seul examen des Lignes du quatrième ordre, ou Courbes du troisième genre, étant une matière toute nouvelle, pourroit être agréable à l'Académie, & de quelque utilité au Public. Je me suis déterminé d'autant plus volontiers à le donner, qu'il m'a paru que pour entendre ce que j'ai à dire sur les figures, les contours, les différents points, les différentes branches, & les autres propriétés des Lignes du quatrième ordre, il n'est pas absolument nécessaire d'avoir une connoissance parfaite de

de celles du troisiéme, mais qu'il suffit d'en connoître les plus simples, & de sçavoir seulement l'application de l'Algebre à la Géométrie, & les premiers principes du Calcul différentiel.

Parmi les Courbes dont j'ai à parler dans ce Traité, il y en a quelques-unes, mais en très-petit nombre, qui sont connües de tous les Géometres : telles sont trois ou quatre Paraboles & autant d'Hyperboles du quatriéme ordre, dont il est parlé dans différents ouvrages des Géometres modernes : telle est la Conchoïde de Nicomede, qui est en usage depuis plusieurs Siécles : telle est la Lemniscate de M.^{rs} Bernoulli, ces deux illustres Freres, dont les noms semblent devoir subsister aussi long-temps que la Géométrie : telle est enfin une espece d'Hyperbole du quatriéme ordre que M. Stirling a décrit dans l'ouvrage que j'ai déjà cité.

On a encore quelque chose de plus sur cette matière, je veux parler du sçavant Traité de M. Mac-Laurin, Professeur de Mathématique dans le nouveau College d'Abreden, & Membre de la Société Royale de Londres, auquel trois Théorèmes, publiés par M. Newton à la fin de son Énumération des Lignes du troisiéme ordre, ont donné naissance.

Cet illustre Géometre annonça au Public en 1704 une Méthode pour décrire par un mouvement continu, non seulement les quatre Sections coniques, mais encore toutes les Lignes algébriques qui ont ce qu'on appelle des *points doubles*, c'est-à-dire, des points par lesquels la Courbe passe deux fois : M. Newton nommoit particulièrement les Lignes du troisiéme & du quatriéme ordre, qui ont des points doubles, mais il se contentoit d'annoncer cette belle Méthode sans en donner la démonstration ni par l'analyse, ni par la synthese. Quelques personnes, pour lesquelles j'avois une extrême déférence, m'engagerent en 1708 à chercher ce que M. Newton avoit jugé à propos de cacher aux yeux du Public : j'eus le bonheur de réussir, & l'on fit imprimer mon Analyse dans le Supplément du Journal des Sçavants du dernier Septembre 1708. Mais en donnant la démonstration analytique de la Méthode de M. Newton, pour décrire par un

mouvement continu les Courbes algébriques qui ont des points doubles, je me contentai de faire voir que par le moyen des deux formules générales, auxquelles se réduisoit ma démonstration, on pouvoit trouver aisément les Equations des Lignes du troisième & du quatrième ordre qui ont des points doubles, & je n'entrai dans aucun détail : les Etudes & les occupations auxquelles j'étois obligé de vaquer par rapport à mon état, ne m'ayant pas laissé le loisir de développer les conséquences de cette Analyse, qui m'auroient fourni la matière d'un juste volume.

Ce que je n'avois pû exécuter en 1708, l'a été depuis ; par M. Mac-Laurin, d'une manière si avantageuse à la Géométrie, qu'on peut dire qu'elle y a gagné considérablement : car en travaillant sur cette matière en 1708, je ne pensois qu'à la description des Courbes qui ont des points doubles ou triples, n'ayant alors d'autres vûes que de découvrir le secret de M. Newton, au lieu que M. Mac-Laurin, dans son *Traité imprimé à Londres en 1720, sous le titre de Geometria organica*, s'est attaché non-seulement à donner les démonstrations analytique des Théoremes de M. Newton, mais encore à imaginer une méthode de décrire par des mouvements continus les Lignes algébriques qui n'ont pas des points doubles, & principalement celles du troisième & du quatrième ordre, ce que M. Newton avoit jugé très-difficile à exécuter commodément : *Nam Curvam aliquam, disoit ce grand Géometre, secundi vel tertii generis punctum duplex non habentem commodè describere Problema est inter difficiliora numerandum.*

Ainsi on doit regarder M. Mac-Laurin comme le Géometre qui a le plus manié les Lignes du quatrième ordre, sans cependant avoir eû le dessein de les faire connoître en détail, d'examiner leurs especes particulières, & de faire remarquer en quoi elles diffèrent les unes des autres : il semble même avoir voulu prévenir sur cela les Lecteurs les moins attentifs ; car à la fin de la troisième Section de sa première Partie, après avoir dit que le nombre des Lignes du quatrième ordre est très-considérable, & qu'il y a bien du travail à

effuyer pour les faire connoître, il ajoûte qu'il y a lieu néanmoins d'espérer qu'elles ne resteront pas inconnuës aussi longtemps que celles du troisiéme ordre, vû le grand nombre d'habiles gens qui s'appliquent aujourd'hui à la Géométrie: *Sed his sæculis, quibus felicissimo virorum doctorum studio artes ac disciplinæ omnes elegantiores ac præsertim Geometria, ad perfectionem summam properare videntur, sperare licet Lineas quarti ordinis non tam diu latere posse, extra definitos Geometriæ limites, quam prius latuerunt ex ordinis proximè inferioris, non ita pridem ab ipso Geometrarum principe in lucem prodita.*

J'ai donc crû pouvoir me flater que cet examen des Lignes du quatriéme ordre auroit au moins les agréments de la nouveauté, & cela avec d'autant plus de raison que ce Traité n'a nul rapport avec l'ouvrage de M. Mac-Laurin, ni avec l'Analyse que je donnai en 1708 des Théoremes de M. Newton. En effet il ne s'agit pas ici d'examiner les Lignes particuliéres du quatriéme ordre qui naissent de tel ou tel mouvement continu & organique, mais d'aller, pour ainsi dire, chercher les Lignes de cet ordre jusques dans leurs sources, d'en faire connoître les différentes classes & les différentes especes, & ensuite d'en déduire les principales propriétés par le moyen de l'Analyse ordinaire aidée de l'Analyse de l'Infini.

J'aurois souhaité pouvoir abréger cet examen, mais la crainte de devenir obscur, en voulant être court, m'a retenu: outre cela il auroit fallu supprimer quantité de Théoremes nouveaux, utiles & curieux. Ainsi mon ouvrage étant beaucoup plus long que ne sont ceux qu'on lit ordinairement dans les Assemblées de l'Académie, je me vois dans la nécessité de le diviser en plusieurs Sections, & les Sections en différents Mémoires propres à être lûs dans les Assemblées de l'Académie. La première, qui sera divisée en quatre ou cinq Mémoires, contiendra les Principes fondamentaux de tout l'ouvrage.

SECTION PREMIERE.

*Principes fondamentaux de l'Examen des Lignes
du quatrième ordre.*

PREMIER MEMOIRE.

DÉFINITIONS ET EXPLICATIONS.

I.

I. Toutes les Courbes algébriques, de quelque genre qu'elles puissent être, rentrent en elles-mêmes, ou s'étendent à l'infini. Celles qui rentrent en elles-mêmes peuvent être appelées *Ovales*, d'un nom générique dont je demande la permission de me servir, quoique quelques-unes de ces Courbes ne ressemblent gueres à des Ovales ordinaires, mais c'est afin de pouvoir les distinguer par un seul mot de celles qui s'étendent à l'infini. Ces *Ovales* sont ou simples comme l'Ellipse ordinaire, qui est une *Ovale* du premier genre, ou composées comme sont presque toutes les Lignes du quatrième ordre qui rentrent en elles-mêmes, & parmi ces *Ovales* composées il y en a qui se noient en forme de ruban, & on les appelle des *Lemniscates*, nom qui leur a été imposé par les illustres Géometres de Bâle dont j'ai parlé ci-devant.

II.

II. Les Courbes qui s'étendent à l'infini, peuvent être nommées par abréviation *Courbes* ou *Lignes infinies*, & parmi celles-ci il y en a que j'appelle *Courbes simples*, & d'autres *Courbes composées*. Les premières sont celles qui n'ont que des branches infinies en nombre pair : les *composées* sont celles qui outre leurs branches infinies, toujours en nombre pair, ont encore des *Ovales* simples ou composées, ou des *Lemniscates*, qui font partie des mêmes Courbes, lesquelles quoique séparées, sur le plan, des branches infinies dont nous venons de parler, ne laissent pas de leur être unies par les liens secrets de l'Equation algébrique qui exprime la nature de la

totalité de la Courbe; ces portions ainsi détachées, sur le plan, des branches infinies de la Courbe à laquelle elles appartiennent, seront nommées ici *Ovales* ou *Lemniscates conjuguées*. Il y a des cas où ces Ovales deviennent infiniment petites, & se réduisent en un point, alors on le nomme par la même raison le *Point conjugué*: dans d'autres cas l'Ovale, au lieu d'être conjuguée, est unie avec deux des branches infinies de la Courbe, alors on la nomme le *Folium* de cette Courbe, & le point où se fait cette union est dit le *Nœud*, & ce Nœud est toujours un *point double* de la Courbe.

III.

III. Les Courbes infinies, soit qu'elles soient simples, soit qu'elles soient composées, sont ou *Paraboliques*, ou *Hyperboliques*, ou *Parabolo-hyperboliques*: les premières sont celles dont toutes les branches infinies n'ont point d'*Asymptotes rectilignes*; les secondes, celles dont toutes les branches ont des *Asymptotes rectilignes*, & les dernières, celles dont certaines branches infinies, toujours en nombre pair, n'ont pas d'*Asymptotes rectilignes*, tandis que les autres branches infinies de la même Courbe, aussi en nombre pair, ont des *Asymptotes rectilignes*.

REMARQUE.

IV. Je me sers ici du nom d'*Asymptotes rectilignes* pour éviter un équivoque qui pourroit causer quelque obscurité dans la suite, si je ne prenois la précaution d'en avertir. Toutes les Courbes qui s'étendent à l'infini, ont toujours des *Asymptotes*, mais ces *Asymptotes* sont ou des Lignes courbes ou des Lignes droites, & on en trouve la nature & la position, en réduisant l'équation de la Courbe qu'on examine en une ou plusieurs suites d'autant plus convergentes que l'*Abscisse* est grande; & cette Méthode, qui est une des plus belles découvertes de ces derniers temps, est d'une très-grande utilité pour découvrir les différentes branches infinies des Courbes d'un genre élevé par le moyen des Courbes d'un genre moins élevé, ou au moins plus simple.

Les Branches infinies, dont les Asymptotes sont rectilignes, sont donc nommées *Branches hyperboliques*, & celles qui ont des Asymptotes curvilignes, sont nommées *Branches paraboliques*. Un seul exemple éclaircira ceci : La Paraboloïde de M. Descartes, qui est une Ligne parabolo-hyperbolique du troisième ordre, est composée, comme tout le monde sçait, de quatre branches infinies, dont deux sont hyperboliques, puisqu'elles ont une Ligne droite pour Asymptote, les deux autres sont paraboliques, n'ayant pas d'Asymptotes rectilignes ; mais ces deux branches paraboliques ont pour Asymptote une *Parabole conique*, ou Parabole ordinaire, de laquelle elles s'approchent toujours de plus en plus en allant à l'infini, de même que les branches hyperboliques s'approchent toujours & à l'infini de la Ligne droite, qui est leur Asymptote.

D É F I N I T I O N S.

I V.

- * Figure 1. V. Si l'on tire une ligne AP^* , parallèle à la tangente NT d'une parabole ou d'une hyperbole conique quelconque $MNGm$, dont GH (par exemple) soit l'axe, la courbe $MNGm$, après s'être approchée de la ligne droite AP de M en N , s'éloigne pendant tout le reste de son cours, qui est infini, de la ligne droite AP , en allant de N en G & en m : cela est démontré. Il n'en est pas de même des lignes d'un ordre supérieur, il y en a, qui après s'être approchée de la ligne droite AP^* de M en N , s'éloignent de cette même droite, en allant de N en O , & ensuite s'en rapprochent une seconde fois, en allant de O en q , après quoi elles s'éloignent une seconde fois, en allant de q en V , puis s'en rapprochent une troisième fois, & cela à plusieurs reprises, suivant le degré auquel elles sont élevées : c'est ce que l'on voit arriver souvent aux lignes du quatrième ordre ; ainsi pour exprimer par un seul mot ces différents contours, je les nomme des *sinuosités*, en sorte que MNO est une sinuosité, NOq est une seconde sinuosité, OqV une troisième sinuosité, & ainsi des
- * Fig. 2.

autres : d'où il suit que les points N , O , q , seront nommés les sommets des sinuosités, N le sommet de la première, O le sommet de la seconde, & q le sommet de la troisième.

V.

VI. Lorsqu'une ligne courbe ZMN^* est en partie concave & en partie convexe vers une même ligne droite AP , le point N de cette courbe qui sépare la partie concave de la partie convexe est nommé, comme tout le monde sçait, le point d'inflexion de la courbe. * Fig. 3.

VI.

VII. Par les définitions donnés du *folium* & du *nœud*, il est évident que si le *folium* d'une courbe devient infiniment petit, le nœud de ce *folium* se change en un point que les Géometres modernes ont nommé *point de rebroussement*. En effet, soit $ZMmDMN^*$ une courbe foliée quelconque, * Fig. 4. dans laquelle la droite MD soit ce que je nomme la mesure du *folium*, & M le nœud : il est visible que ce nœud demeurant fixe en M , si la droite MD diminue continuellement jusqu'à devenir infiniment petite, il est visible, dis-je, que le *folium* diminue continuellement jusqu'à devenir infiniment petit, & enfin que tout le *folium* se confond avec le point M , & que la courbe $ZMmDMN$ prend la figure de la courbe ZMN qui a un point de rebroussement en M^* . D'où il * Fig. 5. suit que tout point de rebroussement peut être considéré comme le nœud d'un *folium* infiniment petit.

AVERTISSEMENT.

Je crois qu'il est à propos d'avertir ici de deux choses. 1.^o Que nous nommons point de rebroussement ce que *M. Newton* & les autres Géometres Anglois ont nommé *cusps* : que ces Géometres appellent *nodus* ce que nous nommons le *folium*, & qu'ils donnent le nom de *decussatio* au point que nous appelons le nœud. J'ai crû devoir retenir les dénominations qui étoient en usage parmi les Géometres François avant que *M. Newton* eût écrit sur cette matière.

2.^o Que quoique nous considérons ici le point de rebroussement

- comme le nœud d'un folium infiniment petit, nous ne prétendons pas dire qu'il ne puisse être considéré que de cette façon, car il est bien certain qu'on peut le regarder comme la réunion de deux
- * Fig. 6. points d'inflexion N & M , dont l'intervalle NM * est devenu infiniment petite. En effet soit la parabole campaniforme de M . Newton $ZNDMX$, dont la nature est exprimée par l'équation $y^3 - 3ayy + 3aay = bxx$ (dans laquelle $DP = x$ & $PZ = y$) il est constant que cette courbe a deux inflexions N & M , qui se font parallèlement à l'ordonnée principale DL ; si l'on prend sur cette ordonnée principale la portion $DR = a$ & sur l'axe DP de part & d'autre du point D les portions DB , Db , égales l'une & l'autre à $\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, & que par les points B & b on mene les droites BN , bM , parallèles à DL , les points N & M où ces droites seront rencontrées par une autre droite RN , menée parallèlement à l'axe par le point R , & de part & d'autre de ce point; ces points, dis-je, N & M seront les deux points d'inflexion de la courbe $ZNDMX$; mais si l'on suppose maintenant $DR(a) = 0$, il est visible que cette courbe $ZNDMX$
- * Fig. 7. se change en une seconde parabole cubique ZNX *, puisque son équation $y^3 - 3ayy + 3aay = bxx$, par la supposition de $a = 0$, devient $y^3 = bxx$, qui est celle qui convient à la courbe qu'on nomme seconde parabole cubique, laquelle a un point de rebroussement à son sommet N .

REMARQUES.

- * Fig. 2. VIII. Le rapport entre les abscisses AC & les ordonnées EC d'une ligne droite quelconque $SEMe$, dont AP est l'axe, étant donné en termes analytiques, il est constant 1.^o que si cette droite coupe en m & en M & en tout autre point la courbe ZMN , dont AP soit l'axe, & dont les ordonnées MP soient parallèles aux ordonnées EC de la droite $SEMe$, il est constant, dis-je, que le point d'intersection M étant commun à la droite & à la courbe, l'abscisse AB qui lui correspond est commune à la droite & à la courbe, à cause de l'axe commun AP . Il en est de même de tout autre

autre point d'intersection M de la droite SMe & de la courbe ZMN , l'abscisse AP qui lui correspond est commune à la droite & à la courbe.

2.° Tous les Géomètres conviennent que le simple point d'attouchement M^* est équivalent à deux points d'intersection infiniment près l'un de l'autre; ainsi, la droite SMe étant supposée tangente en M de la courbe ZMN , il est clair que l'abscisse AP est deux fois commune à la droite SMe & à la courbe ZMN . * Fig. 3.

3.° Puisqu'il est évident * qu'une tangente SN en un point d'inflexion N^* touche & coupe la courbe MN en ce même point N , il est visible qu'en abaissant de ce point N sur l'axe AP l'ordonnée NB , l'abscisse AB correspondante au point d'inflexion, doit être trois fois commune à la droite SNe & à la courbe MN . * Art. 8. * Fig. 8.

4.° Soit supposée la droite SNM , tangente au point d'inflexion N d'une courbe $ZMNX^*$, & en même temps secante de cette courbe en un autre point M , distant du point d'inflexion de la grandeur NM ; si cette distance NM devient infiniment petite, la droite SNM redevient simple tangente de la courbe au point N^* , mais son attouchement est équivalent à quatre points d'intersection, ou à deux points d'attouchement infiniment près l'un de l'autre, & l'inflexion ne paroît plus, quoiqu'elle existe réellement dans un espace infiniment petit, ce qui pourroit faire donner à ces sortes de points le nom d'*inflexion invisible*, ou celui d'*inflexion de la seconde espece*. * Fig. id.

5.° Soit supposée la droite SN_2Me , tangente en une inflexion de la seconde espece N d'une courbe Z_2MNX ; & en même temps secante de cette courbe en un autre point $_2M$, distant du point d'inflexion invisible de la grandeur $_2MN$; si cette distance $_2MN$ devient infiniment petite; il est évident que la droite SN_2M^* , de simple tangente qu'elle étoit, redevient tangente & secante de la courbe ZNX en un même point N , & par conséquent qu'en ce point N il y a une inflexion invisible & une inflexion visible: * Fig. 10.

pour le distinguer des autres points d'inflexions dont on a parlé dans l'article 6, je le nommerai *inflexion de la troisième espece*.

* Fig. 10. 6.° Si la droite SN_3M^* est supposée tangente de la courbe ZNX en une inflexion de la troisième espece N , & sécante de la même courbe en un autre point $3M$, distant de l'inflexion N de la grandeur $3MN$; il est clair, que cette distance $3MN$ devenant infiniment petite, la droite

* Fig. 11. SN_3M redevient simple tangente de la courbe au point N^* , mais son attouchement est équivalent à six points d'intersection infiniment près les uns des autres, en sorte qu'en ce point N il y a consécutivement deux inflexions invisibles dans un espace infiniment petit : pour la distinguer de celle du nombre 4 de cet article, je la nomme *inflexion de la quatrième espece*.

7.° On peut s'assurer ainsi que les courbes ont des inflexions de la 5^{me}, 6^{me}, 7^{me} & 8^{me} espece, &c. qui sont alternativement visibles & invisibles ; en sorte que toutes les fois qu'un attouchement est équivalent à un nombre d'intersections impair, cet attouchement se fait en une inflexion visible : mais lorsque l'attouchement est équivalent à un nombre d'intersections pair, plus grand que deux, cet attouchement se fait en une inflexion invisible.

COROLLAIRE I.

IX. Il suit des nombres 4, 5 & 6 de l'article précédent, qu'en abaissant des points d'inflexion N^* de la seconde, troisième ou quatrième espece sur l'axe AP des ordonnées comme NB , il suit, dis-je, que l'abscisse AB qui en résulte, est 1.° une abscisse quatre fois commune à la tangente SN & à la courbe XN_2MZ , si le point N est une inflexion de la seconde espece. 2.° Que cette abscisse AB est cinq fois commune à la droite & à la courbe, si le point N est une inflexion de la troisième espece. 3.° Que cette abscisse AB est six fois commune à la droite & à la courbe, si le point N est une inflexion de la quatrième

* Fig. 9.
10. & 11.

espece, & ainsi des autres inflexions d'especes supérieures.

COROLLAIRE II.

X. Si d'un point simple N^* , ou d'un point d'inflexion N^{**} d'espece quelconque, on abaisse sur l'ordonnée principale AL une droite NE parallele à l'axe AB , qui soit sécante de la courbe en N , il est visible que l'abscisse AE n'est qu'une seule fois commune à la sécante BN & à la courbe AXN_2MZ , & que l'abscisse AB n'est qu'une seule fois commune à la sécante EN & à la courbe AXN_2MZ , soit que le point N soit une inflexion de la première, seconde, troisième & quatrième espece, ou d'une espece supérieure.

* Fig. 3.

** Fig. 9.

10. & 11.

D É F I N I T I O N S.

V I I.

XI. Lorsqu'une courbe ne passe qu'une seule fois par un point quelconque M du plan sur lequel elle est décrite, ce point, en tant qu'il appartient à la courbe, n'est qu'un point simple. Ainsi toutes les inflexions visibles & invisibles, soit qu'elles soient de la première, seconde, troisième ou quatrième espece, &c. ne sont jamais que des points simples.

V I I I.

XII. Lorsqu'une courbe, soit qu'elle s'étende à l'infini, soit qu'elle rentre en elle-même, passe deux fois par le même point M du plan sur lequel elle est décrite, ce point M , en tant qu'il appartient à la courbe, est un point double. Ainsi, 1.° Tous les simples nœuds, ou points d'intersection de deux branches, sont des points doubles. 2.° Puisque le point de rebroussement * peut être pris pour le nœud d'un *folium* infiniment petit, il s'ensuit que le rebroussement d'une courbe est un point double. 3.° Le point conjugué n'étant autre chose qu'une ovale infiniment petite, il s'ensuit que le point conjugué doit être mis au rang des points doubles.

* Fig. 4.

& 5.

* Art. 7.

I X.

XIII. Lorsqu'une courbe passe trois fois par le même point M du plan sur lequel elle est décrite, ce point M ,

* Fig. 12.

& 13.

en tant qu'il appartient à la courbe, est un *point triple*. Ainsi, 1.^o tous les nœuds d'une courbe par lesquels il passe une troisième branche de la même courbe sont des points triples. 2.^o Le rebroussement d'une courbe étant le nœud d'un *folium* infiniment petit*, il est évident que le rebroussement d'une courbe quelconque devient un point triple, lorsqu'il passe par ce point de rebroussement une troisième branche de la même courbe. 3.^o L'ovale infiniment petite étant un point double, lorsqu'une ovale infiniment petite est adhérente à une branche de la courbe, il est évident qu'elle doit former un point triple dans l'endroit où elle est adhérente à la courbe. Cette dernière espèce de point triple sera nommé *point triple invisible*, parce que l'on ne voit point, lorsque la courbe est décrite sur le plan, ce qui cause la *triplicité*, l'ovale infiniment petite étant, pour ainsi dire, invisible.

X.

- XIV. Lorsqu'une courbe passe quatre fois par le même point M * du plan sur lequel elle est décrite, ce point M est nommé *point quadruple*. Si elle passe cinq fois par le même point M du plan sur lequel elle est décrite, ce point M , en tant qu'il appartient à la courbe, est nommé *point quintuple*, & ainsi des autres points multiples à l'infini.

X I.

- XV. S'il arrive qu'une des branches DMN *, qui forment en M un point double, a une inflexion en ce même point M , ce point double est nommé *point double de la seconde espèce*. Si les deux branches DMN , DMZ *, qui forment le point double M , ont l'une & l'autre une inflexion au point M , ce point double est nommé *point double de la troisième espèce*; au lieu que le point double M *, auquel les branches DMN , DMZ , n'ont aucune inflexion, est nommé *point double de la première espèce*.

X I I.

XVI. Lorsqu'une des trois branches, dont l'intersection forme le point triple, a une inflexion au point M , où se fait cette intersection, ce point triple est nommé *point triple de*

la seconde espece *. Lorsque deux de ces branches ont chacune une inflexion en M , où se fait l'intersection des trois branches ce point triple est nommé *point triple de la troisième espece* *. * Fig. 17. * Fig. 18. Enfin lorsque les trois branches, dont l'intersection commune forme le point triple, ont les unes & les autres un point d'inflexion en M , où se fait cette intersection, ce point triple est nommé *point triple de la quatrième espece* *, au lieu que le point triple M^* , auquel les branches DMN , DMm , ZMV , n'ont aucune inflexion, est nommé *point triple de la première espece*. * Fig. 19. * Fig. 12.

S C H O L I E.

XVII. Il est aisé de conclurre des définitions précédentes, 1.^o Que, parmi les points quadruples, il y a cinq especes d'intersections. *La première espece* est lorsque les quatre branches, qui se coupent en M , n'ont aucune inflexion en ce même point M . *La seconde espece* est celle où une seule des quatre branches a une inflexion au point M où se fait l'intersection. *La troisième espece* est celle où deux des quatre branches ont chacune une inflexion au point même de l'intersection. *La quatrième espece* est celle où trois branches ont chacune une inflexion précisément au point où se fait l'intersection. Enfin les points quadruples *de la cinquième espece* sont ceux où les quatre branches, qui se coupent en M , ont les unes & les autres des inflexions en ce même point M .

2.^o On peut connoître aussi facilement ce que c'est qu'un point quintuple, & voir en même temps qu'il y a six especes d'intersections parmi les points quintuples, les unes sans inflexion, les autres avec une seule inflexion, les *troisièmes* avec deux inflexions, les *quatrièmes* avec trois inflexions, les *cinquièmes* avec quatre inflexions, & les *sixièmes* avec cinq inflexions.

C O R O L L A I R E I.

XVIII. Il suit des définitions données des points doubles, triples, quadruples, & des autres points multiples, qu'après avoir mené par un point multiple quelconque M deux sécantes

Fig. 4. & 5.

12. 13. 14.
15. 16. 17.
18. & 19.

MB, *ME*, faisant entr'elles un angle quelconque *BME*, & prolongées jusqu'à ce qu'elles rencontrent en *B* & en *E* des droites, comme *AP* & *AL*, prises la première pour l'axe, & la seconde pour l'ordonnée principale de la courbe à laquelle le point multiple *M* appartient ; il suit, dis-je, des définitions précédentes, 1.° Que l'abscisse *AB* est deux fois commune à la secante *EM* & à la courbe *ZMDMN*, & l'abscisse *AE* aussi deux fois commune à la secante *BM* & à la même courbe *ZMDMN*, si le point *M* est un point double. 2.° Que *AB* est une abscisse trois fois commune à la secante *EM* & à la courbe *NMDM_mZMV*, & *AE* une abscisse trois fois commune à la secante *BM* & à la même courbe *NMDM_mZMV*, si le point multiple *M* est un point triple. 3.° Que *AB* est une abscisse quatre fois commune à la secante *EM* & à la courbe *VMDMNZM₃VZM₂V*, & *AE* une abscisse quatre fois commune à la secante *BM* & à la même courbe *VMDMNZM₃VZM₂V*, si le point multiple *M* est un point quadruple, & ainsi des autres points multiples supérieurs.

COROLLAIRE II.

XIX. Toutes choses demeurant les mêmes comme dans l'article précédent, si par un point multiple quelconque *M*, on mene une tangente *MT*, il est visible, 1.° Que l'abscisse *AB* sera trois fois commune à la tangente *TM* & à la courbe *ZMDMN*, si le point *M* est un point double de la première espece*, ou un point double accompagné de rebroussement*. 2.° Que *AB* est une abscisse quatre fois commune à la tangente *TM* & à la courbe, si le point multiple *M* est un point triple de la première espece*, ou un point triple accompagné de rebroussement*, ou un point triple invisible*, ou un point double de la seconde ou troisième espece*. 3.° Que *AB* est une abscisse cinq fois commune à la tangente *TM* & à la courbe**, si le point multiple *M* est un point quadruple de la première espece, ou un point quadruple accompagné de rebroussement, ou un point triple de la

* Fig. 4.

* Fig. 5.

* Fig. 12.

* Fig. 13.

* Fig. 40.

* Fig. 14.

& 15.

** Fig. 16.

seconde, troisième ou quatrième espece *, & ainsi des autres points multiples d'un ordre supérieur. * Fig. 17. 18. & 19.

COROLLAIRE III.

XX. Il n'est pas moins évident, 1.° Qu'en un point double M , formé par l'intersection de deux branches finies ou infinies d'une même courbe *, il doit y avoir deux tangentes * Fig. 4. MT , Mt , faisant entr'elles un angle quelconque TMt . 2.° Qu'en un point double formé par le rebroussement M d'une courbe ZMN *, il ne sçauoit y avoir qu'une seule tangente * Fig. 5. MT . En effet si la droite TM est tangente en M de la branche ZM , elle doit être tangente en ce même point M de la branche NM , quand M est un point de rebroussement : car les deux derniers éléments ou côtés infiniment petits des branches ZM , NM , sont exactement posés l'un sur l'autre au point de rebroussement, ainsi que M. de Fontenelle l'a démontré, art. 835, 836 & suivants, *des Eléments de la Géométrie de l'Infini*. D'où il suit que la tangente de l'extrémité de la branche ZM se confond avec la tangente de l'extrémité de la branche NM , & par conséquent qu'en un point double M , formé par le rebroussement d'une courbe ZMN , il ne sçauoit y avoir qu'une seule tangente TM . 3.° Il suit encore des définitions & des corollaires précédents, qu'en un point double * formé par une ovale infiniment petite, * Fig. 20. il ne sçauoit y avoir de tangente : car les tangentes n'étant que des prolongements de côtés infiniment petits du premier ordre d'une branche de courbe quelconque, si par le point double M d'une courbe ZNC_nZ il ne passe aucune branche finie ou infinie de cette courbe ZNC_nZ , mais seulement une ovale infiniment petite, il est clair qu'il ne sçauoit y avoir en ce point M de prolongement d'un côté infiniment petit du premier ordre d'une branche quelconque finie ou infinie, & par conséquent que l'expression générale des soutangentes de la courbe ZNC_nZ ne doit fournir que des valeurs imaginaires au point double M , quand ce point double est une ovale infiniment petite.

REMARQUES.

XXI. De-là naît la différence qui est entre les points doubles qui sont formés par l'intersection de deux branches d'une même courbe $ZMDMN$, ceux qui sont formés par le rebroussement M d'une courbe ZMN , & ceux qui sont formés par une ovale infiniment petite, ou point conjugué M d'une courbe $ZNCnZ$; les points d'intersection * ont toujours deux tangentes TM , tM , faisant entr'elles un angle fini TMt : les points de rebroussement * n'en ont qu'une, & les ovales infiniment petites * ou points conjugués M n'en ont que d'imaginaires *.

On peut voir encore la différence qui est entre les points doubles d'intersection de la première, seconde & troisième espece. Ceux de la première espece * sont tels que l'abscisse AB n'est que trois fois commune à la courbe $ZMDMN$ & à la tangente TM , aussi-bien qu'à cette courbe & à la tangente tM *. Ceux de la seconde espece ** sont tels que l'abscisse AB n'étant que trois fois commune à la courbe & à une des tangentes comme tM , cette même abscisse est quatre fois commune à la même courbe & à l'autre tangente comme TM *. Les points d'intersection de la troisième espece ** sont tels que l'abscisse AB est quatre fois commune à la courbe & aux deux tangentes TM & tM *.

COROLLAIRE IV.

- * Fig. 12. XXII. Il est visible, 1.° Qu'en un point triple M^* , formé par l'intersection des trois branches de la courbe $NMDMmZMV$, il doit y avoir trois tangentes TM , tM , θM .
- * Fig. 13. 2.° Qu'en un point triple M d'une courbe $NMmZMV^*$, où il y a un point de rebroussement, il ne sçauroit y avoir que deux tangentes TM , tM , puisque les tangentes au point M des branches NM , mM , se confondent en une.
- * Fig. 40. 3.° Qu'en un point triple M , formé par l'adhésion d'une ovale infiniment petite sur une branche ZMA^* d'une courbe $VNAMZ$, il ne sçauroit y avoir qu'une seule tangente TM ,
les

les deux autres devenant imaginaires à cause de l'ovale infiniment petite.

REMARQUES.

XXIII. De-là naît la différence qui est entre un point triple formé par l'intersection de trois branches, le point triple accompagné de rebroussement, & le point triple formé par l'adhésion d'une ovale infiniment petite.

On voit aussi la différence qui est entre les points triples de la première, seconde, troisième & quatrième espèce. Dans les points triples de la première espèce*, l'abscisse AB est quatre fois commune à la courbe $NMDMmZMV$, & à chacune des tangentes TM , tM , θM , prises séparément*.

* Fig. 12.

* Art. 19.

n. 2.

* Fig. 17.

* Art. id.

n. 3.

Dans les points triples de la seconde espèce*, l'abscisse AB est cinq fois commune à la courbe $NMDMmZMV$, & à une des trois tangentes comme TM , à cause du point d'inflexion M de la branche DMN , tandis que cette même abscisse AB n'est que quatre fois commune à la courbe $DMNMmZMV$, & aux deux autres tangentes tM , θM , prises séparément.

Dans les points triples de la troisième espèce*, l'abscisse AB est cinq fois commune à la courbe $NMDMmZMV$, & à deux des tangentes au point M comme TM & tM , à cause du point d'inflexion M de la branche DMN , & du point d'inflexion M de la branche DMm , tandis que cette même abscisse AB n'est que quatre fois commune à la courbe $NMDMmZMV$, & à la troisième tangente θM .*

* Fig. 18.

* Art. id.

n. id.

* Fig. 19.

Dans les points triples de la quatrième espèce*, l'abscisse AB est cinq fois commune à la courbe $NMDMmZMV$ & aux trois tangentes TM , tM , θM , puisque chaque branche qui passe par le point triple M , a une inflexion en ce même point M .*

* Art. id.

n. id.

AVERTISSEMENT.

De tout ce qui vient d'être dit, il est aisé de déduire une Théorie générale pour les autres points multiples, tels que sont les
Mem. 1730. . Z

points quadruples, quintuples, sextuples, &c. Mais comme les lignes du quatrième ordre dont j'ai à traiter ici, ne sçauoient avoir ni points triples de la seconde, troisième & quatrième espece, ni points quadruples, ni points quintuples; en un mot, comme les lignes du quatrième ordre ne peuvent avoir que des points simples, ou des points doubles de la première, seconde & troisième espece, ou au plus un seul point triple de la première espece, je m'abstiens de pousser cette recherche plus loin, persuadé qu'on doit en voir l'enchaînement, & qu'il n'y a personne qui ne puisse déduire toutes les conséquences qui suivent des principes que l'on vient d'établir; il faudroit allonger extrêmement ce Mémoire, pour en faire un détail exact.

D É F I N I T I O N S.

XIII.

XXIV. Si n est un nombre entier & positif, & qu'on élève une quantité variable & inconnue t d'abord à l'exposant n , ensuite à l'exposant $n - 1$, puis à l'exposant $n - 2$, & ainsi de suite jusqu'à l'exposant 0; si l'on unit ces différentes puissances de l'inconnue t les unes aux autres par les signes $+$ ou $-$, en donnant à chaque terme un coefficient constant, mais indéterminé, on formera ce que je nomme *grandeurs completes du degré n* . Par exemple, n étant $= 2$, si l'on élève la variable t d'abord à l'exposant 2, puis à l'exposant 1, ensuite à l'exposant 0, & qu'on unisse ces trois puissances t^2 , t^1 , t^0 , par les signes $+$ ou $-$, en multipliant le premier terme par le coefficient constant ϵ , le second par le coefficient constant γ , le troisième par le coefficient constant δ , pour avoir $\epsilon t^2 \pm \gamma t \pm \delta$, cette formule sera une grandeur complete du second degré; de même la formule $\epsilon t^3 \pm \gamma t^2 \pm \lambda t \pm \mu$ est une grandeur complete du troisième degré, & celle ci $\nu t^4 \pm \rho t^3 \pm \pi t^2 \pm \varphi t \pm \sigma$ est une grandeur complete du quatrième degré, & ainsi de suite, en sorte que $A t^n \pm B t^{n-1} \pm C t^{n-2} \pm D t^{n-3} \pm E t^{n-4} \pm \&c.$ est une grandeur complete du degré n : par la même raison $q t \pm a$ est une grandeur complete du premier

degré, & $t^0 = 1$ est en ce sens une grandeur complète du degré 0.

XIV.

XXV. Lorsqu'il manque quelques termes dans les formules précédentes, je les nomme *grandeurs incomplètes de tel ou tel degré*, quand l'occasion se présente d'en parler ; ainsi la formule $\varepsilon t^3 + \mu$ & la formule $\varepsilon t^3 + \eta t^2 + \mu$ sont des grandeurs incomplètes du troisième degré, parce qu'il manque à la première les termes ηt^2 & λt , & à la seconde le terme λt .

L E M M E I.

XXVI. Les deux suites marquées ici par (A) & par (B), dont la première est celle des grandeurs complètes de la variable t , qui sont depuis 0 jusqu'à n , & la seconde celle des puissances descendantes depuis n jusqu'à 0, d'une autre variable s ; les deux suites, dis-je, (A) & (B) étant arrangées en ordre, comme on les voit ici,

$$\begin{array}{ccccccc} \text{(A)...} & 1, & qt + \alpha, & \varepsilon t^2 + \gamma t + \delta, & \varepsilon t^3 + \eta t^2 + \lambda t + \mu, & & \\ \text{(B)...} & s^n, & s^{n-1}, & s^{n-2}, & s^{n-3}, & & \\ & \overline{vt^4 + pt^3 + \pi t^2 + \phi t + \sigma}, & & & & & \\ & s^{n-4}, & & & & & \end{array} \text{ \& c.}$$

Si l'on multiplie le premier terme de la suite (A) par le premier terme de la suite (B) ; le second terme de la suite (A) par le second terme de la suite (B), le troisième terme de la suite (A) par le troisième terme de la suite (B), & ainsi des autres jusqu'à ce que tous les termes soient épuisés, & qu'on unisse tous les produits par les signes $+$ ou $-$, en faisant la somme totale égale à zero : on aura l'Équation indéterminée marquée ici par (D)

$$\begin{array}{l} \text{(D)...} s^n + qt + \alpha \times s^{n-1} + \varepsilon t^2 + \gamma t + \delta \times s^{n-2} + \\ \varepsilon t^3 + \eta t^2 + \lambda t + \mu \times s^{n-3} + vt^4 + pt^3 + \pi t^2 + \phi t + \sigma \\ \times s^{n-4} + \text{ \& c. } = 0, \end{array}$$

dans laquelle il n'y a que deux variables s & t , & dont les termes comprennent tous les produits, qui n'excèdent pas le n^e

degré, des puissances descendantes de la variable s & des puissances réciproquement ascendantes de la variable t , qui sont depuis n jusqu'à zero, ces produits multipliés par les coefficients constants $1, q, a, b, \gamma, \delta, \epsilon, \&c.$

Ce que je nomme *puissances descendantes de la variable s* , sont les puissances que l'on voit ici en (R) , & ce que je nomme *puissances réciproquement ascendantes de la variable t* , sont celles que l'on voit ici en (P)

$$(R) \dots s^n, s^{n-1}, s^{n-2}, s^{n-3}, s^{n-4}, s^{n-5}, \&c.$$

$$(P) \dots t^0, t^1, t^2, t^3, t^4, t^5, \&c.$$

Les produits de toutes ces puissances descendantes, depuis n jusqu'à 0, & réciproquement ascendantes, sont compris dans le Carré algébrique que l'on voit ici en (N) , dont le premier rang horizontal contient tous les produits de R par t^0 ; le

$$N \dots \left\{ \begin{array}{l} t^0 s^n, t^0 s^{n-1}, t^0 s^{n-2}, t^0 s^{n-3}, t^0 s^{n-4}, \&c. \\ t^1 s^n, t^1 s^{n-1}, t^1 s^{n-2}, t^1 s^{n-3}, t^1 s^{n-4}, \&c. \\ t^2 s^n, t^2 s^{n-1}, t^2 s^{n-2}, t^2 s^{n-3}, t^2 s^{n-4}, \&c. \\ t^3 s^n, t^3 s^{n-1}, t^3 s^{n-2}, t^3 s^{n-3}, t^3 s^{n-4}, \&c. \\ t^4 s^n, t^4 s^{n-1}, t^4 s^{n-2}, t^4 s^{n-3}, t^4 s^{n-4}, \&c. \\ \&c. \quad \&c. \quad \&c. \quad \&c. \quad \&c. \end{array} \right. M \dots \left\{ \begin{array}{l} t^0 s^n, t^0 s^{n-1}, t^0 s^{n-2}, t^0 s^{n-3}, t^0 s^{n-4}, \&c. \\ t^1 s^{n-1}, t^1 s^{n-2}, t^1 s^{n-3}, t^1 s^{n-4}, \&c. \\ t^2 s^{n-2}, t^2 s^{n-3}, t^2 s^{n-4}, \&c. \\ t^3 s^{n-3}, t^3 s^{n-4}, \&c. \\ t^4 s^{n-4}, \&c. \\ \&c. \end{array} \right.$$

second rang horizontal, tous les produits de R par t^1 ; le troisième rang horizontal, tous les produits de R par t^2 , & ainsi de suite. Or si l'on retranche de ce carré, tous les produits qui sont au dessus de la puissance n , il est visible que ce seront, 1° le premier terme du second rang horizontal, 2° les deux premiers termes du troisième rang horizontal, 3° les trois premiers termes du quatrième rang, 4° les quatre premiers termes du cinquième rang, & ainsi de suite de rang en rang qui seront retranchés, en sorte que le carré algébrique N se trouvera réduit au triangle marqué par (M) ; d'où il suit que ce triangle contiendra tous les produits des puissances descendantes de s par les puissances réciproquement ascendantes de t , qui n'excèdent pas le n^e degré.

Mais il est évident que tous les produits qui composent le triangle algébrique (M) , se trouvent dans l'équation (D) .

formée par la multiplication des termes des suites A & B qui se correspondent suivant l'exposé de ce Lemme.

$$(D) \dots s^n + qt + a \times s^{n-1} + \zeta t^2 + \gamma t + \delta \times s^{n-2} + \varepsilon t^3 + \eta t^2 + \lambda t + \mu \times s^{n-3} + \nu t^4 + \rho t^3 + \pi t^2 + \phi t + \sigma \times s^{n-4} + \&c. = 0.$$

Car 1.° Le produit, qui compose la première colonne perpendiculaire du triangle M , se trouve composer le premier terme de l'équation (D) ; 2.° Tous les produits de la seconde colonne perpendiculaire du triangle M , sont dans le second terme de l'équation (D) ; 3.° Tous les produits de la troisième colonne de M , sont dans le troisième terme de la même équation (D) ; 4.° Tous les produits de la quatrième colonne sont dans son quatrième terme, & ainsi de suite. Donc tous les produits des puissances descendantes de s , par les puissances ascendantes de t , qui n'excèdent pas le n^e degré, se trouvent dans l'équation (D) multipliés successivement par les coefficients constants $i, q, a, \zeta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta, \lambda, \&c.$ Ce qu'il falloit prouver.

C O R O L L A I R E.

XXVII. Il suit de-là que l'équation marquée (D) est toujours du n^e degré, & ne sçauroit être d'un degré supérieur ou inférieur; car 1.° les produits des variables s & t , dont elle est composée, ne sçauroient excéder le n^e degré (par l'article précédent), donc elle ne peut être d'un degré supérieur à n ; 2.° parmi les produits des mêmes variables s & t , il y en aura toujours plusieurs qui seront du degré n ; donc elle ne sçauroit être d'un degré inférieur à n , donc elle est toujours de n^e degré. *C. Q. F. P.*

L E M M E I I.

XXVIII. Si les coefficients $q, a, \zeta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta, \&c.$ de l'équation marquée par (D) dans les deux articles précédents, portent avec eux leurs signes $+$ ou $-$, & si on les regarde, quoique constants, comme des coefficients indéterminés, c'est-à-dire,

indifférents à être de telle ou telle grandeur constante; je dis que cette équation (D) est de toutes les équations du n^{e} degré, qui n'enveloppent que deux inconnues, celle qui est la plus générale.

Toutes les équations imaginables du n^{e} degré, dans lesquelles il n'y a que deux variables, peuvent se rapporter à l'équation (D), si l'on peut comparer tous les termes de ces équations particulières un à un, avec ceux de l'équation (D) qui leur correspondent : or cette comparaison de terme à terme, si usitée depuis M. Descartes, qui est le premier qui l'ait mise en pratique, sera toujours possible entre toutes les équations imaginables du n^{e} degré, & celle que l'on a marquée (D) dans les articles précédents; car, 1.^o Tous les produits possibles des puissances descendantes depuis n jusqu'à 0, de la variable s & des puissances ascendantes, depuis 0 jusqu'à n de la variable t (à l'exception néanmoins de ceux qui sont d'un degré plus élevé que la grandeur n) se rencontrent dans l'équation (D); cela est évident par l'article 26. Or les termes dont les équations particulières du degré n sont composées, ne peuvent être, quant à leurs variables, que des produits des puissances descendantes d'une variable comme s & des puissances ascendantes d'une autre variable comme t , qui n'excèdent point le n^{e} degré. Donc tous les termes, de ces équations particulières du n^{e} degré, auront leurs semblables dans l'équation (D), quant à leurs grandeurs variables. Donc, par rapport à ces variables, ils pourront être comparés avec les termes de l'équation (D). 2.^o Il en sera de même par rapport aux grandeurs constantes qui multiplieront les termes des équations particulières; car tous les coefficients q, a, c, γ, d, e, n , &c. de l'équation (D) étant indifférents à recevoir les signes $+$ ou $-$, & en même temps indéterminés à être de telle ou telle grandeur, peuvent être comparés un à un avec les coefficients déterminés des équations particulières. Donc tous les termes des équations particulières du degré n peuvent être comparées, soit par rapport à leurs quantités variables, soit par rapport à leurs quantités constantes, avec les termes de l'équation (D), suivant

la méthode de comparaison si usitée dans l'analyse. Donc toutes les équations particulières du degré n , dans lesquelles il n'y a que deux inconnues, peuvent se rapporter à l'équation (D). Donc cette équation est de toutes les équations du n^{e} degré, qui ne renferment que deux variables, celle qui est la plus générale. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

XXIX. Donc, 1.^o l'équation marquée ici par ($1D$) est de toutes les équations indéterminées du premier degré, qui ne renferment que deux inconnues, celle qui est la plus générale, & à laquelle toutes les autres peuvent se rapporter.

$$(1D) \dots s' + qt + a \times s^0 = 0.$$

2.^o L'équation marquée ($2D$) est de toutes les équations du second degré, qui n'ont que deux variables, celle qui est la plus générale.

$$(2D) \dots s^2 + qt + a \times s' + \overline{6t^2 + \gamma t + \delta} \times s^0 = 0.$$

3.^o L'équation marquée ($3D$) est de toutes les équations du troisième degré, qui ne renferment que deux variables ou inconnues, celle qui est la plus générale.

$$(3D) \dots s^3 + qt + a \times s^2 + \overline{6t^2 + \gamma t + \delta} \times s' + \overline{\epsilon t^3 + \eta t^2 + \lambda t + \mu} \times s^0 = 0.$$

4.^o L'équation marquée ici par ($4D$) est de toutes les équations indéterminées du quatrième degré, qui n'ont que deux inconnues variables, celle qui est la plus générale.

$$(4D) \dots s^4 + qt + a \times s^3 + \overline{6t^2 + \gamma t + \delta} \times s^2 + \overline{\epsilon t^3 + \eta t^2 + \lambda t + \mu} \times s' + \overline{\nu t^4 + \rho t^3 + \pi t^2 + \phi t + \sigma} \times s^0 = 0.$$

5.^o L'équation marquée ($5D$) est de toutes les équations indéterminées du cinquième degré, celle qui est la plus générale.

$$(5D) \dots s^5 + qt + a \times s^4 + \overline{6t^2 + \gamma t + \delta} \times s^3 + \overline{\epsilon t^3 + \eta t^2 + \lambda t + \mu} \times s^2 + \overline{\nu t^4 + \rho t^3 + \pi t^2 + \phi t + \sigma} \times s' + \overline{\dots} \times s^0 = 0.$$

$$\frac{\varepsilon t^3 + \eta t^2 + \lambda t + \mu \times s^2 + \nu t^4 + \rho t^3 + \pi t^2 + \phi t + \sigma}{\times s^1 + A t^1 + B t^2 + C t^3 + D t^2 + E t + F \times s^0} = 0.$$

Tout cela est une suite nécessaire du Lemme précédent, & de l'article 26, lesquels donneront pareillement les Equations générales pour les 6^e, 7^e, 8^e & 9^e degrés, & enfin pour tel degré qu'on voudra.

COROLLAIRE II.

XXX. Il suit encore du Lemme précédent que l'équation marquée (*D*) exprime en général la nature de toutes les lignes algébriques du *n*^e ordre.

$$\frac{(D) \dots s^n + q t + a \times s^{n-1} + \frac{\varepsilon t^2 + \gamma t + \delta \times s^{n-2} + \varepsilon t^3 + \eta t^2 + \lambda t + \mu \times s^{n-3} + \nu t^4 + \rho t^3 + \pi t^2 + \phi t + \sigma}{\times s^{n-4} + \&c.} = 0.$$

Car il n'y a point de ligne particulière du *n*^e ordre, dont la nature ne puisse être exprimée par une équation du *n*^e degré: or il n'y a point d'équation du *n*^e degré qui ne puisse se rapporter à l'équation (*D*)*. Donc il n'y a point de ligne particulière du *n*^e ordre, dont la nature ne puisse se rapporter à l'équation (*D*); donc cette équation exprime en général la nature de toutes les lignes algébriques du *n*^e degré.

* Art. 28.

COROLLAIRE III.

XXXI. Donc l'équation marquée (*4 D*) exprime la nature de toutes les lignes algébriques du quatrième ordre.

$$\frac{(4 D) \dots s^4 + q t + a \times s^3 + \frac{\varepsilon t^2 + \gamma t + \delta \times s^2 + \varepsilon t^3 + \eta t^2 + \lambda t + \mu \times s + \nu t^4 + \rho t^3 + \pi t^2 + \phi t + \sigma}{\times s^0} = 0.$$

C'est une suite nécessaire du Lemme second & du corollaire précédent*; & il est inutile d'ajouter qu'on aura de même les Equations générales pour les Lignes du 5^{me}, 6^{me}, 7^{me} & 8^{me} ordre, & enfin pour tel ordre qu'on voudra, d'autant que cela se déduit trop clairement des art. 28 & 29.

* Art. 30.

REMARQUE.

REMARQUE.

XXXII. Il est aisé de s'appercevoir, 1.^o Que le nombre des termes des Equations générales marquées par $(1D)$, $(2D)$, $(3D)$, $(4D)$, $(5D)$, &c. de l'article 29, suit la progression marquée ici par (MM)

$$(MM) \dots \frac{1+2}{2}, \frac{1+2+3}{3}, \frac{1+2+3+4}{4},$$

$$\frac{1+2+3+4+5}{5}, \frac{1+2+3+4+5+6}{6},$$

$$\frac{1+2+3+4+5+6+7}{7}, \text{ \&c.}$$

Ensorte que la première équation $(1D)$, qui est pour les lignes du premier ordre, est composée de trois termes ; la seconde $(2D)$, qui est pour les lignes du second ordre, est composée de six termes ; la troisième $(3D)$, qui est pour les lignes du troisième ordre, est composée de dix termes ; la quatrième $(4D)$ est composée de quinze termes, & ainsi des autres à l'infini. 2.^o Que la progression (MM) est la suite des nombres triangulaires, en commençant par le second. D'où il suit que n étant pris pour le nombre qui exprime le degré d'une Equation générale quelconque, le nombre triangulaire, qui correspond dans le Triangle arithmétique de M. Pascal au nombre naturel $n+2$, donne toujours le nombre des termes qui doit être dans l'Equation générale d'une ligne du n^{e} ordre lorsqu'elle est complete. Or on sçait que le nombre triangulaire, qui correspond au nombre naturel $n+2$, est égal à $\frac{n+2 \cdot n+1}{2}$; donc cette quantité $\frac{n+2 \cdot n+1}{2}$ exprime toujours le nombre des termes de l'Equation générale des lignes du n^{e} ordre, lorsqu'elle est complete. 3.^o Il est aisé de voir que le nombre des coefficients $q, a, c, \gamma, \delta, \epsilon$, &c. dans chaque Equation générale, est égal au nombre des termes de l'équation moins un (puisque nous n'en avons point donné jusqu'ici au premier terme) ; d'où il suit que le nombre des coefficients de l'Equation générale des lignes du n^{e} ordre est $\frac{n+2 \cdot n+1}{2} - 1 = \frac{nn+3n}{2}$. Ce que

Mem. 1730.

. Aa

M. Stirling a remarqué avant nous, page 4 de son Traité, imprimé à Oxford en 1717.

PROPOSITION I.

THEOREME.

XXXIII. Une ligne du n^e ordre peut être rencontrée par une ligne droite en autant de points qu'il y a d'unités dans n , & ne le sçauroit être, par la même droite, en un plus grand nombre.

DÉMONSTRATION.

* Fig. 21. Soit sur un plan une ligne $ZMMNX_{2m}V^*$ de l'ordre n , dont l'axe soit GQ , & une ligne droite GM qui coupe la ligne ZMm en un point comme M : je dis que cette droite peut couper la ligne ZMm en autant d'autres points $2M$, $3M$, $4M$, $5M$, &c. qu'il y a d'unités dans $n-1$, c'est-à-dire, en autant de points qu'il y a d'unités dans n , en y comprenant le point M .

Car ayant pris sur GQ la partie $GI =$ à l'unité arbitraire; & après avoir mené du point I la droite IK , faisant avec l'axe GQ un angle quelconque KIG ; l'angle KGI étant connu par la supposition, on voit qu'il y a dans le triangle IKG deux angles & un côté GI qui sont connus; donc les deux autres côtés IK & KG seront connus. Donc après avoir pris $GI = 1$, on peut encore prendre $IK = h$, quantité connue & déterminée. Donc le rapport des ordonnées de la droite GM aux abscisses GQ (en nommant y ces ordonnées) sera $y = ht$.

Mais la courbe ZMm étant du n^e ordre, le rapport de ses ordonnées $MQ(s)$ aux abscisses $GQ(z)$ de son axe est exprimé par l'équation $(D)^*$

* Art. 27.
28.

$$(D) \dots s^n + qt + a \times s^{n-1} + \epsilon t^2 + \gamma t + \delta \times s^{n-2} + \epsilon t^3 + \eta t^2 + \lambda t + \mu \times s^{n-3} + \nu t^4 + \rho t^3 + \pi t^2 + \phi t + \sigma \times s^{n-4} + \&c. = 0$$

dans laquelle les coefficients $q, a, \epsilon, \gamma, \delta, \epsilon, \&c.$ sont des

grandeurs constantes, mais indéterminées à être de telle ou telle valeur, & à être affectées de tel ou tel signe.

Or toutes les fois que la droite GM rencontrera la courbe ZMm , les ordonnées (y) de cette droite QM deviendront égales aux ordonnées QM de la courbe ZMm , par conséquent on aura $QM(s) = y = ht$; & en substituant dans l'équation (D) au lieu de (s) cette valeur ht (pour avoir la valeur des abscisses $GQ(t)$ dans les endroits où la droite GM rencontre la courbe ZMm), on aura l'égalité marquée ici par (K), dont les racines donneront les valeurs des abscisses GQ aux points où la droite GM & la courbe ZMm se rencontrent.

$$(K) \dots \left\{ \begin{array}{l} + h^n \\ + g h^{n-1} \\ + \epsilon h^{n-2} \\ + \epsilon h^{n-3} \\ + \gamma h^{n-4} \\ + \&c. \end{array} \right\} t^n \left\{ \begin{array}{l} + \alpha h^{n-1} \\ + \gamma h^{n-2} \\ + \eta h^{n-3} \\ + \rho h^{n-4} \\ + \&c. \end{array} \right\} t^{n-1} \left\{ \begin{array}{l} + \delta h^{n-2} \\ + \lambda h^{n-3} \\ + \pi h^{n-4} \\ + \&c. \end{array} \right\} t^{n-2} \left\{ \begin{array}{l} + \mu h^{n-3} \\ + \phi h^{n-4} \\ + \&c. \end{array} \right\} t^{n-3} \left\{ \begin{array}{l} + \sigma h^{n-4} \\ + \&c. \end{array} \right\} t^{n-4} + \&c. = 0.$$

Or il est visible qu'il peut y avoir dans cette égalité autant de racines réelles qu'il y a d'unités dans l'exposant n du premier terme, sans qu'il puisse y en avoir un plus grand nombre; donc il peut y avoir autant d'abscisses GQ , G_2Q , G_3Q , G_4Q , &c. communes à la droite GM & à la courbe ZMm , qu'il y a d'unités dans n , & il ne sçauroit y en avoir davantage. Donc la ligne droite GM peut couper la courbe ZMm du n^e ordre en autant de points qu'il y a d'unités dans n , & ne sçauroit la couper en un plus grand nombre. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

XXXIV. Donc, 1.^o les lignes du second ordre, c'est-à-dire, les sections coniques peuvent être rencontrées en deux points par une même ligne droite, sans pouvoir l'être en un plus grand nombre, ce que l'on sçait d'ailleurs être vrai.

2.^o Les lignes du troisième ordre peuvent être rencontrées

A a ij

188 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 en trois points par une même ligne droite, sans pouvoir l'être
 en un plus grand nombre de points.

3.^o Les lignes du quatrième ordre peuvent être rencontrées
 en quatre points par une même ligne droite, & ne
 sçauroient l'être en un plus grand nombre.

4.^o Celles du cinquième ordre peuvent être rencontrées
 en cinq points par une même ligne droite, celle du sixième
 ordre en six points, celles du septième en sept points, &
 ainsi des autres à l'infini.

COROLLAIRE II.

* Fig. 22. XXXV. Si par un point M simple*, double, triple;
 quadruple, &c. d'une ligne quelconque ZMN , on a mené
 une droite MG tangente de la courbe en ce point M , la-
 quelle étant prolongée ait été rencontrée en G sous un angle
 connu MGQ par une autre droite GQ , sur laquelle on ait
 abaissé de tous les points M, N, Z , de la courbe ZMN ,
 des droites parallèles entr'elles comme MQ, NQ , &c. fai-
 sant avec GQ des angles connus MGQ . Il est visible,

1.^o Qu'en nommant les abscisses GQ (t) & les ordonnées
 QM ou QN (s), le rapport des abscisses aux ordonnées
 * Art. 30. sera exprimé en général par l'équation (D)*, supposé que la
 courbe soit une ligne algébrique du n^e ordre.

$$(D) \dots s^n + qt + a \times s^{n-1} + \frac{6t^2 + \gamma t + \delta \times s^{n-2} +}{\epsilon t^3 + \eta t^2 + \lambda t + \mu \times s^{n-3} + \nu t^4 + \rho t^3 + \pi t^2 + \phi t + \sigma} \times s^{n-4} + \&c. = 0.$$

2.^o Il n'est pas moins évident que GI étant prise pour
 l'unité arbitraire, & IK ligne droite connue (puisque dans
 le triangle IGK il y a deux angles IGK, KGI , & un côté
 IG qui sont donnés) IK , dis-je, étant nommée h , l'égalité
 marquée par (K) donnera les valeurs des abscisses GQ, G_2Q ,
 &c. communes à la droite GM & à la courbe ZMN , aux
 points où cette droite rencontre la courbe.

$$(K) \dots \left\{ \begin{array}{l} + h^n \\ + g h^{n-1} \\ + f h^{n-2} \\ + e h^{n-3} \\ + d h^{n-4} \\ + \&c. \end{array} \right\} t^n \left\{ \begin{array}{l} + a h^{n-1} \\ + \gamma h^{n-2} \\ + \eta h^{n-3} \\ + \rho h^{n-4} \\ + \&c. \end{array} \right\} t^{n-1} \left\{ \begin{array}{l} + \delta h^{n-2} \\ + \lambda h^{n-3} \\ + \pi h^{n-4} \\ + \&c. \end{array} \right\} t^{n-2} \left\{ \begin{array}{l} + \mu h^{n-3} \\ + \phi h^{n-4} \\ + \&c. \end{array} \right\} t^{n-4} + \&c. = 0.$$

3.^o Il est certain aussi * qu'il y aura dans cette égalité au moins deux racines égales, puisqu'on a supposé la droite GM tangente en M de la courbe ZMN : si le point touchant M de la courbe est une inflexion de la seconde espèce, il y aura, dans l'égalité (K) quatre racines égales entre elles * ; si au point touchant M il y a une inflexion de la quatrième espèce, l'égalité (K) aura six racines égales : & ainsi des autres points d'inflexion invisibles à l'infini. * Art. 8. n. 2. * Art. id. n. 4.

4.^o Si le point touchant M est une inflexion ordinaire, il y aura *, dans l'égalité marquée par (K) , trois racines égales : si le point d'inflexion est de la troisième espèce, il y aura cinq racines égales dans l'égalité (K) ; si ce point d'inflexion est de la cinquième espèce, il y aura dans l'égalité (K) sept racines égales, & ainsi des autres points d'inflexion visibles d'espèces supérieures. * Art. id. n. 3.

5.^o Si le point touchant M est un point double de la première espèce, il y aura * dans l'égalité marquée par (K) trois racines égales & de même signe : si la branche touchée par la droite GM est accompagnée d'une inflexion de la seconde espèce au point double M , il y aura dans l'égalité (K) cinq racines égales & de même signe : si l'inflexion est de la quatrième espèce, il y aura sept racines égales & de même signe, & ainsi des autres points d'inflexion invisibles à l'infini qui se confondroient avec un point double. * Art. 19. n. 1.

6.^o Si le point touchant M est un point double de la seconde ou troisième espèce, il y aura * dans l'égalité marquée par (K) quatre racines égales & de même signe, supposé que l'inflexion de la branche touchée par la droite GM soit une inflexion de la première espèce. Si cette inflexion est de la troisième espèce, il y aura dans l'égalité marquée par * Art. id. n. 2.

(*K*) six racines égales entre elles : & ainsi des autres points d'inflexion visibles d'espèces supérieures qui se confondent avec des points doubles.

7.^o Si le point touchant *M* est un point triple de la première espèce, il y aura * dans l'égalité (*K*) quatre racines égales & de même signe, six, huit, dix, &c. si ce point triple est accompagné d'une inflexion invisible de la branche touchée par la droite *GM*. Si la branche touchée par la droite *GM* a une inflexion visible au point triple *M*, c'est-à-dire, si le point triple *M* est de la seconde, troisième ou quatrième espèce, l'égalité (*K*) aura cinq, sept ou neuf racines égales & de même signe, selon que cette inflexion, qui se confond avec le point triple *M*, sera de la première, troisième ou cinquième espèce.

8.^o Si le point touchant *M* est un point quadruple de la première espèce, il y aura * dans l'égalité marquée par (*K*) au moins cinq racines égales & de même signe, ou sept, ou neuf, ou onze, selon que le point touchant *M* sera sans inflexion, ou avec une inflexion de la seconde, quatrième, ou sixième espèce, & ainsi de suite pour les autres inflexions invisibles qui pourroient accompagner le point quadruple ; si le point touchant *M* est un point quadruple accompagné d'une inflexion visible de la branche touchée par *GM*, c'est-à-dire, si le point quadruple *M* est de la seconde, troisième, quatrième, ou cinquième espèce, il y aura dans l'égalité marquée par (*K*) au moins six racines égales & de même signe, ou huit, ou dix, ou douze, si l'inflexion qui se trouve au point quadruple est de la troisième, cinquième, ou septième espèce.

Enfin il est aisé de voir combien il doit y avoir de racines égales & de mêmes signes dans l'égalité marquée par (*K*), lorsque le point touchant *M* est un point quintuple, sextuple, & ainsi des autres points multiples d'un ordre supérieur.

COROLLAIRE III.

XXXVI. De tout ceci il est aisé de conclurre, 1.^o Que

les lignes du second ordre ne sçauroient avoir ni points d'inflexions, ni points doubles : car quand la ligne ZMN est du second ordre, l'égalité (K) est du second degré ; d'où il suit qu'elle ne sçauroit avoir trois racines égales. 2.° Que les lignes du second ordre n'ont ni points triples, ni points quadruples, en un mot que tous leurs points sont simples. *C'est une vérité connue depuis long-temps, mais que j'ai crû devoir remettre devant les yeux pour faire voir la liaison de cette théorie avec les vérités déjà connues.*

COROLLAIRE IV.

XXXVII. Il suit encore de l'art. 35, 1.° Que les lignes du troisième ordre peuvent avoir des points d'inflexion de la première espece, & des points doubles de la première espece, & par conséquent des points de rebroussement & des points conjugués : mais qu'elles ne sçauroient avoir ni inflexions de la seconde, troisième ou quatrième espece, ni points doubles de la seconde & troisième espece, ni points triples, ni aucuns points multiples au dessus du point double. 2.° Que les lignes du quatrième ordre peuvent avoir des points d'inflexion de la première & seconde espece : des points doubles de toutes les especes, & des points triples de la première espece : mais qu'elles ne sçauroient avoir ni points triples de la seconde, troisième ou quatrième espece, ni point quadruple, ni aucun point multiple supérieur au point triple. 3.° Que les lignes du cinquième ordre peuvent avoir des points quadruples de la première espece : des points triples de la seconde, troisième & quatrième espece, & à plus forte raison des points triples de la première espece : des points doubles des trois especes que nous avons marquées, & des inflexions de la première, seconde & troisième espece : mais qu'elles ne sçauroient avoir ni points quadruples de la seconde, troisième, quatrième ou cinquième espece, ni points quintuples, ni aucun point multiple supérieur au point quadruple de la première espece. 4.° Que les lignes du sixième ordre peuvent avoir des points quintuples de la première espece, ou des points

quadruples de la seconde, troisième, quatrième & cinquième espece, & à plus forte raison des points quadruples de la première espece : des points triples & des points doubles de toutes les especes. 5.° Enfin que les lignes de l'ordre exprimé par l'exposant n peuvent avoir des inflexions dont l'espece soit exprimée par $n - 2$; à plus forte raison de celles dont l'espece est exprimée par $n - 3$, $n - 4$, $n - 5$, &c. Qu'elles peuvent avoir des points multiples dont la multiplicité est exprimée par $n - 1$, mais seulement de la première espece : qu'elles peuvent avoir de toutes les especes de points multiples, dont la multiplicité est exprimée par $n - 2$, $n - 3$, $n - 4$, &c. mais qu'elles ne sçauroient avoir de points multiples dont la multiplicité soit exprimée par n .

COROLLAIRE V.

XXXVIII. Il n'est pas moins évident que les lignes algébriques de l'ordre n peuvent être coupées par leurs tangentes en un point simple M , ou par leurs sécantes en un point double, en autant de points simples, autres que le point d'attouchement, ou autres que le point double en autant de points, dis-je, qu'il y a d'unités dans $n - 2$. Ainsi 1.° les lignes du second ordre, ou les sections coniques, ne sçauroient être coupées par leurs tangentes en aucun point, vérité connue depuis long-temps. 2.° Les tangentes en un point simple, ou les sécantes en un point double des lignes du troisième ordre, peuvent couper leurs courbes en un autre point. 3.° Les tangentes en un point simple, ou les sécantes en un point double des lignes du quatrième ordre, peuvent couper leurs courbes en deux autres points simples, ou en un autre point double. D'où il suit que les lignes du quatrième ordre peuvent avoir deux points doubles sur la même ligne droite sécante de la courbe à l'un & à l'autre point double.

COROLLAIRE VI.

XXXIX. Les lignes algébriques du n^e ordre peuvent
être

être coupées par leurs asymptotes rectilignes en autant de points qu'il y a d'unités dans $n - 2$; c'est encore une suite de l'art. 35. Ainsi 1.° Les asymptotes rectilignes des lignes du troisième ordre ne peuvent couper leur courbe qu'en un seul point ; Celles des lignes du quatrième ordre ne peuvent couper leur courbe qu'en deux points ; Celles des lignes du cinquième en trois points ; Celles du sixième en quatre, & ainsi de suite. 2.° Les lignes du quatrième ordre peuvent être touchées en un point simplement simple, ou coupée en un point double par leurs asymptotes rectilignes ; Celles du cinquième ordre peuvent être touchées en un point d'inflexion de la première espèce, ou en un point double, ou bien coupées en un point triple par leurs asymptotes rectilignes ; Celles du sixième ordre peuvent être touchées en un point d'inflexion de la seconde espèce, ou en un point triple, ou coupées en un point quadruple par leurs asymptotes rectilignes, & ainsi des autres.

COROLLAIRE VII.

XL. Il suit encore des articles 33 & 35, que les tangentes en un point d'inflexion de la première espèce, ou les tangentes en un point double de la première espèce, ou les sécantes en un point triple des lignes algébriques du n^e ordre peuvent couper leurs courbes en autant d'autres points différents du point d'inflexion, ou du point double, ou du point triple, qu'il y a d'unités dans $n - 3$. D'où il suit, 1.° Que les tangentes au point d'inflexion, ou au point double d'une ligne du troisième ordre, ne sauroit rencontrer cette ligne en d'autres points. 2.° Que les tangentes au point d'inflexion, ou au point double de la première espèce, ou bien les sécantes au point triple d'une ligne du quatrième ordre, ne peuvent que couper cette ligne en un autre point simple, sans pouvoir la toucher en un autre point simplement simple, ni la couper en un autre point double, ni lui être asymptote. 3.° Que les tangentes au point d'inflexion de la première espèce, ou les tangentes au point double de la première

espece, ou les sécantes en un point triple des lignes du cinquième ordre, peuvent couper leur courbe en deux autres points simples, ou en un autre point double, ou la toucher en un autre point simplement simple.

COROLLAIRE VIII.

XLII. Il suit encore des mêmes articles 33 & 35, que la tangente à l'inflexion de la seconde espece, & les tangentes en un point double de la seconde ou troisième espece, ou bien les tangentes en un point triple, ou enfin les sécantes en un point quadruple des lignes algébriques du n^e ordre, ne peuvent couper leur courbe qu'en autant d'autres points qu'il y a d'unités dans $n - 4$. D'où il suit 1.^o Que la tangente à l'inflexion de la seconde espece, ou les tangentes en un point double de la seconde & troisième espece, ou bien les tangentes en un point triple des lignes du quatrième ordre, ne sçauroient rencontrer leur courbe en aucun autre point. 2.^o Que la tangente à l'inflexion de la seconde espece, ou les tangentes en un point double de la seconde & troisième espece, ou les tangentes en un point triple, ou les sécantes en un point quadruple des lignes du cinquième ordre, peuvent couper leur courbe en un autre point simple. 3.^o Que les tangentes en ces différents points des lignes du sixième ordre peuvent couper leur courbe en deux autres points simples, ou en un autre point double, ou les toucher en un autre point simplement simple.

COROLLAIRE IX.

XLII. Il n'est pas moins évident que les lignes du troisième ordre ne sçauroient avoir qu'un seul point double. Car

* Fig. 24.

soient M & N * ces deux points doubles d'une ligne du troisième ordre : par les premiers principes de la Géométrie, ces deux points peuvent être unis par une même ligne droite MN . Soit prolongée cette droite jusqu'à ce qu'elle rencontre en G une autre droite GQ , que l'on prendra pour l'axe de la courbe : cela fait de chaque point double M & N , on

abaissera sur cet axe les ordonnées MQ , NP , alors l'abscisse GQ sera au moins deux fois commune à la courbe ZMN & à la droite GN ; de même l'abscisse GP sera au moins deux fois commune à la même courbe ZMN & à la même droite GN , en sorte que dans l'égalité marquée par (K) dans l'art. 33, il y aura deux racines égales pour l'abscisse GQ , & deux autres racines égales pour l'abscisse GP . Donc il y aura quatre racines dans l'égalité marquée par (K) : or il implique qu'il y ait quatre racines dans cette égalité, lorsque la courbe ZNM n'est qu'une ligne du troisième ordre (puisque cette égalité n'est alors que du troisième degré, n y étant $= 3$). Donc il implique qu'il y ait deux points doubles dans une même ligne du troisième ordre. Donc, &c.

COROLLAIRE X.

XLIII. Une ligne du quatrième ordre ne sauroit avoir qu'un seul point triple; car s'il étoit possible qu'elle en eût deux, on prouveroit, par un raisonnement semblable à celui de l'article précédent, que l'égalité marquée par (K) dans l'art. 33, pourroit avoir six racines, lorsque la courbe, dont GM est sécante, n'est que du quatrième ordre, ce qui impliqueroit contradiction, puisque l'égalité (K) ne sauroit être alors que du quatrième degré. Donc, &c.

COROLLAIRE XI.

XLIV. On prouvera de même que les lignes du quatrième ordre qui ont un point triple, ne sauroient avoir de points doubles; car si cela étoit possible, il s'en suivroit que l'égalité marquée par (K) dans l'art. 33, auroit cinq racines, ce qui impliqueroit contradiction, puisque cette égalité ne sauroit être que du quatrième degré, lorsque la courbe n'est qu'une ligne du quatrième ordre.

S C H O L I E S.

XLV. Il sera aussi aisé de prouver, 1.^o Que les lignes du 5.^{me} ordre ne peuvent avoir qu'un seul point quadruple,

& que celles qui ont un point quadruple ne sçauroient avoir ni points triples, ni points doubles. 2.^o Que les lignes du sixième ordre ne peuvent avoir qu'un seul point quintuple, & que celles qui ont un point quintuple ne sçauroient avoir ni points quadruples, ni points triples, ni points doubles. 3.^o Enfin que les lignes algebriques de l'ordre n , ne peuvent avoir qu'un seul point multiple, dont la multiplicité soit exprimée par $n - 1$, & que celles qui ont un point multiple, dont la multiplicité est exprimée par $n - 1$, ne sçauroient avoir d'autres points multiples.

Enfin, suivant la même théorie, on prouvera encore, 1.^o Que les lignes du cinquième ordre, qui ont des points triples, peuvent avoir des points doubles. 2.^o Que les lignes du sixième ordre, qui ont des points quadruples, peuvent avoir des points doubles, & ne sçauroient avoir de points triples, mais que celles de cet ordre qui ont des points triples, peuvent avoir des points doubles. 3.^o Que les lignes du septième ordre, qui ont des points quintuples, peuvent avoir des points doubles, & ne sçauroient avoir ni points quadruples, ni points triples. 4.^o Enfin que les lignes du n^e ordre, qui ont des points multiples de l'ordre $n - 2$, ne peuvent avoir que des points doubles : que les lignes de l'ordre n qui ont des points multiples, dont la multiplicité est exprimée par $n - 3$, ne peuvent avoir que des points triples & des points doubles : que celles de cet ordre qui ont des points multiples de l'ordre $n - 4$, ne peuvent avoir que des points quadruples, ou des points triples, ou des points doubles, & ainsi des autres à l'infini, tous les autres points de ces courbes étant des points simples.

R E M A R Q U E.

XLVI. Les différentes tangentes en ces points doubles, triples, quadruples, &c. se trouvent toujours par la méthode des Tangentes que M. le Marquis de l'Hôpital a expliquée dans l'analyse des Infiniment petits, mais il faut y appliquer les règles de différentiation contenues dans l'article 163 de

cette même analyse, dans un Mémoire du célèbre M. Bernoulli, imprimé dans les Journaux de Leipzig de l'année 1704, & dans différents ouvrages d'un des principaux Géomètres * de cette Compagnie, imprimés, les uns dans * M. Savin, les Journaux des Sçavants, les autres dans les Mémoires de l'Académie, pour les cas auxquels le numérateur & le dénominateur de la fraction qui exprime le rapport de l'ordonnée à la soustangente deviennent nuls : car cela arrive, lorsque le point, dont on cherche la tangente, est double, triple, quadruple, &c. & l'on est obligé de différentier deux fois selon ces méthodes, pour trouver le rapport de l'ordonnée à la soustangente, lorsque le point est double : trois fois, lorsqu'il est triple : quatre fois, lorsqu'il est quadruple, & ainsi de suite pour les autres points multiples. M. de Fontenelle en a donné la raison dans son excellent Traité de la Géométrie de l'Infini, art. 1266 & 1267, & on peut même la déduire des principes qui ont été établis dans ce Mémoire, ainsi je me contente de renvoyer aux ouvrages des Géomètres dont je viens de parler.

PROPOSITION II.

THEOREME.

XLVII. *Les lignes algébriques du n^e ordre*, peuvent être * Fig. 21. coupées par une ligne droite, parallèle à leur axe, en autant de points qu'il y a d'unités dans le plus haut exposant de la variable (t) qui dénote les abscisses GQ de son axe G5q; & par une ligne droite QM parallèle à son ordonnée principale GL, en autant de points qu'il y a d'unités dans le plus haut exposant de la variable (s) qui dénote les abscisses GE de cette ordonnée principale GL.*

Cette Proposition se démontre de la même manière que celle de l'article 33, & on en déduit aisément les mêmes conséquences, ainsi je ne m'y arrête pas davantage pour ne pas tomber dans des répétitions.

D É F I N I T I O N X V.

XLVIII. Je nommerai dans la suite *racine double*, celle qui dans une égalité quelconque est équivalente à deux racines de cette égalité : telle est la racine $(-a)$ dans l'égalité du troisième degré $x^3 + 4axx + 5a^2x + 2a^3 = 0$; & *racine simple*, celle qui dans une égalité quelconque n'est point répétée : telle est la racine $(-2a)$ dans cette même égalité du troisième degré. Je nommerai *racine triple*, celle qui dans une égalité quelconque est équivalente à trois racines de cette même égalité : telle est la racine $(-a)$ dans l'égalité $x^4 + 5ax^3 + 9a^2xx + 7a^3x + 2a^4 = 0$. De même je nommerai *racine quadruple*, celle qui dans une égalité quelconque est équivalente à quatre racines de cette même égalité, & ainsi des autres racines multiples à l'infini.

R E M A R Q U E.

XLIX. Si par un point quelconque M d'une ligne $ZMDMN$, &c. * de l'ordre n , dont la nature est exprimée par l'Equation générale de l'art. 30, marquée par $(D)^*$, on mène deux droites QM , EM , la première parallèle à l'ordonnée principale GL , la seconde parallèle à l'axe GQ , l'une & l'autre prolongées à l'infini, s'il est nécessaire, de part & d'autre du point M , & qui rencontrent, la première l'axe GQ en Q , la seconde l'ordonnée principale GL en E : cela fait, si l'on nomme la droite, prise à discrétion, $GQ(R)$, & la droite QM ou $GE(g)$, si l'on substitue 1.^o dans l'équation marquée par (D) , au lieu de l'indéterminée (t) , sa valeur (R) , il est visible qu'on aura l'égalité marquée par $(L)^*$, dont les racines donneront les points M , $3N$, $2N$, N , &c. où la droite QM coupe la courbe $ZMDMNX2mV$. 2.^o Si l'on substitue dans cette même équation, marquée par (D) , au lieu de l'indéterminée (s) , sa valeur $GE = g$, il est constant qu'on aura l'égalité marquée par $(A)^*$, dont les racines donneront les points M , m , $2m$, $3m$, $4m$, $5m$, &c. où la droite EM rencontre la courbe $ZMDMNX2mV$.

* Fig. 21.
35. & 36.

* Voyés la
Table à la fin
de ce Mémoire.

* V. la même
Table.

* V. la même
Table.

Il est constant aussi que l'abscisse GQ (R) sera une des racines réelles de l'égalité marquée par (A), & que l'abscisse GE (g) sera une des racines réelles de l'égalité marquée par (L), si le point M est un des points de la courbe $ZMDMNX_{2m}V$, comme on l'a supposé.

Si l'on a besoin de transporter l'origine des abscisses de G en M , il est constant, par les premiers principes de l'application de l'Algebre à la Géométrie, qu'il n'y a qu'à supposer $z = t - R$ & $u = s - g$, ou bien $t = z + R$ & $s = u + g$: car en substituant ces valeurs de t & de s dans l'équation de la courbe marquée par (D), on aura une équation semblable à celle que l'on voit dans la Table, marquée par (Δ), dans laquelle les coefficients Q, A, B, C, D, E, F, G , &c. seront donnés en $q, a, c, \gamma, \delta, \epsilon, n, \lambda$, &c. & en g & en R . Or il est visible que cette dernière équation exprime encore la nature de la courbe $ZMDMNX_{2m}V$ par rapport à des coordonnées MP, PM , qui ont leur origine commune en M , & qui sont paralleles aux premières GQ, QM .

Si par les points G & M on mene la droite GM , il est évident, par l'art. 33, que cette droite peut rencontrer la courbe en autant de points qu'il y a d'unités dans l'exposant n , en y comprenant les points doubles pour deux points simples, les points triples pour trois points simples, & ainsi des autres points multiples. Cela supposé, si l'on prend $GI = 1$ & $IK = h$ (en supposant toujours IK parallele aux ordonnées) on trouvera l'égalité marquée dans la Table par ($2K$) de même qu'on a trouvé ci-devant * l'égalité marquée par (K): mais à cause des triangles semblables GIK, GQM , on aura ici $h = \frac{g}{R}$; de plus puisque les coefficients Q, A, B, C, D, E, F , &c. sont donnés en $q, a, c, \gamma, \delta, \epsilon$, &c. & en g & en R , & que g & R sont donnés même en $q, a, c, \gamma, \delta, \epsilon$, &c. il est visible qu'il n'y aura dans l'égalité ($2K$) aucun coefficient qui ne soit connu par rapport aux coefficients de l'équation primitive marquée par (D).

* Art. 33.

Maintenant si par le point M , on mene une droite $M\omega$, faisant avec MP un angle quelconque ωMP , mais différent de l'angle connu MGQ , cette droite pourra encore rencontrer la courbe $ZMDMNX_2mV$ en autant de points qu'il y a d'unités dans l'exposant n , en y comprenant les points doubles pour deux points simples, les points triples pour trois points simples, & ainsi des autres. Cela posé, si l'on prend $MI = GI = 1$, & si l'on nomme l la droite ll parallèle aux ordonnées P_5M , il est visible que de même qu'on a trouvé dans les art. 33 & 35, l'égalité marquée par (K) , on trouvera ici l'égalité marquée dans la Table par $(3K)$, dont les racines réelles donneront les points d'intersection de la courbe & de la droite $M\omega$.

Les choses étant telles qu'on vient de les exposer, il est visible que dans les égalités marquées par $(2K)$ & par $(3K)$, il y aura un certain nombre de racines réelles égales à zero, selon que le point M sera ou un point simple, ou un point multiple, puisque l'origine des coordonnées MP (z) P_5M (u) est en M .

C O R O L L A I R E I.

L. Il suit de la remarque précédente, & de tout ce qu'on a dit jusqu'ici, 1.° Que le point M n'est qu'un point simple de la courbe $ZMNX_2MV$, lorsque l'une des deux racines $GQ(R)^*$ ou $GE(g)$ est une racine simple, la première de l'égalité (A) , la seconde de l'égalité marquée par (L) , ce qui est connu de tout le monde. 2.° Que la droite QM^* est tangente, & la droite EM sécante de la courbe au point M , lorsque $GE(g)$ est une racine double de l'égalité marquée par (L) , tandis que $GQ(R)$ n'exprime qu'une racine simple de l'égalité marquée par (A) . 3.° Qu'au point M de la courbe ZMV^* , il y a une inflexion parallèle à l'ordonnée principale GL , lorsque $GE(g)$ est une racine triple de l'égalité (L) , tandis que $GQ(R)$ n'est qu'une racine simple de l'égalité (A) . 4.° Qu'au point M de la courbe ZMV^* , il y a une inflexion de la seconde espèce à laquelle QM est tangente,

* Voyez la Table à la fin de ce Mémoire.

* Fig. 21. bis.

* Fig. 22. bis.

* Fig. 21. bis.

tangente, lorsque $GE (g)$ est une racine quadruple de l'égalité (L) , tandis que $GQ (R)$ n'est qu'une racine simple de l'égalité (A) . 5.° Enfin, il est évident que quand $GQ (R)$ n'exprime qu'une racine simple de l'égalité marquée par (A) , tandis que $GE (g)$ exprime une racine multiple quelconque de l'égalité (L) , il est, dis-je, évident que le point M n'est qu'un point simple de la courbe ZMV , ou sans inflexion ou avec inflexion visible ou invisible : quand la racine multiple $GE (g)$ est impaire, le point M est avec une inflexion visible ; quand elle est pair il est avec une inflexion invisible.

COROLLAIRE II.

LI. Il suit encore de tout ce qui a été dit jusqu'ici, que le point M est un point double, quand $GQ (R)$ * exprime une racine double de l'égalité (A) , tandis que $GE (g)$ exprime une racine double ou plus que double de l'égalité (L) . 1.° Si $GE (g)$ n'est qu'une racine double, les droites EM & QM sont sécantes au point double M *. 2.° Si $GE (g)$ est une racine triple, la droite EM demeurant sécante au point double M , la droite QM est tangente de la courbe en ce même point double M *. 3.° Si $GE (g)$ est une racine quadruple, le point double M est de la seconde ou troisième espèce, & la droite QM est tangente en M de la branche qui a une inflexion au point double M *. 4.° Si $GE (g)$ est une racine quintuple de l'égalité (R) , $GQ (R)$ n'étant toujours qu'une racine double de l'égalité (A) , le point double M est de la première espèce, mais la branche à laquelle QM est tangente en M , a une inflexion de la seconde espèce en ce même point double M *, & ainsi des autres.

* V. la Table
à la fin de ce
Mémoire.

* Fig. 25.
& 26.

* Fig. 27.

* Fig. 28.

* Fig. 27.

REMARQUE.

LII. Les points doubles de la première espèce, dont on a parlé dans l'article précédent, peuvent être sans rebroussement ou avec rebroussement, ou bien ils peuvent n'être que des ovales infiniment petites. Après s'être assuré par le
Mem. 1730.

. C c

Corollaire précédent que le point M est un point double de la première espèce, on connoîtra si ce point double est ou un point d'intersection, ou un point de rebroussement, ou une ovale infiniment petite, en cherchant les tangentes de la courbe en ce point par la méthode de l'analyse des Infinitement petits, jointe aux remarques, dont M.^{rs} Bernoulli, Saurin & de Fontenelle l'ont enrichie : car la seconde différentiation de l'équation de la courbe marquée par (D) donnera une double valeur réelle de $\frac{ds}{dt}$ (c'est-à-dire, un double rapport réel de l'élément de l'ordonnée à l'élément de l'abscisse), si le point double M est un point d'intersection, au lieu que cette seconde différentiation ne donnera qu'une seule valeur de $\frac{ds}{dt}$, si le point M est un point de rebroussement, parce que les deux tangentes au point double M tomberont alors exactement l'une sur l'autre *.

* Art. 20.
 21.

Enfin cette seconde différentiation ne donnera que des valeurs imaginaires de $\frac{ds}{dt}$, si le point double M est une ovale infiniment petite, parce qu'une ovale infiniment petite ne sçauroit avoir de tangentes *. Il n'y a personne qui ne puisse éprouver, par des exemples connus, la vérité de cette règle : ainsi, sans m'arrêter à en donner ici des exemples qui seront assez fréquents dans la suite de ce Traité, je vais continuer cette Théorie.

* Art. id.

COROLLAIRE III.

LIII. Il suit encore de tout ce qu'on a dit jusqu'ici, 1.^o Que quand $GQ (R)$ * & $GE (g)$ sont l'une & l'autre des racines triples, la première de l'égalité (A) , la seconde de l'égalité (L) , il suit, dis-je, que le point M est ou un point double auquel QM & EM sont tangentes, ou un point triple auquel QM & EM sont sécantes. Dans cette circonstance, il est visible * qu'on connoîtra si le point M est double ou triple par le moyen de l'égalité marquée $(2K)$, car si le point M n'est qu'un point double, l'égalité marquée par $(2K)$ n'aura que deux racines égales à zero, s'il est triple,

* V. la Table
 à la fin de ce
 Memoire, & les
 Fig. 29. &
 30.

* Art. 49.

elle en aura trois. 2.^o L'abscisse $GQ(R)$ étant toujours une racine triple de l'égalité (A) , si $GE(g)$ est une racine quadruple, quintuple, sextuple, &c. & que l'égalité $(2K)$ n'ait que deux racines égales à zero, le point M^* n'est toujours qu'un point double, mais tel que la branche à laquelle QM est tangente a toujours une inflexion visible ou invisible précisément au point M où se fait l'intersection des deux branches. * Fig. 31. & 29.

3.^o L'abscisse $GQ(R)$ étant toujours une racine triple de l'égalité (A) , & $GE(g)$ une racine quadruple, quintuple, sextuple, &c. de l'égalité (L) , si l'égalité $(2K)^*$ a trois racines égales à zero, le point multiple M est toujours un point triple, auquel EM & GM sont sécantes, tandis que QM est tangente d'une branche qui n'a point d'inflexion, si $GE(g)$ est une racine quadruple : ou qui a une inflexion de la première espece en M^* , si $GE(g)$ est une racine quintuple : ou une inflexion de la seconde espece en M^* , si $GE(g)$ est une racine sextuple, & ainsi de suite. * Fig. 33. * Fig. 32.

R E M A R Q U E.

LIV. Après s'être assuré, par le Corollaire précédent, que le point M est un point triple, on connoîtra si ce point triple est une intersection de trois branches de la courbe, ou s'il est accompagné d'un rebroussement, ou s'il est produit par l'adhésion d'une ovale infiniment petite sur une des branches de la courbe, en différentiant trois fois (selon les méthodes de M.^{rs} Bernoulli & Saurin) l'équation qui exprime la nature de la courbe : car la troisième différentiation donnera trois valeurs de $\frac{ds}{dt}$, c'est-à-dire, trois valeurs réelles du rapport de l'ordonnée QM à la soutangente, si le point est un point d'intersection de trois branches, puisqu'il y a trois tangentes réelles au point M^* ; mais des trois valeurs réelles de $\frac{ds}{dt}$, il y en aura deux égales entr'elles, si le point triple M est accompagné de rebroussement, puisqu'il doit y avoir alors deux des trois tangentes qui tombent exactement

- * Art. 22. l'une sur l'autre *; enfin la troisieme différentiation ne donnera qu'une seule valeur réelle & deux valeurs imaginaires de $\frac{ds}{dt}$, si le point triple M est produit par l'adhésion d'une ovale infiniment petite, puisque dans cette dernière circonstance il ne doit y avoir qu'une seule tangente réelle au point triple M , les deux autres devenant imaginaires *.
- * Art. id.

COROLLAIRE IV.

LV. Il suit encore de tout ce qui a été dit ci-dessus. Que

* V. la Table
à la fin de ce
Mémoire.

- quand $GQ(R)$ & $GE(g)$ * sont l'une & l'autre des racines quadruples, la première de l'égalité (A) , la seconde de l'égalité (L) , il suit, dis-je, que le point M est 1.^o ou un point double de la troisieme espece *, auquel QM & EM sont tangentes, ou 2.^o un point triple* auquel QM & EM sont tangentes, ou 3.^o un point quadruple auquel QM & EM sont sécantes *. Dans ces circonstances il est visible que se sont les égalités $(2K)$ & $(3K)$ qui doivent déterminer la nature du point multiple M ; car si l'égalité $(2K)$ n'a que deux racines égales à zero, il est clair que le point M n'est qu'un point double de la troisieme espece; si cette égalité $(2K)$ a trois racines égales à zero, le point M est un point triple; mais si l'égalité $(2K)$ a quatre racines égales à zero, le point M peut être, ou un point triple *, auquel GM seroit tangente, aussi-bien que les droites QM, EM ; ou bien un point quadruple * auquel GM seroit sécante, aussi-bien que les deux autres droites QM, EM . Dans cette dernière circonstance, si l'égalité $(3K)$ a trois racines égales à zero, le point M n'est qu'un point triple; si elle a quatre racines égales à zero, c'est un point quadruple auquel QM, EM, GM & $M\omega$ sont sécantes; si l'égalité $(3K)$ a cinq racines égales à zero, le point multiple M est encore un point quadruple auquel QM, EM & GM sont sécantes, tandis que $M\omega$ est la tangente d'une des branches qui produisent le point quadruple: si l'égalité marquée par $(3K)$ a six racines égales à zero, ou sept, ou huit, ou neuf, &c. le point multiple M

est toujours un point quadruple auquel QM , EM & GM sont sécantes, & $M\omega$ tangente, mais la branche à laquelle $M\omega$ est tangente a une inflexion visible ou invisible précisément au point M où se fait l'intersection, & c'est une inflexion visible, si les racines de l'égalité ($3K$) qui sont égales à zero, sont au nombre de six, huit, dix, douze, &c. & c'est une inflexion invisible, si ces égalités sont en nombres impairs sept, neuf, onze, &c.

S C H O L I E.

LVI. De tout ce qui vient d'être dit, il est aisé de déduire une théorie générale pour connoître si un point donné M d'une ligne algébrique donnée $ZMNX_2mV$ est 1.° un point simple, double, triple, quadruple, quintuple, &c. 2.° De quelle espèce de multiplicité il est : s'il est double de la première, seconde ou troisième espèce : s'il est triple de la première, seconde, troisième ou quatrième espèce : s'il est quadruple de la première, seconde, troisième, quatrième ou cinquième espèce : & ainsi des autres points multiples à l'infini. 3.° Si c'est un nœud, ou un point de rebroussement, ou une ovale infiniment petite ; si outre le nœud, il y a un point de rebroussement de deux autres branches, ou s'il y a une ovale infiniment petite adhérente, & ainsi des autres. Mais comme les lignes du quatrième ordre, dont j'ai à traiter ici, ne sçauroient avoir ni points triples de la seconde & troisième espèce, ni points quadruples, ni points quintuples : en un mot, comme les lignes du quatrième ordre ne peuvent avoir que des points doubles de toutes les espèces, ou au plus un seul point triple, je m'abstiens de pousser cette théorie plus loin, persuadé qu'on doit en voir l'enchaînement, & qu'il n'y a personne qui ne puisse déduire, des principes qui viennent d'être établis, toutes les conséquences qui peuvent servir à cette théorie. Il faudroit allonger extrêmement ce Mémoire pour en faire le détail : cependant avant de le finir, je crois qu'il est à propos de faire quelques remarques au sujet des points multiples invisibles du premier & du second genre.

206 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 c'est-à-dire, au sujet des ovales infiniment petites conjuguées,
 & des ovales infiniment petites adhérentes à une des branches
 de la courbe.

R E M A R Q U E I.

* *Art. 12.* LVII. On a dit dans la 8.^e définition * nombre 3, que l'ovale infiniment petite ou point conjugué devoit être mis au rang des points doubles. Le célèbre Chevalier Newton l'a dit aussi dans son énumération des lignes du troisième ordre, & c'est après ce grand homme que j'ai crû pouvoir le supposer; néanmoins ayant donné des regles dans ce Mémoire, pour reconnoître les points doubles d'avec les points simples & les autres points multiples, & pour connoître ces points doubles les uns des autres, j'ai crû qu'on ne me sçauroit pas mauvais gré, si par manière de digression, je fais voir l'application de ces regles au point conjugué, ou ovale infiniment petite, sur un exemple déjà connu.

E X E M P L E.

* *Fig. 20.* LVIII. On demande si la courbe, dont la nature est exprimée par cette équation $pyy - 2cpy + pcc = x^3 - 4axx + 5aax - 2a^3$, a un point double, & quelle est la nature de ce point double, si c'est un point d'intersection de deux branches, un point de rebroussement, ou si c'est un point conjugué (l'indéterminée (x) représente les abscisses AP , & l'indéterminée (y) les ordonnées PZ de cette courbe).

1.^o Quand $AP(x) = a$, il reste l'égalité $pyy - 2cpy + pcc = 0$, dont les deux racines sont $y = c$, $y = c$; & cette valeur de l'indéterminée (y) étant substituée dans l'équation de la courbe, il vient l'égalité $x^3 - 4axx + 5aax - 2a^3 = 0$, qui a trois racines réelles, dont deux sont égales entre elles, & de même signe, ces deux racines égales sont $x = a$, $x = a$. Or (par l'*art. 51*) quand les égalités désignées par (L) & par (A), (qui sont ici les égalités $pyy - 2cpy + pcc = 0$, & $x^3 - 4axx + 5aax - 2a^3 = 0$) ont l'une & l'autre

deux racines réelles, égales & de même signe, la courbe, dont la nature est exprimée par l'équation (D) , qui dans cet exemple particulier est réduite à l'équation $pyy - 2pcy + pcc = x^3 - 4axx + 5aax - 2a^3$, a un point double, & à ce point double, l'abscisse $AP(x)$ est à l'ordonnée $PZ(y) :: a : c$; donc, si l'on prend $AB = a$, & sur la droite BM , parallèle à l'ordonnée principale GL , la partie $BM = c$, le point M sera le point double de la courbe, dont la nature est exprimée par l'équation $pyy - 2pcy + pcc = x^3 - 4axx + 5aax - 2a^3$. *Ce qu'il falloit montrer en premier lieu.*

2.^o Pour connoître maintenant la nature de ce point double M , c'est-à-dire, s'il est un point d'intersection, ou un point de rebroussement, ou une ovale infiniment petite *, * Art. 52. on différenciera deux fois l'équation $pyy - 2pcy + pcc = x^3 - 4axx + 5aax - 2a^3$, suivant l'art. 163 de l'analyse des Infiniments petits, & les méthodes de M. Bernoulli, & la seconde différentiation donnera $pdy^2 = 3xdx^2 - 4adx^2$, d'où l'on tire $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{3x-4a}{p}$, & ensuite $\frac{dy}{dx} = \frac{\pm\sqrt{3x-4a}}{\sqrt{p}}$. Mais au point double M , on a $x = a$ *: * Par le nombre précédent du présent article.

Donc, en ce point double M , on a $\frac{dy}{dx} = \frac{\pm\sqrt{-a}}{\sqrt{p}}$. Or

$\sqrt{-a}$ est une grandeur imaginaire; donc au point double M , les tangentes de la courbe sont imaginaires, quoique les coordonnées GB , BM soient réelles : donc * ce point * Art. 20. double M est une ovale infiniment petite, ou un point conjugué. & 21.

En effet cette courbe est celle qui, dans l'énumération des lignes du troisième ordre de M. Newton, est la 69.^e espèce, que ce célèbre Géomètre dit avoir un point conjugué : j'ai préféré cet exemple, quoique connu, & pris parmi les lignes du troisième ordre, afin de faire voir la liaison de mes principes, avec les vérités qui ont été publiées par d'autres.

REMARQUE II.

LIX. On a dit dans la neuvième définition *, que l'ovale * Art. 13.

infiniment petite conjuguée, étant un point double, lorsqu'une ovale infiniment petite, au lieu d'être conjuguée, est adhérente à une des branches de la courbe, elle doit former un point triple dans l'endroit où elle est adhérente à la courbe : & on l'a nommée *point triple invisible*, par la raison que l'on ne voit pas, lorsque la courbe est décrite sur le plan, ce qui cause la triplicité de ce point qui n'est sensible que dans l'équation de la courbe ; je ne crois pas que personne ait jamais parlé de ces especes de points triples, c'est ce qui m'engage à m'étendre un peu sur leur formation.

* Fig. 39. Cette singularité, qui ne se rencontre pas dans les lignes qui sont au dessous du quatrième ordre, vient de ce que les lignes du quatrième ordre & celles d'un ordre supérieur peuvent avoir sur une même branche finie ou infinie $AMmZ$ *, une ovale $M\phi m\delta$ coupée par cette branche en deux points M & m . Cette ovale, qu'on peut nommer *ovale adhérente*, fait partie de la courbe à laquelle elle est adhérente, & les points M & m , où elle est coupée par la branche finie ou infinie $AMmZ$, sont les points doubles de la courbe $ZmMANnXV$ à laquelle elle appartient, dont on suppose ici que GQ est l'axe, & GL l'ordonnée principale.

Soit δ le point de l'ovale adhérente où la tangente est parallèle à l'axe : ϕ le point de cette même ovale où la tangente est parallèle à l'ordonnée principale GL , en sorte que la droite $Q\delta$ soit le *maximum* de l'ovale, parallèle à l'ordonnée principale, & la droite $E\phi$ son *maximum* parallèle à l'axe : soit de plus la droite indéfinie GM menée par les points G & M , il est constant que cette droite GM doit couper l'ovale, non seulement au point M , mais encore en un autre point comme γ , puisque cette ovale est une portion de courbe rentrante en elle-même.

Si l'on conçoit maintenant que les droites $M\delta$ & $M\phi$ deviennent infiniment petites, il est constant que les points M & δ , M & ϕ , seront infiniment près l'un de l'autre, aussi bien que les points M & m & les points M & γ : en un mot il est clair que l'ovale sera infiniment petite, & qu'elle n'occupera

n'occupera plus sur la branche $AMmZ$ qu'un espace infiniment petit, enforte qu'elle sera invisible sur le plan.

Néanmoins la droite QA coupera toujours la courbe & au point M où est le nœud, & au point A qui sera infiniment près de M : de même $E\phi$ coupera la courbe & au point double M & au point simple ϕ , qui sera infiniment près de M . D'où il suit 1.^o que la droite $GE(g)$ sera équivalente à trois racines égales de l'égalité marquée par $(L)^*$, savoir à deux racines égales à cause du nœud M , & à une troisième racine qui ne différera des autres que d'une quantité infiniment petite égale à $MA = Ea$, c'est-à-dire, qui dans le fini n'en différera point. Par la même raison la droite $GQ(R)$ sera équivalente à trois racines égales de l'égalité marquée par $(A)^*$, dont deux seront correspondantes au nœud M , & la troisième au point ϕ , laquelle par conséquent ne différera des deux autres que d'une quantité infiniment petite égale à $M\phi = Q\phi$, c'est-à-dire, qu'elle n'en différera point dans le fini, enforte qu'il y aura dans l'égalité (A) trois racines parfaitement égales.

* Art. 49.
Voyez la Table.

* Art. id.

Enfin si l'on transporte l'origine des coordonnées de G en M pour avoir, au lieu de l'équation qui se rapporte à l'équation générale marquée par (D) , celle qui se rapportera à l'équation générale marquée par $(\Delta)^*$, & que de cette dernière équation on en déduise, suivant ce qui est dit ci-dessus, l'égalité marquée par $(2K)^*$, dont les racines donnent les points d'intersection de la courbe $ZmMANnXV$ & de la droite GM , il est clair que cette égalité $(2K)$ aura trois racines égales à zéro; savoir deux, à cause du point double M , où la droite GM coupe la courbe, & une troisième, à cause du point γ qui n'est distant de M , origine des u & des z , que d'une grandeur infiniment petite.

* Art. id.
V. la Table.

* Art. id.

Ainsi, dans les lignes du quatrième ordre, ou d'un ordre supérieur au quatrième, qui ont des ovales infiniment petites adhérentes à une de leurs branches, les équations algébriques, qui expriment la nature de ces courbes, doivent faire connoître l'existence & la situation de ces ovales par des

symptomes, s'il est permis de parler ainsi, pareils à ceux des courbes qui ont des points triples, dont la triplicité dépend de l'interfection de trois branches finies ou infinies de la même courbe, *ce que j'avois à faire remarquer ici pour ne laisser aucun doute sur la neuvième définition.*

E X E M P L E.

* Fig. 39. LX. Soit la courbe $ZmMANnXV^*$, dont la nature est exprimée par l'équation marquée par le chiffre (1)

$$(1) \dots ay^3 - 3aey^2 - acyy + 3aey + 2acey - ae^3 - ace^2 \\ = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}bx^3 + \frac{1}{2}abx^2 + \frac{1}{2}a^2x^2 - \frac{1}{12}a^4 - \frac{1}{6}ba^3 \\ - \frac{2}{3}ax^3$$

dans laquelle on suppose $c = \frac{b\sqrt[3]{9b+18a}}{2\sqrt[3]{2a}}$ & $a > b$.

La droite GQ , qui s'étend à l'infini de part & d'autre du point G , est l'axe de la courbe sur laquelle on prend les x positifs du côté de Q , & les x négatifs du côté de B : la droite GL , qui coupe GQ à angle quelconque au point G , est l'ordonnée principale de la courbe, ou l'axe des y : l'origine de ces indéterminées x & y est en G .

Cette courbe n'a que deux branches qui s'étendent à l'infini de part & d'autre de la droite GL , & ces deux branches se réunissent en A , où la courbe coupe l'ordonnée principale GL parallèlement à l'axe GQ : la branche $ZmMA$, qui s'étend à l'infini du côté des x positifs, est chargée d'une ovale $M\mu\phi m\delta\epsilon M$, qu'elle traverse de M en m : la branche $ANnXV$, qui s'étend à l'infini du côté des x négatifs, forme deux *sinuosités* KNn , NnX , dont les sommets N & n ont des tangentes NB , nb , parallèles à l'ordonnée principale GL .

Après avoir pris du côté où les x sont positifs $GQ = a$,
 $G2Q = a + b$, $Gq = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}\sqrt[3]{4aa + 10ba + 4bb}$,
 & $G2q = \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}\sqrt[3]{4aa - 2ab - 2bb}$, & du
 côté où les x sont négatifs, $GB = -\frac{1}{3}a - \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}\sqrt[3]{4aa + 10ba + 4bb}$, & $Gb = \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}$

$\sqrt{4aa - 2ab - 2bb}$, on élèvera des points $Q, 2Q, q, 2q$, les quatre droites $Q\delta, 2Qm, q\pi$ & $2q\epsilon$ parallèles à l'ordonnée principale GL , & ensuite des points B & b les droites BX, bn , parallèles aux premières; cela fait, si l'on prend sur la droite $Q\delta$ la partie $QM = e$, le point M sera un de ceux où la branche $AMmZ$ coupe l'ovale $M\mu\phi m\delta\epsilon M$: si l'on prend $M\delta$ (de l'autre côté du point M par rapport au point Q) tel que $M\delta$, soit $= c = \frac{b\sqrt[3]{9b+18a}}{2\sqrt[3]{2a}}$, le point δ sera un des points de l'ovale où la

tangente est parallèle à l'axe: si l'on prend, sur la droite $2Qm$, le point m , tel que $2Qm = e + \frac{2}{3}c$, ce point m sera le 2^d point où la branche $AMmZ$ coupe l'ovale $M\mu\phi m\delta\epsilon M$: & si, sur cette même droite $2QM$, on prend $2Q\mu = e - \frac{1}{3}c$, le point μ sera l'autre point de l'ovale où la tangente est parallèle à l'axe; enfin, si par les points M & m , on tire les droites $M\phi, m\epsilon$, parallèles à l'axe GQ , le point ϕ où la première droite $M\phi$ coupera la droite $q\pi$, sera un des points de l'ovale où la tangente est parallèle à l'ordonnée principale GL , & le point ϵ où la seconde droite $m\epsilon$ coupe la droite $2q\epsilon$, sera le second point de l'ovale où la tangente est parallèle à la même ordonnée principale GL , c'est-à-dire, que $q\phi$ & $2q\epsilon$ seront tangentes de l'ovale, l'une au point ϕ , l'autre au point ϵ , en sorte que si l'on prolonge les tangentes de l'ovale aux points δ & μ jusqu'à ce qu'elles rencontrent la droite $q\pi$, l'une au point π , l'autre au point ξ , l'ovale se trouvera renfermée d'un côté entre les droites $2q\epsilon, q\pi$, & de l'autre entre les droites $\delta\pi, \mu\xi$.

Si l'on prend sur la droite BX la partie $BN = e$ & la partie $BX = e + c$, le point N sera le sommet de la première sinuosité KNn de la branche $ANnXV$, auquel la tangente est parallèle à l'ordonnée principale GL , & le point X sera l'extrémité de la seconde sinuosité NnX de la même branche $ANnXV$: de même si l'on prend sur la droite bn la partie $bn = e + \frac{2}{3}c$, & la partie $bK = e - \frac{1}{3}c$,

le point n sera le sommet de la seconde sinuosité NnX de la branche $ANnXV$, auquel la tangente est parallèle à l'ordonnée principale GL , & le point K sera l'extrémité de la première sinuosité KNn de la même branche $ANnXV$. Enfin si du point E , où la droite MN , parallèle à l'axe, coupe l'ordonnée principale GL , on prend, sur cette même droite GL , la partie EA égale à la racine réelle de cette égalité $W^3 - cW^2 + \frac{1}{12}a^3 + \frac{1}{6}a^2b = 0$, en allant de E vers G , parce que cette racine est négative, on aura le point A , où les deux branches $ZmMA$, $VXnNA$, s'unissent, en coupant l'ordonnée principale GL parallèlement à l'axe GQ .

Tout cela n'est qu'une suite des principes qu'on a démontrés jusqu'ici, le calcul même n'en est pas fort difficile, je l'obtiens ici (parce qu'il ne serviroit qu'à allonger) pour en venir à la formation des *points triples invisibles*.

Tout ce qu'on vient de dire étant donc supposé, il est visible que la grandeur de l'ovale $M\phi m\delta\epsilon Me$ dépend des grandeurs de la droite $M\phi (\frac{2}{3}b - \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}\sqrt{4aa + 10ba + 4bb})$

& de la droite $M\delta (c = \frac{b\sqrt[3]{9b+18a}}{2\sqrt[3]{2a}})$. Ces droites étant

donc, pour ainsi dire, les parametres de cette ovale, si la droite $Q_2Q(b)$ est supposée infiniment petite, $M\phi$ devient en même temps infiniment petite : car $Q_2Q(b)$ étant alors $= 0$ par rapport à $GQ(a)$, on a $M\phi = -\frac{2}{3}a + \frac{2}{3}a = 0$,

la droite $M\delta (c = \frac{b\sqrt[3]{9b+18a}}{2\sqrt[3]{2a}})$ devient aussi infiniment

petite ou égale à zero par rapport à $GQ(a)$: ainsi l'ovale $M\mu\phi m\delta\epsilon M$ devient une ovale infiniment petite, mais elle demeure toujours adhérente à la branche $AMmZ^*$.

* Fig. 40.

A l'égard de ce qui arrive à la branche $ANnXV$, quoique cela ne soit pas du sujet dont nous traitons dans cet article, il n'est pas hors de propos de faire remarquer, en passant, que les deux sinuosités KNn , NnX , deviennent infiniment petites, & se changent en une inflexion parallèle à l'ordonnée

principale : mais je m'attache uniquement ici à la branche $ZmMA$, sur laquelle l'ovale (comme on a déjà dit) devient infiniment petite, & par conséquent invisible sur le plan.

Quoique cette ovale soit invisible, il en reste des marques dans l'équation : en effet lorsque $Q_2 Q(b)$ devient $= 0$, par rapport à $GQ(a)$, l'équation de la courbe $ZmMANnXV$ se change en celle qu'on voit ici marquée par (2)

$$(2) \dots ay^3 - 3aeyy + 3aee y - ae^3 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}ax^3 + \frac{1}{2}aaxx - \frac{1}{12}a^4,$$

tous les termes, où les coefficients b & c se rencontrent, devenant infiniment petits & par conséquent égaux à zero par rapport aux autres.

Maintenant si on cherche quelle doit être la valeur de GE ou $QM(y)$ au point Q , auquel $x=a$, on trouve * l'égalité (L) qui est du troisième degré, & qui a par conséquent trois racines; * Art. 49.
V. la Table.

$$(L) \dots y^3 - 3eyy + 3eey - e^3 = 0.$$

Ces trois racines sont réelles & égales entre elles, étant $y=e$, $y=e$, $y=e$; d'où il suit que $GE(g) = e$ est une racine triple de l'égalité (L), ce qui dénote en M^* , ou un point d'inflexion parallèle à l'ordonnée principale, auquel QM seroit tangente, ou un point double * auquel QM est tangente, ou bien un point triple * auquel QM est sécante. Mais si l'on substitue dans l'équation (2), au lieu de l'indéterminée (y) la valeur e , pour connoître * la nature du point M , on trouve l'égalité (A), qui étant du quatrième degré, doit avoir quatre racines réelles ou imaginaires. * Art. 8.
n. 3.
* Art. 19.
n. 1.
* Art. 18.
n. 2.
* Art. 49.
V. la Table.

$$(A) \dots \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}ax^3 + \frac{1}{2}aaxx - \frac{1}{12}a^4 = 0.$$

Ces quatre racines sont réelles, & il y en a trois égales entre elles, & une quatrième qui est inégale, car cette égalité donne $x=a$, $x=a$, $x=a$, & $x=-\frac{1}{3}a$; d'où il suit que $GQ(R) = a$ est une racine triple de l'égalité (A), & qu'il y a de l'autre côté de G une valeur de (x) qui est égale à $\frac{1}{3}GQ$, laquelle correspond à une racine triple de l'égalité (L), & par conséquent qu'il y a en N^* une inflexion parallèle à l'ordonnée principale. Ce que je remarque seulement en passant; * Art. 50.

pour faire voir l'usage des regles qu'on a données ci-devant. Revenons au point M dont il faut faire connoître la nature.

On a trouvé que $GE(g) = e$ est une racine triple de l'égalité (L) ; d'où l'on a conclu que le point M pourroit être, ou un point, dont l'inflexion seroit parallele à l'axe, ou un point double auquel QM seroit tangente, ou un point triple auquel QM seroit sécante. Mais $GQ(R) = a$ est aussi une racine triple de l'égalité (A) , donc, 1.° le point M ne sçauroit être un simple point d'inflexion, (car il faudroit pour cela que $GQ(a)$ ne fût qu'une racine simple de l'égalité marquée par (A)); 2.° ce même point M ne sçauroit être un point double avec rebroussement, (car $GQ(a)$ ne seroit alors qu'une racine double * de l'égalité (A)). Donc il ne peut être qu'un point double sans rebroussement, auquel QM & EM seroient tangentes *, ou bien un point triple auquel QM & EM seront sécantes.

Pour connoître maintenant si ce point M est un point double, ou un point triple, on transportera l'origine des indéterminées de G en M , en prenant $u = y - e$, & $z = x - a$, ce qui transformera l'équation (2) en celle que l'on voit ici marquée par (Δ) . *

* Art. 49.
V. la Table.

$$(\Delta) \dots 4au^3 = z^4 + \frac{4}{3}az^3.$$

Cela fait, par les points G & M , on tirera la droite GM , qui coupera la courbe en autant de points * qu'il y a de racines réelles dans l'égalité $(2K)$ en y comprenant les points

$$(2K) \dots \left. \begin{aligned} z^4 + \frac{4}{3}az^3 \\ - 4ah^3z^3 \end{aligned} \right\} = 0$$

doubles pour deux points, & les points triples pour trois.

Dans cette égalité (qui est donnée par la comparaison des triangles semblables GIK , MP_5M , & dans laquelle IK

* Art. 49.
V. la Table.

$(h) = \frac{e}{a}$) * les quatre racines sont $z = 0$, $z = 0$, $z = 0$, & $z = -\frac{4}{3}a + \frac{4e^2}{aa}$, enforte qu'elle a trois de ces racines qui sont égales à zero; d'où il suit que la droite GM sécante en M ne sçauroit y être sécante en un point double, (car il

faudroit pour cela * qu'il n'y eût dans l'égalité (2K) que deux racines égales à zero), donc le point M est un point triple, auquel QM , EM , & GM sont sécantes *.

* Art. 53.
n. 1.

* Art. id.

Mais on a vû ci-devant qu'en ce point M , il y a une ovale infiniment petite adhérente à la courbe, qui est invisible sur le plan : donc l'ovale infiniment petite, adhérente à une des branches de la courbe est désignée dans l'équation, qui exprime la nature de la courbe, par les mêmes symptômes que le point triple. Donc ces ovales infiniment petites adhérentes sont des especes de points triples invisibles. *Ce qu'il falloit faire connoître par cet exemple.*

Les points triples invisibles ou ovales infiniment petites adhérentes à une des branches de la courbe, ont tant de rapport avec les points triples visibles, formés par l'intersection de trois branches finies ou infinies de la même courbe; que si l'on cherche la tangente de la courbe au point où la triplicité est invisible, il faudra différentier trois fois, conformément à l'article 46, pour avoir le rapport du dx au dy ; il s'agit donc de vérifier cette proposition par ce même exemple.

Soit donc toujours la courbe $ZMANV$ *, dont la nature * Fig. 46. est exprimée par l'équation marquée par (2)

$$(2) \dots ay^3 - 3aey^2 + 3aey - ae^3 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}ax^3 + \frac{1}{2}a^2xx - \frac{1}{12}a^2.$$

En différentiant cette équation, on a $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - 2axx + aax}{3axy - 2ey + ee}$:

si on demande le rapport de dx à dy au point M , où l'on a trouvé $x = a$, & $y = e$, il est visible que la substitution de x & de y dans la différentielle précédente donne $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$,

d'où il suit (par l'art. 163 de l'analyse des Infinim. petits) qu'il faut différentier séparément le numérateur & le dénominateur de cette fraction, cette seconde différentiation donne

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{3xx - 4ax + aa}{6axy - 2ey + ee} : \text{ si on substitue dans cette seconde}$$

différentielle, au lieu de x & de y , leurs valeurs au point M , on aura encore $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{0}{0}$, d'où il suit qu'il faut différentier

une troisième fois, suivant les méthodes de M.^{rs} Bernoulli & Saurin, cette troisième différentiation donne $\frac{dy^3}{dx^3} =$

$\frac{6x-4a}{6a}$: si on substitué dans cette troisième différentielle;

la valeur de x au point M , c'est-à-dire, a au lieu de x , on

aura $\frac{dy^3}{dx^3} = \frac{6a-4a}{6a} = \frac{1}{3}$, d'où l'on tire $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, qui

fait connoître enfin que l'ordonnée QM au point M est à la so tangente QT en ce même point M , comme 1 est à

$\sqrt[3]{3}$, c'est-à-dire, que $QT = e\sqrt[3]{3}$. Mais pour trouver cette valeur de la so tangente QT , il a fallu différentier trois fois; comme s'il y e t e  trois branches qui se fussent rencontrées en M . Donc pour trouver la valeur de la so tangente au point triple invisible M , il faut faire les mêmes opérations que pour le point triple visible. *Ce que je m'étois proposé de faire connoître en second lieu par cet exemple.*

Avant de finir cet article, il ne faut pas oublier de remarquer que la troisième différentiation n'ayant fourni ici, au point M , que l'égalité $\frac{dy^3}{dx^3} = \frac{1}{3}$, qui ne s cauroit avoir qu'une seule racine réelle, il s'ensuit qu'il n'y a au point M , qu'une seule tangente, ce qui est encore une nouvelle preuve qu'il n'y passe qu'une seule branche de la courbe $ZMANV$. D'où l'on voit la différence qu'il y a entre un point triple invisible; & un point triple visible. Car si ce point triple M e t été formé par la rencontre de trois branches finies ou infinies de la courbe, la troisième différentiation auroit fourni une égalité du troisième degré qui auroit e  trois racines réelles, à cause des trois tangentes qui se seroient rencontrées au point M . *Différence que je m'étois proposée de faire remarquer en dernier lieu par cet exemple.*



EXAMEN CHYMIQUE DES VIANDES

Qu'on employe ordinairement dans les Bouillons ;

*Par lequel on peut connoître la quantité d'Extrait qu'elles
fournissent , & déterminer ce que chaque Bouillon
doit contenir de suc nourrissant.*

Par M. GEOFFROY le Cadet.

DE tous les Aliments, ceux qu'on tire des Végétaux devroient être les plus convenables aux malades, parce qu'ayant des principes moins développés, ils semblent être les plus analogues à la Nature, comme M. Lémery l'a prouvé dans un de ses Mémoires; cependant le bouillon fait avec les Viandes, est la nourriture que l'usage a établi, & qui passe généralement pour la plus saine & la plus nécessaire dans les cas de maladie, où elle est presque toujours la seule employée.

Ce n'est que par l'examen des principes, que cette nourriture contient, qu'on peut être en état de la donner avec discernement, afin de ne pas courir le risque de la prescrire trop forte dans les circonstances où la diète exacte est quelquefois le seul remède; ni trop foible, lorsque le malade exténué par une longue maladie, a besoin d'une nourriture, augmentée par degrés, pour réparer ses forces. C'est pour parvenir à des éclaircissements utiles sur cette proportion, que j'ai fait l'analyse des Viandes qui sont le plus d'usage, ou qui contiennent un suc nourrissant regardé comme salutaire; telles que le Bœuf, le Veau, le Poulet, &c. Je n'ai entrepris cette recherche que parce que l'analyse des Viandes n'a pas été portée aussi loin que celle des Plantes.

Feu M. Dodart, dont la mémoire est si respectable à l'Académie, & dont l'extrême exactitude est si connue, s'est

Mem. 1730.

. E e

* *Hist. de
l'Acad. des Sc.
année 1702.
p. 43.*

contenté de dire en 1702*, qu'il tenoit de feu M. Bourdelin, que les chairs des Animaux bouillies en consommé, & ensuite mises à la distillation, ne rendoient pas moins de Sel volatil que si elles avoient été distillées crus. Comme il paroît qu'on a négligé de déterminer la quantité d'extrait que ces consommés laissent après l'évaporation, & ce que les Viandes pourroient avoir communiqué de leurs principes à l'eau, dans laquelle on les avoit fait bouillir; j'ai repris ce travail, afin d'ajouter aux analyses déjà connues, cette partie négligée, qui est l'objet de ce Mémoire. Je me suis proposé d'y faire connoître la quantité & la qualité des principes des chairs crues mises en distillation; ce qu'elles fournissent de principes aux extraits solides qu'on en tire par l'ébullition & l'évaporation; la différence essentielle des Sels volatils qu'on en tire; ce que les chairs dépouillées de leurs sucs & séchées contiennent encore de principes: enfin je déterminerai dans un autre Mémoire, ce que les os & les matières osseuses peuvent fournir, dans la cuisson, d'extrait nourrissant.

CHAIR DE BOEUF.

Je commencerai par la chair de Bœuf: j'en ai pris une grosse pièce de tranche, dont j'ai fait ôter la graisse, les os, les cartilages & les membranes; de cette pièce de Bœuf j'ai fait couper plusieurs morceaux d'un poids égal de 4 onces. L'un de ces morceaux a été mis en distillation au Bain-Marie sans aucune addition. Il a fourni 2 onces 6 gros 36 grains de flegme ou d'humidité qui a passé dans le récipient. La chair restée sèche dans la cornue, s'est trouvée réduite au poids d'une once 1 gros 36 grains. Le flegme avoit l'odeur de bouillon; il a donné des marques de Sel volatil, puisqu'il a précipité en blanc la dissolution du Mercure sublimé corrosif, comme les purs Sels volatils ont coutume de le faire, & le dernier flegme de la distillation en a donné des marques encore plus sensibles, en précipitant une plus grande quantité de la même dissolution.

Cette chair desséchée, qui pesoit 1 once 1 gros 36 grains,

ayant été mise dans une cornuë au fourneau de reverbere pour l'analyser, m'a donné d'abord un peu de flegme chargé d'Esprit volatil, qui pesoit 1 gros 4 grains : ensuite 3 gros 46 grains de Sel volatil & d'Huile fétide épaisse qui n'a pû s'en séparer.

La Tête-morte ou la matière restée dans la cornuë, pesoit 3 gros 30 grains : c'étoit un charbon noir, luisant & léger qu'on a calciné dans un creuset à feu très-violent ; la calcination l'a réduit en cendres, qui pesoient 40 grains. Ces cendres exposées à l'air se sont humectées, & ont augmenté de poids. Elles ont été lessivées, & l'eau de leur lessive éclaircie, n'a point donné de marques de Sel alkali, mais de Sel marin, puisqu'elle a précipité en blanc la dissolution du Mercure dans l'Esprit de Nitre. Elle n'a causé aucun changement à la dissolution du sublimé corrosif, si ce n'est qu'après quelque temps de repos, il s'est formé au bas du vaisseau une espece de nuage, en forme de Coagulum léger : or nous ne connoissons jusqu'à présent que les Sels qui sont de la nature du Sel ammoniac ou le Sel marin, qui précipitent en blanc la dissolution de Mercure par l'Esprit de Nitre, & seulement les terres absorbantes animales que j'ai observé précipiter légèrement la dissolution du sublimé corrosif.

Sur 4 onces de chair de Bœuf séchée au Bain-Marie, j'ai versé autant d'Esprit de Vin bien rectifié ; le tout est demeuré en digestion pendant un très-long-temps, l'Esprit a tiré de cette Viande une foible teinture, il en a détaché quelques gouttes d'huile, la couleur qu'il a prise, étoit rousse avec une odeur fade : l'Huile de Tartre mêlée avec cet Esprit en a développé une odeur urineuse, son mélange avec la dissolution de Mercure par l'Esprit de Nitre a blanchi, il s'y est fait un précipité blanc-jaunâtre ; puis cette liqueur est devenue ardoisée, à cause du Sel ammoniacal urineux, dont l'Esprit de Vin s'étoit imbu. L'essai de cet Esprit de Vin, mélangé avec la dissolution du sublimé corrosif, a produit un précipité blanc, qui est devenu un peu jaune ; cette

précipitation ne s'est faite dans ce dernier cas, que par le développement d'une portion du Sel volatil urinaire, qui a passé dans l'Esprit de Vin avec le Sel ammoniacal.

Quatre onces de pareille chair de Bœuf ayant été cuites dans un vaisseau bien fermé, avec trois chopines d'eau, & la cuisson ayant été répétée six fois avec pareille quantité de nouvelle eau, pour tirer autant qu'il étoit possible tout le suc de cette Viande; j'ai rassemblé tous ces bouillons, dont les derniers n'avoient plus qu'une odeur d'eau de Veau très-légère. Je les ai fait évaporer à feu lent, je les ai filtrés vers la fin de l'évaporation, pour en séparer une portion terreuse, & il est resté dans le vaisseau un extrait médiocrement solide, qui s'humectoit à l'air très-facilement, & qui s'est trouvé peser 1 gros 56 grains. Ainsi il résulte de cette expérience que puisque 4 onces de Bœuf bouilli donnent 1 gros 56 grains d'extrait, une livre de semblable chair de Bœuf bouillie doit fournir 7 gros 8 grains de pareil extrait, plus 11 onces 6 gros 64 grains de flegme, & 3 onces 2 gros de fibres dépouillées de tout leur suc. Ce produit peut varier selon que l'animal aura été bien ou mal nourri dans de bons ou de mauvais herbages. Il peut varier aussi, si la chair que l'on choisit pour l'expérience est plus ou moins fraîche. Il faut remarquer que le bouillon fait d'une bonne chair de Bœuf, ne se met presque jamais en gelée, si l'on ôte de la chair, les membranes, les tendons & les cartilages. Or j'entends par gelée, non l'extrait ci-dessus, mais le bouillon qui se met de lui-même en une masse claire & tremblante lorsqu'il est froid.

L'extrait de cette chair de Bœuf, qui pesoit 1 gros 56 grains, a fourni dans son analyse 1 gros 2 grains de Sel volatil, attaché aux parois du Récipient, non pas en ramifications, comme le sont ordinairement les Sels volatils, mais en cristaux plats, formés la plupart en parallépipèdes; l'Esprit & l'Huile qui sont venus ensemble après le Sel volatil pesoient 38 grains. Le Sel fixe de Tartre, mêlé avec ce Sel volatil, a paru augmenter sa force, ce qui pourroit faire

soupçonner ce dernier d'être un Sel ammoniacal urineux; & ce soupçon est d'autant mieux fondé, que les cristaux de ce Sel volatil se forment à peu-près comme ceux du Sel volatil de l'Urine, qu'on sçait être différents des autres Sels volatils tirés des chairs des animaux.

La Tête-morte ou le charbon resté dans la cornuë étoit très-rarefié & très-leger, il ne pesoit plus que 6 grains. Sa lessive a précipité en blanc la dissolution du Mercure comme a fait la lessive de la cendre de chair de Bœuf cruë, dont j'ai parlé ci-dessus.

Les 6 gros 36 grains de la masse des fibres de Bœuf desséchées, analysées de la même façon, ont rendu 2 gros d'un Sel volatil de la forme des Sels volatils ordinaires, & qui s'est attaché aux parois du Récipient en ramifications; & mêlé d'un peu d'Huile fétide assés épaisse, mais moins brune que celle de l'extrait qui a été tirée du bouillon. L'Esprit qui étoit de couleur citrine, séparé de son huile, a pesé 36 grains. La Tête-morte pesoit 1 gros 60 grains.

La lessive qu'on a faite après la calcination n'a pû altérer la dissolution du Mercure par l'Esprit de Nitre, parce que lorsqu'on a analysé ces fibres de Bœuf desséchées, elles étoient déjà dénuées, non-seulement de tout leur Sel essentiel ammoniacal, mais encore de leur Sel fixe qui est de nature de Sel marin; puisqu'elles ont passé pour la plus grande partie avec les Huiles dans l'eau pendant la longue ébullition de cette chair. Cette lessive a seulement teint légèrement de couleur d'Opale, la dissolution du sublimé corrosif, preuve qu'il y restoit encore une portion huileuse : on sçait que les matières sulphureuses précipitent cette dissolution en noir ou plutôt en violet foncé, dont la couleur d'Opale est un commencement.

On connoît donc par l'analyse de l'extrait des bouillons, que je viens de rapporter, qu'il passe dans l'eau pendant l'ébullition de la chair de Bœuf un Sel ammoniacal qu'on peut regarder comme le Sel essentiel de cette Viande, & qui paroît dans la distillation de l'extrait sous une forme différente de celui qu'on retire de la chair, lorsqu'on la distille cruë.

comme on a fait dans les analyses anciennes, & il y a apparence que c'est ce même Sel qui se sépare du Sang par les Urines après la nutrition, puisque le Sel volatil que j'ai retiré de cet extrait a beaucoup de rapport, comme je l'ai fait voir, avec celui qu'on retire de l'Urine par son analyse. Le Sel que l'on tire de l'extrait sera donc le produit de ce Sel ammoniacal naturel dans les Viandes, qui est plus facile à sublimer avec celui qui se tire ensuite des fibres : & l'on peut dire, après cette opération, que les Sels volatils sont presque toujours un produit du feu, puisque des principes si peu sensibles ne peuvent se développer qu'autant que la matière se brûle & se calcine par la violence du feu pour former le Sel volatil.

J'ai détaillé mes opérations sur la chair de Bœuf, pour rendre un compte exact de mon travail, qui a été le même sur toutes les autres Viandes que j'ai examinées. Je ne répéterai point ces procédés dans la suite de ce Mémoire, de crainte d'être trop long.

CHAIR DE VEAU.

Quatre onces de chair, prise dans une Roüelle de Veau, distillée cruë au Bain-Marie, comme la chair de Bœuf, a donné 2 onces 6 gros 54 grains d'humidité ; la chair desséchée pesoit 1 once 1 gros 18 grains, après avoir fourni les principes par l'analyse. Le *Caput-mortuum* pesoit 2 gros 51 grains, la lessive a donné des marques de Sel marin, comme l'a fait celle du Bœuf.

Quatre onces de pareille chair bouillie, ont fourni un bouillon un peu gélatineux : ce bouillon réduit en extrait en a laissé 2 gros 30 grains assés solide, quoique difficile à dessécher : la masse des fibres desséchées s'est trouvée réduite au poids de 5 gros 62 grains. Ainsi une livre de Roüelle de Veau contient 11 onces 6 gros 64 grains de flegme, une once un gros 48 grains d'extrait, & 2 onces 7 gros 32 grains de fibres desséchées ou entièrement dépouillées de leur suc.

En comparant les produits de ces premières opérations

faites sur la chair de Bœuf & sur celle de Veau, je trouve que le Veau a, par poids de 4 onces, 18 grains de flegme plus que le Bœuf; qu'il fournit 46 grains d'extrait de plus, & que ses fibres desséchées pèsent 46 grains de moins. Ainsi puisque les fibres desséchées pèsent moins que celles de Bœuf, puisqu'on en tire plus de flegme & plus de parties gommeuses, ne peut-on pas présumer que les liqueurs qui circulent dans le corps du Veau, où elles sont destinées, non-seulement à la nutrition, mais aussi à l'accroissement de l'Animal qui n'est pas encore parfait, doivent contenir des particules plus disposées à une prochaine solidité, que les liqueurs circulantes dans le corps du Bœuf où elles n'ont d'autre destination que celle de la nutrition. C'est aussi par cette raison que l'extrait qu'on tire de la chair de Veau devient plus ferme que celui de la chair de Bœuf, parce qu'il contient plus de ces particules gommeuses destinées à devenir solides pour prolonger les os, les cartilages, les tendons, &c. Et il est impossible de donner la même fermeté à l'extrait de la chair de Bœuf, si l'on n'y joint pas dans la cuisson ses os, ses cartilages & ses membranes, qui ne sont, pour ainsi dire, qu'un composé de ces particules gommeuses.

Les 2 gros 30 grains d'extrait de chair de Veau m'ont donné par l'analyse un gros 12 grains tant en Esprit qu'en Huile & en Sel volatil, qui avoit le caractère urineux comme celui du Bœuf; la Tête-morte restée dans la cornue n'a pesé qu'un gros.

Les 5 gros 62 grains de la masse de fibres desséchées qui ont fourni l'extrait, étant mis de même au feu de réverbère, ont fourni un gros 66 grains de Sel volatil, qui portoit le caractère des Sels volatils ordinaires, c'est-à-dire, qu'il étoit en ramifications, & un gros 37 grains d'Huile & d'Esprit volatil; la Tête-morte restée dans la cornue pesoit 2 gros 18 grains.

Je reprends ici les poids de ces Têtes-mortes ou charbons qui ne peuvent être sujets à erreur, sur-tout par rapport à leur pesanteur. Celui de l'extrait de Bœuf ne pesoit que 6

224 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
grains, celui de l'extrait de Veau en pesoit 72, ainsi 66 grains
de différence de poids entre ces deux charbons d'extraits.

Le charbon de fibres desséchées de Bœuf ne pesoit qu'un
gros 60 grains, & celui du Veau, 2 gros 18 grains; autre
différence de 30 grains.

Ces deux poids excédents, joints ensemble, donnent un
total de 96 grains de parties, regardées comme solides, qui
sont de plus dans le Veau que dans le Bœuf. Ces parties so-
lides, jointes aux particules gommeuses dont j'ai parlé ci-
dessus, qui sont destinées à devenir solides pour l'accroisse-
ment de l'Animal, étant numériquement beaucoup plus
considérables dans le Veau que dans le Bœuf, ne pourroit-on
pas conjecturer que si ces particules conservoient dans nos
corps, lorsque nous les prenons pour nous nourrir, la même
destination qu'elles semblent avoir dans le corps de l'Animal;
dont elles sont tirées, la chair de Veau seroit convenable aux
enfants, parce qu'ils croissent, & aux malades qui ont souf-
fert une déperdition ou un amaigrissement considérable, &
que la chair de Bœuf conviendrait mieux aux adultes & aux
personnes qui jouissent d'une santé parfaite; mais je ne donne
ceci que comme une conjecture.

CHAIR DE MOUTON.

Quatre onces de chair de Mouton prise dans cette partie
qu'on nomme vulgairement l'*E'clanche*, mise en distillation
au Bain-Marie comme le Bœuf & le Veau, ont donné 2 onces
6 gros 30 grains de flegme.

La chair dépouillée de son humidité, qui pesoit une once
un gros 42 grains, distillée au feu de réverbère, après avoir
fourni tous ses principes, a laissé dans la cornue un charbon
qui ne pesoit que 2 gros 36 grains, & dont la lessive a
donné des marques de Sel marin, c'est-à-dire, qu'elle n'a
point altéré la dissolution du sublimé corrosif, & qu'elle a
précipité en blanc la dissolution de Mercure.

Quatre onces de la même chair de Mouton bouillie a
fourni 2 gros 58 grains d'extrait : ainsi une livre de pareille
chair

chair doit donner 11 onces 5 gros 32 grains de flegme, une once 3 gros 16 grains d'extrait, 2 onces 7 gros 24 grains de fibres dépouillées de leur suc.

Les 2 gros 58 grains d'extrait distillé au feu de réverbère ont fourni environ autant de Sel volatil que le Bœuf, & plus que le Veau; les cryftaux en ont été mieux formés. La Tête-morte n'a plus pesé que 54 grains; sa lessive a donné des marques d'un Sel marin plus abondant que dans les autres Viandes.

Les fibres de ce Mouton étant séchées, après avoir fourni leur extrait, n'ont plus pesé que 5 gros 60 grains; ce qui prouve évidemment que le Mouton contient plus de parties nourissantes & de principes volatils que le Bœuf & le Veau; puisqu'il laisse dans son analyse moins de matières fixes. L'analyse de ces fibres a donné assés de Sel volatil ramifié, tel qu'il se trouve toujours dans l'analyse des fibres desséchées des Viandes: la Tête-morte a pesé 2 gros, sa lessive n'a que très-peu donné de preuves de Sel marin avec les dissolutions mercurielles, parce que la plus grande partie des Sels se sont volatilisés, ou ont passé en ammoniac dans l'extrait.

P O U L E T.

Le Poulet étant une des Viandes qu'on employe ou seule ou avec les autres Viandes ordinaires des bouillons, j'en ai fait un semblable examen; j'en ai pris un jeune qui pesoit 9 onces 4 gros 48 grains; après l'avoir concassé, on l'a fait bouillir dans plusieurs eaux, qui en ont tiré un extrait gélatineux pesant 7 gros 36 grains: la chair & les os desséchés à l'étuve comme les autres Viandes n'ont plus pesé qu'une once 6 gros 40 grains. Ainsi ce Poulet devoit contenir 6 onces 6 gros 44 grains d'humidité, j'en ai fait distiller séparément à feu de réverbère 6 gros 18 grains de la chair sèche, & 3 gros 9 grains des os secs (qui est tout ce que j'en ai pû retirer) la chair m'a donné du Sel volatil en belles ramifications; la Tête-morte pesoit un gros 6 grains, la lessive de ce charbon n'a donné aucune marque de Sel.

Mem. 1730.

. Ff

Les os ont fourni, outre les autres principes, un peu de Sel volatil de la même figure que celui des extraits tirés des autres Viandes ; la Tête-morte pesant 2 gros 8 grains, n'a rien donné de remarquable dans les essais qu'on a fait de sa lessive.

L'extrait de la chair, qui pesoit 7 gros 3 6 grains, a fourni un Sel volatil figuré comme celui du Bœuf, mais qui n'est venu qu'en forçant le feu ; la Tête-morte pesoit 2 gros 20 grains, sa lessive a donné des marques de Sel marin.

C O Q.

Un vieux Coq, qui pesoit 2 livres 2 onces 6 gros, m'a donné 4 onces 7 gros 66 grains d'extrait gommeux, transparent & très-sec.

C H A P O N.

La chair d'un Chapon dégraissé, pesant une livre 7 onces 2 gros 48 grains, a fourni une once 5 gros d'extrait qui a eu peine à se sécher.

P I G E O N S.

Deux jeunes Pigeons de volière, qui pesoient 14 onces ; ont donné un extrait assés solide pour devenir sec, qui a pesé 7 gros 35 grains.

F A I S A N.

Un Faisan, qui pesoit 2 livres, m'a donné un extrait salin qui n'a pu se dessécher suffisamment pour former un extrait solide, quoique je l'aye laissé très-long-temps à l'étuve ; cet extrait pesoit 2 onc. 4 gros 16 grains ; ainsi cette chair fournit plus d'extrait que le Bœuf.

P E R D R I X.

Deux Perdrix, pesant une livre 2 onces 5 gros, ont rendu une once six gros 30 grains d'extrait moins solide que celui du Faisan.

POULET D'INDE.

Un Poulet d'Inde, pesant 9 livres, a rendu 12 onces 43 grains d'un extrait assez solide, qui n'a pû se sécher, & qui est toujours resté huileux & comme résineux.

Il résulte de tout ce que je viens de lire, que l'extrait tiré des Viandes bouillies, doit être regardé comme la partie nourissante que fournit la chair des animaux dans les bouillons qu'on en fait, sans que je prétende pour cela qu'elle soit employée toute entière à la nutrition, puisqu'elle contient encore des parties grossières que l'action de la digestion en sépare comme inutiles par les voyes ordinaires, plus ou moins abondamment, suivant l'état du malade. Cela supposé, il faut faire voir ce qu'un malade prend de nourriture dans un bouillon ordinaire de demi-septier de liqueur.

Si, suivant l'usage, ce bouillon est fait d'une livre de tranche de Bœuf, d'une livre & demie de Roüelle de Veau, & d'une moitié de Chapon, qui peut peser 14 onces; si toutes ces Viandes, pesant ensemble 3 livres 6 onces, sont cuites dans 3 pintes $\frac{1}{2}$ d'eau, réduites à 3 chopines pour en faire six bouillons, qui doivent se mettre en gelée, lorsque la cuisson des Viandes est suffisante, ces six bouillons contiendront 2 onces 5 gros 34 grains d'extrait au moins; car l'extrait total de toutes ces Viandes seroit plus fort de 3 gros 12 grains, si on avoit répété l'ébullition, comme je l'ai fait, lorsque j'ai voulu avoir tout le suc nourissant; & si le malade les prend tous les six dans les 24 heures, il aura pris par conséquent environ 2 onces 5 gros 34 grains d'une nourriture, qui, comparée avec le poids entier du pain & de la Viande qu'il peut manger en santé, paroît trop forte: ainsi, c'est à tort que le Vulgaire s'imagine que les malades ne sont pas suffisamment nourris par les bouillons.

Il y a même des circonstances où ils le seroient assez par les Eaux de Veau ou de Poulet, puisque la première, qui seroit faite avec une livre de Veau sur 2 pintes d'eau, réduites à moitié, contiendrait une once un gros 48 grains d'extrait;

& que l'eau d'un Poulet qui peut peser 9 onces 4 gros & quelques grains, donne 7 gros 3 6 grains d'extrait. Il faut aussi faire remarquer que les Sels volatils & les Huiles de ces extraits, étendus dans les bouillons, sont plus développés, & qu'ils doivent passer plus vite dans le sang, que ceux qui étant encore embarrassés dans les fibres grossières des Viandes, occupent plus long-temps l'action de la digestion, sans compter qu'il est plus aisé d'unir à cette nourriture qu'à toute autre, le suc des Plantes qu'on juge à propos d'y joindre pour tempérer son action dans le Sang.

Je ne répéterai point ici le rapport qu'ont entre eux les extraits des autres Viandes, parce que je joints à ce Mémoire une Table qui contient par colonnes les produits détaillés de toutes mes opérations.

TABLE du produit des Expériences faites sur les Viandes.

CHAIR DE BŒUF CRUE distillée au Bain-Marie.			Onces.	Gros.	Grains.
<i>Première Eau.</i>					
Quatre onces de chair de Bœuf ont donné de première humidité.....	2	6	36		
Bœuf séché au Bain-Marie..	1	1	36		
Total.....	4				
<i>Extrait du Bœuf bouilli.</i>					
Quatre onces de Bœuf ont produit d'extrait.....		1	56		
Les fibres séchées.....		6	36		
Total.....		8	20		
Eau tirée par le Bain-Marie...	2	6	36		
A quoi il faut ajouter un 2 ^d flegme que le Bain-Marie n'a pû enlever.....		1	16		
Total de l'humidité qui se trouve contenue dans 4 onces de chair de Bœuf, 2 onces 7 gros 52 grains.					
Total.....	4				
<i>Poids des masses de la chair de Bœuf pour une livre.</i>					
Une livre de seize onces contiendra en eau.....	11	6	64		
En extrait.....		7	8		
Fibres séchées.....	3	2			
Total.....	16				
<i>Analyse de l'extrait de 4 onces de Bœuf qui ont produit 1 gros 56 grains.</i>					
Sel volatil.....		1	2		
Huile & Esprit.....			38		
Tête-morte, ou charbon.....			6		
Perte.....			10		
Total.....		1	56		
<i>Analyse des 6 gros 36 grains de fibres desséchées.</i>			Onces.	Gros.	Grains.
Sel volatil.....				2	
Esprit volatil.....					36
Tête-morte, ou charbon.....				1	60
Perte.....				2	12
Total.....				6	36
CHAIR DE VEAU CRUE.					
<i>Eau première.</i>					
Quatre onces de cette chair ont donné de première humidité.....	2	6	54		
Veau séché au Bain-Marie...	1	1	18		
Total.....	4				
<i>Extrait de Veau.</i>					
Quatre onces de Veau ont produit d'extrait.....		2	30		
Les fibres séchées.....		5	62		
Eau par le Bain-Marie.....	2	6	54		
Total.....	3	7	2		
A quoi il faut ajouter un 2 ^d flegme que le Bain-Marie n'a pû enlever, ou la perte.....			70		
Total.....	4				
Eau de la 1. ^{re} évaporation...	2	6	54		
Eau de la 2. ^{de} évaporation...			70		
Total.....	2	7	52		
<i>Poids des Masses de la chair de Veau pour une livre.</i>					
Une livre de 16 onces contiendra en eau.....	11	6	64		
En extrait.....	1	1	48		
Fibres séchées.....	2	7	32		
Total.....	16				

	Onces.	Gros.	Grains.		Onces.	Gros.	Grains.
<i>Analyse de l'extrait de 4 onces de Veau, 2 gros 30 grains.</i>				<i>Analyse de l'extrait de 4 onces de Mout. 2 gros 58 grains.</i>			
Sel volatil.....	1	12	Sel volatil.....	1	
Huile & Esprit.....	1		Huile & Esprit.....	1	
Tête-morte.....		18	Tête-morte.....		54
Perte.....			Perte.....		4
Total.....	2	30	Total.....	2	58
<i>Analyse de 5 gros 62 grains de fibres de Veau desséchées.</i>				<i>Analyse des 5 gros 60 grains de fibres desséchées.</i>			
Sel volatil.....	1	66	Sel volatil. & Huile inséparable.....	3	12
Huile & Esprit.....	1	37	Esprit.....		24
Tête-morte.....	2	18	Tête-morte.....	2	
Perte.....		13	Perte.....		24
Total.....	5	62	Total.....	5	60
CHAIR DE MOUTON				CHAIR D'AGNEAU.			
<i>distillée au Bain-Marie.</i>				<i>Une livre de chair sans graisse.</i>			
<i>Eau première.</i>				Extrait difficile à sécher, & toujours humide.....	1	1	39
Quatre onces de cette chair ont donné de première humidité.....	2	6	30	POULET.			
Mouton séché au Bain-Marie.....	1	1	42	<i>Chair & Os, 9 onces 4 gros 48 grains.</i>			
Total.....	4			Eau.....	6	6	44
<i>Extrait de Mouton bouilli.</i>				Extrait.....	7	36
Quatre onces de Mouton ont produit.....	2	58	Fibres charnuës & os séchés après l'extrait.....	1	6	40
Fibres séchées.....	5	60	Total.....	9	4	48
Eau par le Bain-Marie.....	2	630	<i>Analyse des 7 gros 36 grains d'extrait de Poulet.</i>			
Total.....	3	7	4	Esprit, Huile & flegme.....	4	15
A quoi il faut ajouter un 2 ^d flegme que le Bain-Marie n'a pû enlever.....		68	Sel volatil & Huile.....		58
Total.....	4			Tête-morte.....	2	20
<i>Poids des Masses pour 1 liv.</i>				Perte.....		15
Une livre de 16 onces contiendra en eau.....	11	5	32	Total.....	7	36
En extrait.....	1	3	16	<i>Analyse des fibres desséchées du Poulet, 6 gros 18 grains.</i>			
Fibres séchées.....	2	7	24	Esprit & Huile épaissie.....	3	34
Total.....	16			Sel volatil.....	1	
				Tête-morte.....	1	6
				Perte.....		50
				Total.....	6	18

	Onces.	Gros.	Grains.		Onces.	Gros.	Grains.
<i>Analyse des os de Poulet après l'ébullition, 3 gros 9 grains.</i>				<i>Fibres séchées de Faïsan, sans os, 6 gros 36 grains.</i>			
Esprit, Huile & Sel volatil.....	69	Esprit, Sel volatil & Huile épaisse.....	5	10
Tête-morte.....	2	8	Tête-morte.....	1	12
Perte.....	4	Perte.....	14
Total.....	3	9	Total.....	6	36
VIEUX COQ.				PERDRIX.			
<i>pesant 2 liv. 2 onces 6 gros.</i>				<i>Deux vieilles Perdrix, pesant 1 liv. 2 onces 5 gros.</i>			
Extrait gelatineux sec.....	4	7	66	Extrait huileux ou gras & humide.....	1	6	30
CHAPON.				POULET D'INDE.			
<i>Chair de Chapon dégraissé, 1 liv. 7 onc. 2 gros 48 gr.</i>				<i>Un Poulet d'Inde, pesant 9 liv.</i>			
Extrait difficile à sécher.....	1	5		Extrait gras & huileux quoiqu'en Tablettes.....	12	43
PIGEONS DE VOLIÈRE.				COEURS DE VEAUX.			
<i>Deux Pigeons, pesant 14 onc.</i>				<i>Deux cœurs de Veaux, pesant 11 onces 4 gros, ont rendu d'extrait qui n'a pu se mettre en gelée, ni se sécher.....</i>			
Extrait solide en Tablettes...	7	35	3	60
FAISAN.				FOYE DE VEAU.			
<i>Chair de Faïsan, pesant 2 liv. avec les os.</i>				<i>Un Foye pesant 2 livres 7 gros.</i>			
Extrait mol.....	2	4	16	Extrait qui s'humectoit.....	2	1	60
Fibres séchées, avec les os...	9	2	32	PIEDS DE VEAUX.			
Eau.....	20	1	24	<i>Huit pieds pesant 6 livres 8 onces.</i>			
Total.....	32						
<i>Analyse de simple chair de Faïsan, 4 onces.</i>							
Eau.....	2	6	36				
Esprit & Huile.....	4					
Sel volatil.....	2	36				
Tête-morte.....	2	48				
Perte.....	24				
Total.....	4						
<i>Analyse de l'extrait de Faïsan, 1 gros 56 grains.</i>							
Esprit & Huile.....	48				
Sel volatil.....	36				
Tête-morte.....	36				
Perte.....	8				
Total.....	1	56				

<i>Analyse d'une once d'extrait gommeux & sec de pieds de Veau.</i>			MACREUSES.		
	Onces.	Gros.	<i>Deux Macreuses du poids de 2 liv. 7 onces.</i>		
Esprit & Huile.....		3	Extrait solide qui s'humecte aux changements des temps.		
Sel volatil.....		2			
Tête-morte.....		2			
Perte.....		29			
Total.....	1			2	1 50



L A C O U R B E
DESCENSUS ÆQUABILIS
DANS UN MILIEU RESISTANT
COMME UNE PUISSANCE QUELCONQUE
DE LA VITESSE.

Par M. DE MAUPERTUIS.

I. EN 1687 M. Leybnitz, à l'occasion de sa dispute avec M. l'Abbé Catelan sur les Forces vives, proposa à ses adversaires, de trouver la Courbe dans laquelle un corps tombant par la seule force de la pesanteur, s'approche également de l'horizon dans des temps égaux. Par-là il leur faisoit voir que puisqu'on peut régler d'une manière arbitraire le rapport entre les chûtes d'un corps & les temps qu'il emploie à ces chûtes, la considération des temps qui étoit la seule ressource des adversaires des Forces vives ne devoit en aucune manière entrer dans l'estimation de ces forces. M. Leybnitz vouloit aussi faire comprendre à M. l'Abbé Catelan que l'Analyse de Descartes ou l'Algebre ordinaire n'étoit pas suffisante, comme il le prétendoit, pour résoudre toutes sortes de Problemes. 29 Novemb.
1730.

Ce Probleme, qui ne fut point résolu par ceux à qui il étoit proposé, reçût en 1694 différentes Solutions des plus célèbres Géomètres. Au lieu de prendre l'horizon pour terme des approches du corps, on prit un point quelconque; & M.^{rs} Bernoulli distinguèrent leurs Solutions par les élégantes constructions qu'ils donnerent de la Courbe *Descensus æqualis*. Enfin M. Varignon en 1699 donna au Probleme une espece de généralité, en ne l'astreignant ni à l'hypothese de Galilée sur les vîteses, ni au rapport d'égalité entre les chûtes & les temps. *Vide Acta
Lips. 1694*

*V. les Mem:
de l'Ac. 1699.
p. 1703.*

Mem. 1730.

G g

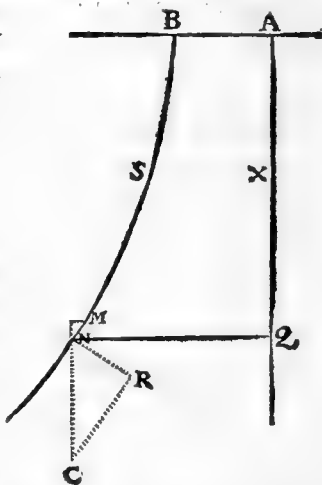
Jusqu'ici tout s'est passé dans le Vuide, & nous n'avons aucune Solution du Probleme dans un Milieu résistant. On voit aisé que cette circonstance doit changer extrêmement la nature de la Courbe *Descenf. æquab.* En effet cette Courbe qui est la seconde parabole cubique dans le cas proposé par M. Leybnitz, c'est-à-dire, dans le cas où le corps dans le vuide doit s'approcher de l'horizon proportionnellement aux temps, cette Courbe, dis-je, dans un milieu résistant, comme une puissance quelconque de la vitesse, devient transcendente du second degré.

II. Comme l'hypothèse particulière d'une résistance proportionnelle au carré de la vitesse donne un moyen de trouver cette Courbe qui ne seroit pas applicable aux autres hypothèses, je commencerai par chercher la Courbe dans cette hypothèse, je donnerai ensuite toutes les Courbes *Descenf. æquab.* pour quelque hypothèse de résistance que ce soit.

Soit la courbe que l'on cherche, $BN = s$, $AQ = x$, $QN = y$; la force de la pesanteur $= p$; la vitesse du corps dans quelque point N de la courbe $= v$.

Le corps tombant dans la courbe BN , la force accélératrice dépend de deux causes; l'une est la force de la pesanteur, l'autre la résistance du milieu. Pour trouver ce que la pesanteur y contribue, ayant pris la constante NC pour p , je la décompose en deux autres forces, l'une NR perpendiculaire, l'autre RC parallèle à la courbe; il est clair que cette dernière seule accélère le corps; ainsi $\frac{p dx}{ds}$ est la force accélératrice produite par la pesanteur.

Mais la résistance du milieu s'oppose à cette force, & en



doit détruire une partie ; or cette résistance étant proportionnelle au quarré de la vîtesse , si l'on prend $\frac{1}{n}$ pour son intensité , l'on aura pour la force retardatrice du corps $\frac{vv}{n}$; & pour la force accélératrice actuelle produite par les deux causes $\frac{pdx}{ds} - \frac{vv}{n}$. Or la force accélératrice, multipliée par le temps, donne la différence de la vîtesse ; l'on a donc ici $(\frac{pdx}{ds} - \frac{vv}{n}) ds = vdv$, ou $npdx = vvd s - nvdv$.

III. Pour avoir v dans cette équation, je la multiplie par c^{fs} (c étant le nombre dont le logarithme est l'unité, & f un coëfficient que je vais déterminer) j'ai donc $np c^{fs} dx = vv c^{fs} ds + n c^{fs} v dv$, dont l'intégrale est $\int np c^{fs} dx = \frac{1}{f} v v c^{fs} - \frac{2}{f} \int c^{fs} v dv + n \int c^{fs} v dv$. Je cherche maintenant la valeur de f propre à faire évanouir les deux derniers termes, & je trouve $f = \frac{2}{n}$; l'intégrale de l'équation est donc $np \int c^{\frac{2s}{n}} dx = \frac{n}{2} v v c^{\frac{2s}{n}}$, & $vv = \frac{\frac{2p}{n} \int c^{\frac{2s}{n}} ds}{c^{\frac{2s}{n}}}$.

IV. Maintenant puisque dans la courbe que l'on cherche, les descentes verticales doivent être proportionnelles aux temps, l'on a $\frac{ds}{v}$ proportionnel à dx ; ou prenant q pour une arbitraire constante $\frac{ds^2}{vv} = \frac{dx^2}{qq}$. Substituant dans cette équation l'expression de la vîtesse, l'on a $\frac{ds^2}{2pc - \frac{2s}{n} \int c^{\frac{2s}{n}} ds} = \frac{dx^2}{qq}$

ou $\frac{c^{\frac{2s}{n}} ds^2}{2p dx^2} = \frac{1}{qq} \int c^{\frac{2s}{n}} dx$. Différentiant cette équation, elle devient $qq dx ds^3 + nqq dx ds dd s - nqq ds^2 ddx = np dx^3$, qui est l'équation de la courbe *Descens. æquabilis*.

V. Cette équation n'est pas intégrable ; cependant on peut

construire la courbe par les Quadratures, comme l'on va voir.

Dans l'équation $qqdxds^3 + nqqdxsdds - nqqds^2ddx = npdx^2$, l'on n'a supposé aucune des différentielles constante; si donc on fait $ddx = 0$, l'on aura $qqds^3 + nqqdsdds = npdx^3$, ou $qq(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}} + nqqdyddy = npdx^3$.

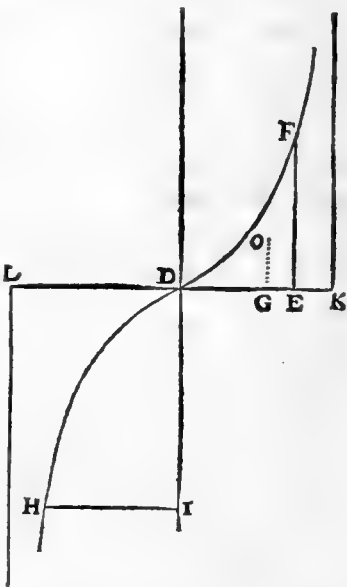
Si maintenant l'on fait $dy = \frac{zdx}{q}$, $ddy = \frac{dzdx}{q}$; ces valeurs substituées dans l'équation, l'on aura $\frac{dx}{q}(qq + zz)^{\frac{3}{2}} + nzdz = npdx$. D'où l'on tire $dx = \frac{nzdz}{np - \frac{1}{q}(qq + zz)^{\frac{3}{2}}}$.

Construisant donc la courbe DF , dont l'abscisse $DE = z$, & l'ordonnée $FE = \frac{qnz}{np - \frac{1}{q}(qq + zz)^{\frac{3}{2}}}$, l'on aura $x =$ l'aire $\frac{DFE}{q}$.

Faisant ensuite une seconde courbe DH , dont l'abscisse $DL =$ l'aire $\frac{DFE}{q}$, & l'ordonnée $HI = z =$ l'abscisse DE de la première, l'on aura $y =$ l'aire $\frac{DHI}{q}$. Ainsi l'on aura les deux coordonnées de la courbe que l'on cherche.

On peut remarquer que la première courbe DF est variable par logarithmes; car si l'on fait $qq + zz = tt$, l'on change la première expression $\frac{qnzdz}{np - \frac{1}{q}(qq + zz)^{\frac{3}{2}}}$, en $\frac{qqntdt}{npq - t^3}$ qui est intégrable par logarithm.

Ayant communiqué cette solution, & cette construction de la Courbe à M. Bernoulli, il m'envoya une manière de



perfectionner la construction, qui est digne de son illustre Auteur; je vais la rapporter ici, extraite de la Lettre, sur la permission qu'il m'en a donnée.

Soit O le centre de gravité de l'aire DFE , d'où l'on «
 abaisse la perpendiculaire OG : par la nature de ce centre, «
 on a $DHI = \frac{DFE \cdot DG}{q}$; donc $y = \frac{DHI}{q} = \frac{DFE \cdot DG}{qq}$ «
 $= \frac{x \cdot DG}{q}$, c'est pourquoi l'on peut se passer de l'aire DHI ; «
 car supposant la souscentrique DG donnée dans l'aire donnée «
 DFE , on trouve la valeur de y , en faisant $q : DG :: x$ «
 $: \frac{x \cdot DG}{q} = y$; or dans la pratique il est fort aisé de connoître «
 la souscentrique des figures, en mettant la figure DFE en «
 situation horizontale sur le tranchant d'un plan vertical pa- «
 rallele FE , que l'on avance ou recule d'un mouvement tou- «
 jours parallèle jusqu'à ce que la figure DFE soit en équili- «
 bre; cela fait, la partie DG emportée par le tranchant sera «
 la souscentrique. «

Voici la démonstration de la construction de M. Bernoulli.
 L'on a par la nature du centre de gravité $DG = \frac{1}{x} \int z dx$;
 c'est-à-dire (à cause de $x = \frac{DFE}{q}$ & de $y = \frac{DHI}{q}$) DG
 $= \frac{q}{DFE} DHI$; Donc $DHI = \frac{DG \cdot DFE}{q}$ & $y = \frac{DG \cdot DFE}{qq}$
 $= \frac{x \cdot DG}{q}$.

VII. Voilà le Probleme résolu pour un milieu résistant, comme le quarré de la vitesse: cette hypothese, outre qu'elle est assés conforme à la nature, a encore pour le calcul cet avantage particulier, qu'on peut trouver en termes finis l'expression de la vitesse, ce qui n'arrive pas dans les autres hypotheses de résistance proportionnelle à quelqu'autre puissance de la vitesse.

VIII. On peut cependant par une autre méthode se passer de l'expression de la vitesse, & résoudre le Probleme en général, pour un milieu qui résisteroit comme une puissance quelconque de la vitesse.

En suivant les mêmes raisonnemens qui ont conduit à l'équation $(\frac{v dx}{ds} - \frac{v^2}{n}) ds = v dv$, on trouvera dans l'hypothese d'une résistance proportionnelle à une puissance quelconque de la vitesse $(\frac{v dx}{ds} - \frac{v^e}{n^{e-1}}) ds = v dv$.

L'on a de plus par la propriété de la courbe $\frac{ds}{v} = \frac{dx}{q}$; l'on a par cette dernière équation $v \& dv = \frac{q ds}{dx} \& \frac{q dx dds - q ds ddx}{dx^2}$; ces valeurs substituées dans la première, donnent pour l'équation de la courbe *Descenf. aquab.*

$$\frac{pn^{e-1} dx^{e+1} - q^e ds^{e+1}}{n^{e-1}} = dx^{e-1} (qq dx dds - qq ds^2 ddx).$$

Si l'on fait dx constant, cette équation devient $pn^{e-1} dx^{e+1} - q^e ds^{e+1} = n^{e-1} qq dx^{e-2} ds dds$; ou $pn^{e-1} dx^{e+1} - q^e (dx^2 + dy^2)^{\frac{e+1}{2}} = n^{e-1} qq dx^{e-2} dy ddy$, qui est l'équation de toutes les courbes *Descenf. aquab.* pour telle hypothese de résistance que l'on voudra.

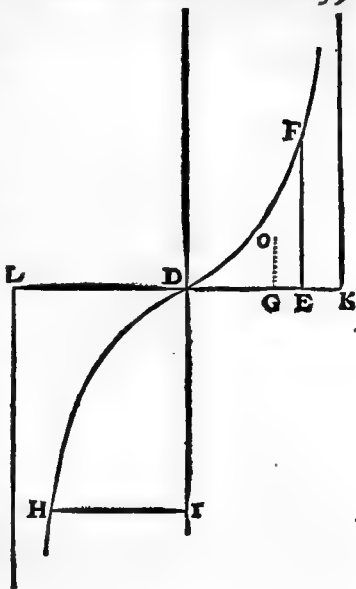
IX. Toutes ces courbes sont construisibles par les quadratures; car faisant $dy = \frac{z dx}{q} ddx = \frac{dz dx}{q}$, & substituant ces valeurs dans la dernière équation, il vient $pn^{e-1} dx^{e+1} - q^e (dx^2 + \frac{zz}{qq} dx^e)^{\frac{e+1}{2}} = n^{e-1} dx^e \cdot z dz$. D'où l'on tire $dx = \frac{n^{e-1} z dz}{pn^{e-1} - \frac{1}{q} (qq + zz)^{\frac{e+1}{2}}}$.

Construisant donc la courbe DF dont l'abscisse $DE = z$, & l'ordonnée $FE = \frac{qn^{e-1} z}{pn^{e-1} - \frac{1}{q} (qq + zz)^{\frac{e+1}{2}}}$, l'on aura $x = \text{l'aire } \frac{DFE}{q}$.

Faisant ensuite la courbe DH , dont l'abscisse $DI = \text{l'aire } \frac{DFE}{q}$, & l'ordonnée $HI = \text{l'abscisse } DE$ de la première,

l'on aura $y = \text{l'aire } \frac{DHI}{q}$,
l'on a donc ainsi les deux
coordonnées de la courbe
Descenf. aquab.

X. Ayant l'aire DFE de la
première courbe, l'on pourra
se passer de la seconde par la
considération du centre de
gravité, comme l'on a vû dans
la solution particulière : car,
ayant $x = \frac{DFE}{q}$, l'on aura
tôûjours $y = \frac{x \cdot DG}{q}$.



XI. Si on suppose $n = \infty$,
c'est-à-dire, que la résistance
du milieu soit nulle, l'équa-
tion générale $pn^{e-1} dx^{e+1}$

$= q^e (dx^2 + dy^2)^{\frac{e+1}{2}} = n^{e-1} qq dx^{e-2} dy ddy$, se réduira
à $p dx^3 = qq dy ddy$, ou $px dx^2 + pa dx^2 = \frac{qq}{2} dy^2$; ou
 $dy = \frac{dx}{q} \sqrt{2pa + 2px}$, ou enfin $y = \frac{2\sqrt{2}}{3pq} (pa + px)^{\frac{3}{2}} + b$.

D'où l'on voit que dans le cas d'une résistance nulle, ou
dans le vuide, la courbe *Descenf. aquab.* est une parabole
cubique, comme l'ont trouvé M.^{rs} Leybnitz, Bernoulli &
Varignon. Dans ce cas il est évident que les deux courbes
 DF, DH , sont quarrables.

XII. Dans certaines hypotheses de résistance, l'équation
générale de la courbe *Descenf. aquab.* se peut ramener aux
premières différences, & même aux quantités finies.

1.^o Si, par ex. on suppose que le milieu résiste en raison sim-
ple directe de la vitesse du mobile, e sera $= 1$, & l'équation
générale deviendra $\frac{dy ddy}{(p-q) dx^2 - q dy^2} = \frac{1}{qq} dx$, ou

$\frac{2qdyddy}{(p-q)d^2x^2 - qdy^2} = \frac{2}{q} dx$, dont l'intégrale est $lAdx^2 - l((p-q)dx^2 - qdy^2) = \frac{2}{q}x$; d'où repassant aux nombres, & (prenant c pour le nombre dont le Logarithme $= 1$), l'on a $\frac{Adx^2}{(p-q)d^2x^2 - qdy^2} = c^{\frac{2}{q}x}$, ou $dy = \frac{dx}{\sqrt{q} \sqrt{(p-q - Ac^{-\frac{2}{q}x})}}$; & faisant $p=q$, & $-A=BB$, cette équation devient $dy = \frac{B}{\sqrt{p}} c^{-\frac{x}{p}} dx$, dont l'intégrale est $y = -Bc^{-\frac{x}{p}} \sqrt{p} + b$, ou $(b-y)c^{\frac{x}{p}} = D$; d'où l'on voit que dans cette hypothèse, la courbe *Descenf. aquab.* est une courbe exponentielle.

2.^o Si l'on suppose que le milieu résiste en raison doublée de la vitesse; l'équation générale $(pn^{e-1}dx^{e+1} - q^e ds^{e+1} = n^{e-n} qqdx^{e-2} dsdds)$ deviendra $qqds^3 + nqqdsdds = npdx^3$, qui est la même que nous avons trouvée dans la solution particulière. Cette équation se peut ramener aux premières différences, mais avec des quantités exponentielles; car lui donnant cette forme $\frac{nqqdsdds}{npdx^3 - qqds^3} = 1$, & multipliant tout par $\frac{3ds}{n}$, l'on a $\frac{3qqds^2dds}{npdx^3 - qqds^3} = \frac{3ds}{n}$, dont l'intégrale est $lAdx^3 - l(npdx^3 - qqds^3) = \frac{3s}{n}$, ou repassant aux nombres $Adx^3 = c^{\frac{3s}{n}} (npdx^3 - qqds^3)$.

3.^o Si l'on suppose que le milieu résiste en raison triplée de la vitesse du mobile, l'équation $pn^{e-1}dx^{e+1} - q^e ds^{e+1} = n^{e-n} qqdx^{e-1} dsdds$, deviendra $\frac{dsdds}{pnn dx^4 - q^3 ds^4} = \frac{dx^{-1}}{nnqq}$, ou $\frac{\frac{nn}{q^3} dx^2 dsdds}{p^{nn} dx^4 - ds^4} = dx$, ou $\frac{nn dx^2}{1} (\frac{2 dsdds}{dx^2 \sqrt{(\frac{p^{nn}}{q^3}) + ds^2}} + \frac{2 dsdds}{dx^2 \sqrt{(\frac{p^{nn}}{q^3}) - ds^2}})$: $dx^2 \sqrt{(\frac{p^{nn}}{q^3})} = 4dx$, dont l'intégrale est $n\sqrt{(\frac{q}{p})} \cdot lA(dx^2 \sqrt{(\frac{p^{nn}}{q^3})} + ds^2) - l(dx^2 \sqrt{(\frac{p^{nn}}{q^3})} - ds^2) = 4x$,

ou

ou repassant aux nombres, l'on a $(\frac{An\sqrt{p}dx^2 + Aq\sqrt{q}ds^2}{n\sqrt{p}dx^2 - q\sqrt{q}ds^2})^{n\sqrt{\frac{q}{p}}}$
 $= c^{\frac{4x}{n}}$ ou $\frac{An\sqrt{p}dx^2 + Aq\sqrt{q}ds^2}{n\sqrt{p}dx^2 - q\sqrt{q}ds^2} = c^{(\frac{4}{n}\sqrt{\frac{p}{q}})^x}$ ou $An\sqrt{p}dx^2$
 $+ Aq\sqrt{q}ds^2 = c^{\frac{4x}{n}\sqrt{\frac{p}{q}}} (n\sqrt{p}dx^2 - q\sqrt{q}ds^2).$

4.^o Si l'on suppose maintenant que le milieu résiste uniformément, on aura $e = 0$, & l'équation $pn^{e-1}dx^{e+1} - q^{\frac{1}{2}}ds^{e+1} = n^{e-1}qqdx^{e-2}dsdds$ deviendra $\frac{p}{n}dx - ds = \frac{qqdsdds}{n dx^2}$,
ou $pdx - nds = \frac{qqdsdds}{dx^2}$, dont l'intégr. est $\frac{2px - 2ns + 2na}{q^{\frac{1}{2}}}$
 $= \frac{ds^2}{dx^2}.$

5.^o Si l'on suppose que le milieu résiste en raison simple inverse de la vitesse du mobile; l'équation $pn^{e-1}dx^{e+1}$, &c. devient $\frac{p}{nn} - \frac{1}{q} = \frac{qqdsdds}{nndx^3}$, ou $pqdx^3 - nndx^3 = q^3dsdds$, dont l'intégrale est $(2pqx - 2nnx + 2nna)dx^2 = q^3ds^2$, ou $(2pqx - 2nnx + 2nna)dx^2 = q^3dx^2 + q^3dy^2$, ou $((2pq - 2nn)x + 2nna - q^3)dx^2 = q^3dy^2$, ou $q^{\frac{3}{2}}dy = dx(\sqrt{(2pq - 2nn)x + 2nna - q^3})$ ou $(y + b)q\sqrt{q} = \frac{1}{3pq - 3np}(2pqx - 2nnx + 2nna - q^3)^{\frac{3}{2}}$ équation à la 2^{de} parabole cubique.

Quoiqu'un milieu résistant en raison inverse de la vitesse du mobile n'ait point apparemment lieu dans la nature, c'est cependant une chose fort digne de remarque, que la 2^{de} parabole cubique qui est dans le vuide la courbe *Descens. æquab.* la soit encore dans cette hypothèse; il arrive en quelque manière à cette courbe, ce qui arrive à la Cycloïde, qui étant la courbe isochrone dans le vuide, l'est encore dans un milieu résistant en raison simple directe de la vitesse, outre qu'elle l'est aussi dans un milieu dont la résistance seroit uniforme.

Toutes ces hypothèses de résistance dont nous venons de parler, & plusieurs autres donneroient des constructions particulières de la courbe *Descens. aquab.* dont quelques-unes pourroient être plus simples que celle que nous avons donnée. Dans l'hypothèse, par ex. d'une résistance proportionnelle à la simple vitesse, la courbe se peut construire sans quadrature, par le moyen de la seule Logarithmique; dans les autres, en quarrant des courbes exponentielles.

Mais j'ai mieux aimé donner une construction générale pour toutes les hypothèses de vitesse, que de détailler toutes ces constructions particulières.



DE LA NATURE DE LA TERRE
EN GENERAL,
ET DU CARACTERE
DES DIFFERENTES ESPECES
DE TERRES.

Par M. DE REAUMUR.

Nous ne sçavons que trop, qu'en Physique, les premiers principes sont ce qui nous est le moins connu. On n'a pû encore nous donner d'idées claires de ces Estres simples, dont on a voulu faire les Eléments des autres Corps, de la Terre principe, du Soufre principe, du Sel principe, &c. Il n'est pas même bien sûr que nous puissions parvenir à les connoître, au moins par la voye des expériences, la seule pourtant, en Physique, sur qui on puisse compter. Il y a bien loin apparemment d'où nous pouvons partir jusqu'à des êtres simples. La décomposition, comme la division des Corps, ne peut-elle point être poussée jusqu'à l'infini ? De quelque côté qu'on considère la Nature, l'infini semble le seul terme qui lui soit prescrit. Aussi la Terre, dont nous nous sommes proposés d'examiner le caractère dans ce Mémoire, n'est nullement un être simple; ce n'est point cette Terre élémentaire d'Aristote, & de bien d'autres, c'est une Terre à nous plus connue, quoiqu'on n'ait pas pris soin de s'en faire des notions assez déterminées.

Il seroit extrêmement à désirer d'avoir des idées bien distinctes des premiers principes, nos connoissances en seroient plus complètes, mais les connoissions-nous bien, nous ne devrions pas y remonter, lorsque nous avons à déterminer la nature de la plupart des corps qui sont l'objet de nos recherches. Nous expliquerions mal la nature de ces corps, nous n'en

23 Juin
1730.

donnerions pas les idées qu'on en veut avoir, si nous la prenions dès les premiers principes. Il faut nous arrêter bien plus près, & il ne nous est pas toujours permis de nous arrêter aussi près qu'il en seroit besoin. On veut me faire connoître un corps, un composé, qu'on me fasse connoître les éléments prochains, dont il a été formé, fussent-ils eux-mêmes très-corps, très-composés. J'emploierai volontiers une comparaison, quoique peu noble, qui me paroît très-propre à faire voir qu'on nous instruit mal, quand on passe tout d'un coup à des principes trop éloignés; & c'est malheureusement le défaut de la Chymie, à qui nous devons néanmoins tant de belles connoissances physiques, elle ne nous montre que rarement les éléments immédiats. J'amene de l'Amérique, ou des Indes, quelqu'un dont la Physique a toujours été la passion, je le suppose très-versé dans toutes les manipulations de Chymie, mais très-ignorant sur tout ce qu'on a imaginé en Europe, pour flater le goût; je le conduis chés un Pâtissier, où je lui montre des gâteaux de toutes especes, des biscuits, & de toutes les sortes de friandises qui sont l'ouvrage de cet art. Je lui demande ce que chacun de ces composés a de propre, quelle est leur nature? si pour m'en rendre raison, il a recours à l'analyse, qu'il en vienne à des distillations, à des cohobations, &c. il pourra me dire qu'il y a plus de parties huileuses dans certains gâteaux, que d'autres ont plus de Sels, que d'autres ont plus d'acides; il pourra déterminer la proportion qui est entre les parties terreuses, & les Soufres, & les Sels. Mais m'en aura-t-il donné plus d'idée des compositions sur lesquelles je l'ai interrogé, que sur celles de quelques Pierres, ou de quelques Plantes, qui pareillement traitées auroient donné des principes assez semblables? Il devoit me dire, que tel gâteau n'est fait que d'eau commune, de farine, & de beurre; que les œufs sont entrés dans un autre; que dans un autre, on a fait entrer de la levûre de bière, que le sucre est entré dans la composition d'un autre, qu'un autre est fait d'amandes pilées. Enfin il falloit encore me dire, que selon la façon dont le beurre a été mêlé avec la farine,

on a fait des gâteaux feüilletés ou non feüilletés. Si le Pâtissier fait connoître à nôtre Philosophe les matières qu'il employe, & la façon dont il les employe, il verra qu'il a eû tort de recourir à des quintessences, pour découvrir la nature de ces compositions. Quand la Nature travaille à former des gâteaux d'une autre espece, des Pierres à grains, des Pierres feüilletées, des Métaux, des Minéraux, elle n'a pas toujours des quintessences à employer, elle se sert des sables, des soufres, des bitumes, tels qu'ils sont. Pour faire entrer les bitumes, les soufres dans ses ouvrages, souvent elle ne les analyse pas plus que le Pâtissier analyse son beurre. En un mot, c'est avec des composés qu'elle forme la plupart des corps, qui sont l'objet de nos considérations.

Je sçais bien qu'on peut pousser ses recherches jusqu'à examiner quelle est la nature de chacun des composants d'un composé, que nous le devons même, quand ils nous donnent prise; mais ce que je sçais aussi, c'est que nous ne pouvons pas porter loin les décompositions, & peut-être y en a-t-il prodigieusement à faire avant d'arriver à des êtres simples, aux premiers éléments.

Il y a un certain nombre de matières, toutes très-composées, qui se combinent assés ordinairement dans la plupart des corps, l'Eau, la Terre, le Feu, ou les matières inflammables, les Sels, &c. Quelques-uns les ont toutes prises pour des éléments; d'autres, selon leur prédilection pour quelques-unes, n'en ont pris que deux ou trois, ou qu'une seule pour premier principe. Mais avant de leur donner cette qualité, on les a bien plus épurées par l'imagination, qu'elles ne le sont quand elles tombent sous nos sens. La Terre est une de celles à qui on a été le plus disposé à accorder ce rang. Aussi tant que nous nous en tiendrons aux principes immédiats, aux principes, qui eux-mêmes peuvent en avoir d'autres, la Terre nous paroîtra la principale base des corps physiques. Mais cette Terre qui entre dans la composition des corps, n'est que celle qui est continuellement sous nos yeux, & qui pourtant ne nous est pas assés connue. On

n'en a eû que des idées vagues, on n'a point considéré quelles sont ses principales propriétés, celles qui constituent son caractère. J'ai cherché à les déterminer, & à distinguer les différentes especes de Terres par le plus ou le moins qu'elles participent à chacune des propriétés communes à toute Terre. J'ai éprouvé le besoin que j'avois d'avoir des caractères fixes de la Terre en général, & des especes en particulier, dans quelques essais que j'ai faits sur la physique des Minéraux, dans les observations que j'ai voulu faire sur les diverses Terres, les plus favorables à la végétation des Plantes; je l'ai de même éprouvé, quand j'ai voulu suivre les matériaux qu'employent divers Arts, tels que les arts des Verriers, ceux des Potiers, ceux des faiseurs de Fayance & de Porcelaine; ils demandent tous qu'on sçache, & ce que c'est que la Terre en général, & ce qu'ont de particulier ses différentes especes.

Nous donnons, sans hésiter, le nom de *Terre* à l'amas de matières qui occupe un champ, où des Plantes croissent, ou peuvent croître; nous donnons ce nom à un tout, dont nous imaginons que la Terre fait une grande partie. Qu'on en sépare les grosses & les menües pierres, le reste sera encore Terre pour nous, & même le sera davantage. Qu'on ait ensuite recours à quelque expédient, comme à des lotions, pour séparer de la masse ces petits grains durs que nous appellons *Sable*; après que tout le Sable sensible aura été séparé, nous conserverons encore le nom de Terre à la matière restante, & selon l'idée que nous nous sommes faite de la Terre, nous croirons qu'elle le mérite même mieux, qu'elle en est plus terre. Mais cette matière restante, cette Terre, qu'est-elle? n'est-elle elle-même qu'un Sable beaucoup plus fin que celui que nous avons enlevé? qu'un Sable dont les grains, pris séparément, échapent à nos yeux par leur petitesse? ou est-elle une matière qui diffère véritablement du Sable, qui ait un caractère particulier & bien marqué?

Les Physiciens n'ont pas trop cherché à prendre parti sur l'un ou l'autre de ces sentiments, ou plutôt ils semblent avoir crû qu'il n'y avoit pas à délibérer entre deux sentiments.

Quand Rohault a parlé de l'Argile, qui est une espece de Terre très-commune, il a dit, sans hésiter, *Que la production de l'Argile n'est pas beaucoup différente de celle du Sable ; qu'il faut seulement ajouter que ses grains sont encore probablement plus petits, pour laisser entr'eux de plus petits intervalles, & ainsi composer un tout que l'eau puisse difficilement pénétrer.* L'autorité de M. de la Quintinie ne seroit pas comparée en Physique à celle de Rohault, si on y faisoit usage des autorités ; mais il avoit eu plus d'occasion que ce Physicien, d'examiner les différentes especes de Terres, & comme lui, il veut qu'elle ne soit, en général, qu'un amas de grains de Sable extrêmement déliés. Les Terres labourables sont naturellement prendre cette idée ; on y trouve une grande quantité de Sable, aisé à reconnoître ; de-là on est porté à croire que les molécules, parmi lesquelles ce Sable est mêlé, ne sont eux-mêmes que des amas de grains semblables, mais imperceptibles à nos yeux, quand ils sont seuls, & que ce que nous appellons Terre, sont des amas de grains de Sable extrêmement fins.

Cependant puisque les grains de Terre échappent à nôtre vûë, par leur petitesse, nous sommes hors d'état de décider par cette voye, s'ils sont simplement un Sable plus divisé, plus broyé, ou s'ils sont d'une nature différente de celle du Sable. Les grains de Sable de différentes grosseurs que nous appercevons, ne sont pas une induction suffisante pour nous déterminer à assurer qu'ici tout ce qui ne nous est pas visible, ne diffère de ce qui l'est, que par son peu de grosseur. Quelqu'un dont les yeux seroient, par rapport aux nôtres, ce que les nôtres sont par rapport à ceux de certains insectes, pourroit ne voir les Pierres parsemées dans un champ que de la grosseur dont nous paroissent les grains de Sable ; son induction le tromperoit souvent, s'il assûroit que les grains de Sable du champ ne sont autre chose que des fragments de ces Pierres. Il éviteroit cet erreur, s'il venoit à examiner les propriétés des Pierres mêmes, & ceux de ces prétendus fragments ; les Pierres de tel champ se réduiroient en Chaux, pendant que le Sable du même champ se vitrifieroit. Ce n'est

aussi qu'après avoir examiné les propriétés du Sable, & celles de la Terre proprement dite, que nous pourrons décider s'ils sont une même matière, ou des matières différentes; & cet examen nous apprendra que l'un & l'autre ont leurs propriétés particulières, & que la Terre ne diffère peut-être pas moins du Sable, que le Sable diffère des Métaux & des autres Minéraux.

Des expériences très-communes sont capables de nous donner ici de grandes lumières. Nous voyons journellement que les corps de certaines classes ne sont nullement ou peu pénétrables à l'eau. Elle ne sçait point passer au travers des ouvrages d'Or, d'Argent, de Plomb, de Verre. Quand les Cristaux, les Cailloux ont été exposés à l'air pendant un certain temps, l'eau ne peut plus s'y insinuer, au moins en quantité sensible. Au contraire non seulement l'eau s'introduit dans les Sels, elle se les approprie, elle les dissout, elle semble ensuite faire un tout avec eux. Enfin l'eau s'insinue dans des corps d'une troisième classe; en s'y insinuant, elle augmente leurs dimensions sous certains rapports, tels sont la plupart des bois & les matières solides qui nous viennent des Plantes, les peaux, les chairs desséchées des Animaux; en un mot tous les corps que nous nommons *spongieux*, parce qu'ils ont tous une qualité que l'Eponge a autant ou plus qu'aucun autre, que tous s'abreuvent d'eau. L'eau dont ils sont abreuvés augmente leur volume, & quand elle vient à s'en évaporer, ils retournent à leurs premières dimensions.

Les caractères de ces trois classes sont très-marqués; les corps qui se rangent sous la première, doivent être regardés comme fort différents de ceux qui se rangent sous la troisième. Il est pourtant aisé de s'assurer, dès qu'on cherche à s'instruire, que le Sable doit être mis dans la première, & que c'est dans la dernière que la Terre doit être placée. L'expérience la plus simple suffit ici. Qu'on remplisse un vase de Sable, qu'on arrose ce Sable d'eau peu-à-peu, & qu'à diverses reprises on en verse même jusqu'à ce qu'elle le surnage. Si avant d'avoir commencé à humecter ce Sable, on a marqué où

où se terminoit la surface, ce qui est toujours très-facile, sur-tout si l'on fait l'expérience dans quelque bouteille de Verre transparent, on observera que la surface du Sable bien humecté ne se fera aucunement élevée. Il arrivera même quelquefois qu'elle s'abaissera un peu, parce que l'eau, qui a pénétré, a pû faire changer de place quelques grains de Sable, les porter dans des espaces qui, quoique capables de loger des grains, étoient restés vuides. Qu'on fasse ensuite évaporer cette eau, la surface du Sable restera toujours au même endroit. Rien n'a dû contribuer à l'élever ou à l'abaisser. La vûë simple nous met en état de juger que les grains de Sable sont semblables à des fragments de Cristaux ou de Cailloux, qu'ils sont de même transparents, & que leurs surfaces sont polies, serrées; en un mot on juge qu'ils sont impénétrables à l'eau, comme les Cailloux & les Cristaux. Ils ont pareillement une pesanteur spécifique qui surpasse celle de l'eau. Qu'a donc pû faire l'eau qui a été versée sur une masse de Sable? ce n'a été que de descendre par les petits passages qui lui sont restés, & de remplir les vuides qui sont entre les grains. Rien ne tend jusques-là à augmenter la masse, & rien ne tendra à la diminuer, lorsque l'eau s'évaporerá. Seulement la masse humectée à fond, doit être plus solide, résister mieux à la force qui par sa pression tendroit à faire glisser les grains. L'eau les lie mieux entre eux que ne faisoit l'air; les grains sont alors plus difficiles à déplacer. C'est une Physique connue de reste de ceux qui voyagent dans des chemins où il se trouve du Sable.

Il en sera de même, si au lieu de remplir le vase, dont nous venons de parler, de Sable grossier, on le remplit d'un Sable prodigieusement fin. L'eau dans ce second cas n'est pas plus en état de pénétrer dans la substance de chaque grain, qu'elle l'étoit dans le premier cas; elle n'a pas plus de facilité à s'introduire dans des fragments de Cailloux & de Cristaux que dans des Cristaux & des Cailloux entiers; elle n'a pas plus de facilité à pénétrer dans des fragments de Sable que dans les gros grains dont ils ont fait partie. Elle ira remplir

les vuides que les petits grains laissent entr'eux, si elle trouve des routes pour y arriver; de sorte que quelque fine que soit la poudre sablonneuse, contenüe dans un vase, on n'augmentera aucunement son volume, si on l'humecte peu-à-peu, aussi ne lui fera-t-on rien perdre de celui qu'elle avoit mouillée, si on la sèche doucement; mais les circonstances de ne l'humecter ni de la sécher trop brusquement sont nécessaires, pour des raisons que nous expliquerons ailleurs.

Remplissons un vase pareil à celui où nous avons mis jusqu'ici nos différents Sables, de quelques graines fines, de Millet, de graines de Navette, &c. & versons par-dessus cette graine la quantité d'eau qui pourra être reçüe. L'eau ira d'abord occuper les intervalles que les grains laissent entr'eux; mais elle ne s'en tiendra pas là, comme elle fait quand le vase est plein de Sable; peu à peu elle s'introduira dans chaque grain, elle les gonflera tous. Bien-tôt le vase sera plus que plein, les grains s'élèveront par-dessus ses bords; & si on veut ensuite les faire sécher, on ramènera la masse à son premier volume: il en arriveroit de même, si au lieu de graines, on eût employé de la sciûre de bois.

Enfin prenons un vase rempli d'une Terre sèche, ou pour éviter actuellement les difficultés qui se peuvent trouver à bien remplir le vase, prenons un morceau d'une Terre solide bien sèche, & dont toutes les dimensions soient aisées à mesurer; un morceau de Glaise, par exemple, à qui on aura donné la figure d'un cube, d'un parallélepède, d'un cylindre. Humectons cette Terre sèche, & après que nous aurons eu donné à l'eau le temps de la pénétrer, mesurons une seconde fois les dimensions, nous les trouverons toutes augmentées; faisons ensuite sécher cette même masse de Terre, & nous la ramènerons à son premier volume. En un mot, une masse de Terre, comme un morceau de bois, acquiert du volume lorsque l'eau la pénètre, & en perd quand l'eau s'en évapore.

Ces observations simples & communes nous conduisent, ce me semble, bien directement à regarder chaque molécule, chaque grain de Terre, comme un petit corps spongieux que

l'eau peut pénétrer & distendre, & par conséquent comme un corps composé de parties flexibles. Au lieu, que les grains de Sable sont des corps roides, inflexibles, impénétrables à l'eau. Ces derniers ont aussi une transparence que n'ont pas les grains de Terre; des corps spongieux n'ont pas une disposition prochaine à la transparence.

Si les grains de Terre étoient composés de parties roides, qui laissent simplement entr'elles des cavités propres à recevoir une certaine portion d'eau, tout ce qui en arriveroit, c'est que l'eau se logeroit entre les parties d'un grain, comme elle se loge entre les différents grains de Sable. La poudre de charbon qui est spongieuse, mais composée de parties roides ne se renfle point par l'humidité, elle commence à s'éloigner de la Terre, & à s'approcher du Verre. Le volume de chaque grain de Terre, & celui de la masse entière, ne seroit pas augmenté par l'eau si les grains étoient simplement spongieux, comme ceux du charbon. Mais l'eau ne s'introduit pas seulement entre les parties du grain, elle les écarte, comme elle écarte les fibres du bois, où elle s'insinue. Ce n'est pas une petite difficulté en Physique, que d'expliquer d'où l'eau prend la force, au moyen de laquelle elle distend les corps dans lesquels elle s'introduit, car cette force est prodigieuse; son effet ne peut être arrêté par les plus grands fardeaux suspendus au bout des cordes; des coins de bois humectés s'enflent, quoique renfermés entre des masses de roches, telles que les meules de Moulin, & les font sauter. Je n'entreprends point actuellement d'expliquer la cause d'où dépend ce grand effet de l'eau, mais il nous suffit d'avoir commencé à établir, qu'une des principales propriétés de la Terre, une de celles qui la distingue des Cailloux, des Cristaux, des Sables, &c. est d'être spongieuse, & de se laisser renfler par l'eau. Il étoit plus important qu'il ne semble, de bien connoître cette propriété de la Terre, de sçavoir qu'elle ne la partage point avec les Sables. Nous aurons bien-tôt occasion de voir combien nous en pouvons tirer de lumières, par rapport à plusieurs productions, soit de la Nature, soit de l'Art. Quand nous

viendrons, par exemple, à expliquer la formation des Pierres; nous verrons qu'elles ne sont que du Sable & de la Terre, réunies en une masse. Nous aurons des caractères pour distinguer les différentes especes de Pierres, en faisant voir les différentes proportions dans lesquelles sont faits, dans les unes & dans les autres, les mélanges de Terre & de Sable. Aussi regardai-je cette proposition, comme une des propositions fondamentales de cette partie de la Physique où on examine la composition des Minéraux, & des autres Corps terrestres; nous ne la sçaurions donc prouver trop solidement.

Il se fait journellement une sorte de reproduction de la Terre très-propre à nous confirmer dans l'idée que nous avons prise de chaque grain de Terre, comme d'un corps spongieux. Nous voyons, pour ainsi dire, renaître la Terre, chaque jour, par la décomposition des corps, à la formation desquels elle a beaucoup de part. Du bois, des feuilles, des Plantes ne sont pas de la Terre, mais le Terreau, employé par les Jardiniers, n'est-il pas une espece de Terre? Si on ne veut pas encore le reconnoître pour tel, lorsqu'on l'étend sur les couches, sur les plattes-bandes, au moins ne hésitera-t-on pas à le prendre pour vraie Terre, lorsqu'il aura resté exposé à l'air pendant deux ou trois ans, qu'il aura aidé pendant ce temps à la végétation des Plantes; alors on ne pourra plus le distinguer de la Terre ordinaire des Jardins. Or, qu'est-ce que du Terreau? ce n'est que du fumier plus pourri; & qu'est-ce que ce fumier? ce sont des pailles, des herbes, des feuilles d'arbres qui ont été corrompues jusqu'à un certain point. A la Campagne, on fait des tas de toutes sortes de feuilles, & de toutes sortes de Plantes communes, comme des fougères; on met même en tas, en quelques Pays, des arbrustes, comme des Genêts ordinaires ou des Genêts épineux; ces Plantes ainsi amoncelées, sont arrosées par l'eau des Pluyes; l'humidité qu'elle y entretient, les fait fermenter, elles se corrompent, elles se changent en fumier, qui porté dans les champs, y devient Terreau, & ensuite de véritable Terre. C'est ainsi qu'on rend chaque année à un champ, au moins une partie

de ce qu'on lui a ôté pendant la recolte. Voilà donc des Plantes redevenuës Terres, ou si l'on veut, on a retiré de ces Plantes ce qu'elles avoient de Terre. Qu'est-ce qu'étoient ces Plantes? des composés d'une infinité de tuyaux, ou de fibres spongieuses. Elles reparoissent sous la forme de Terre, après avoir été divisées en parties d'une extrême petitesse; à la vérité la division qui a été faite, n'est pas précisément semblable à celle qui se feroit par des haches, des ciseaux, des pilons; du bois, des feüilles réduites en la poudre la plus fine, ne sont pas précisément pour cela de la Terre. La division ici a été l'ouvrage de la fermentation. Le mouvement qu'elle produit, ne se réduit pas à séparer un tout en diverses portions, chacune semblable à celles qui formoient le tout. Elle divise, pour ainsi dire, chaque partie, elle la décompose; elle met les Soufres & les Sels les plus volatils en état de s'évaporer. Ils s'évaporent à mesure que les parties pourries se séparent, & qu'elles leur permettent de s'élever. A mesure donc que les parties de nos Plantes perdent plus de leurs Soufres & de leurs Sels volatils, & qu'elles se divisent en plus petits grains, elles se rapprochent davantage de la nature de la Terre commune; enfin elles se trouvent réduites à l'état de cette Terre, lorsque la division & l'évaporation ont été portées assés loin.

En suivant cette sorte de génération, ou de revivification de la Terre, nous voyons qu'elle a été tirée de corps flexibles, de corps spongieux qui ont perdu une certaine quantité des parties qui entroient dans leur composition. La dissipation qui s'est faite de certaines parties ne paroît pas propre à augmenter la solidité de la tiffure des parties d'où celles-là ont été dégagées, elles ne semblent que la devoir rendre moins dense, plus spongieuse. Ainsi il semble que chaque molecule de Terre doit être au moins aussi spongieuse, & même l'être davantage que chaque molecule de Plante. Enfin il est clair, au moins qu'un molecule, qu'un grain de Terre diffère d'une partie d'une pareille grosseur de la Plante, en ce qu'elle a moins de Soufres & de Sels volatils, elle n'a gardé que les plus fixes des uns & des autres.

La fermentation qui se fait dans les Plantes, pour les réduire en fumier ou en Terreau, conserve non-seulement leur tiffure spongieuse, elle donne de plus à la matière qui paroît sous une nouvelle forme, une sorte de tiffure poreuse qu'elle n'avoit pas auparavant. C'est ce qui est prouvé par une expérience que j'ai faite sur des feuilles de Vignes que j'ai mises chés moi en tas & à couvert, pour les y faire pourrir, sans se mêler avec d'autre Terre. Quand elles ont été pourries jusqu'à ce point où elles perdent leur nom pour prendre celui de Terreau, elles ont fermenté vivement, & subitement avec les acides que j'ai versés dessus. Au lieu que l'Esprit de Nitre versé sur des feuilles vertes, sur des feuilles sèches, ou sur des feuilles simplement commencées à pourrir, n'y produit aucune fermentation sensible.

Je sçais bien qu'il se peut faire une décomposition des Plantes qui nous donnera un résidu terreux, plus compacte, moins spongieux, moins propre à se renfler, & à se raccourcir, que les parties des Plantes ne l'étoient, & telles sont les cendres que nous laisse le bois brûlé. Mais ces cendres aussi approchent beaucoup plus de la nature du Sable, que de celle de la Terre, comme nous le prouverons ailleurs. Un agent plus violent que ceux qui agissent dans la fermentation, a exercé ses forces contre le bois; quand le feu l'a brûlé ç'a été dans un instant qu'il a enlevé une quantité considérable de matières; des matières, même peu volatiles, ont cédé à la force de son action, comme il paroît par la suye qui s'assemble dans les cheminées. Il a changé la tiffure du tout, s'il a écarté certaines parties les unes des autres, il en a rapproché d'autres. Tout se passe plus paisiblement dans une fermentation aussi douce que celle qui occasionne la dissolution des Plantes, il n'y a que les parties les plus volatiles qui s'élèvent. Il n'y a pas de mouvements aîlés considérables pour rapprocher des parties qui par leur tiffure naturelle sont écartées, pour rendre compacte ce qui est spongieux.

Si après avoir dissout certaines Terres dans l'eau, c'est-à-dire, si après avoir agité de l'eau au fond de laquelle il y

avoit de la Terre, & l'avoir renduë bourbeuse, on laisse rasséoir cette eau dans un verre transparent, & qu'on observe ce qui se passe pendant qu'elle s'éclaircit; il semble alors que les formes de masses spongieuses, que nous avons attribuées à chaque grain de Terre se manifestent. Du moins voit-on descendre vers le fond du verre des flocons semblables à ceux de la neige, ou à ceux qui nagent dans le lait caillé. Si on observe l'eau dans laquelle se précipite le Sable le plus fin, & où il s'y précipite aussi lentement que fait la Terre dans l'eau dont nous venons de parler, on n'y apperçoit nullement de pareils flocons; les grains de Sable n'en sont point, & ne sont pas propres à en former par leur réunion.

Il est encore à remarquer, que si après avoir rendu du Sable extrêmement fin par la trituration, on l'abreuve de la quantité d'eau nécessaire pour en former un petit gâteau, que dès que cette petite masse est sortie des mains, & posée à plat, qu'une couche d'eau vient couvrir sa surface. Un gâteau de Terre pétri de la même manière, ne paroîtra pas couvert d'une couche d'eau, elle ne s'assemble point sensiblement sur sa surface. Dans le premier cas, l'eau ne peut être retenuë que dans les interstices des grains. Dans le second, elle est dans les grains mêmes, & ce n'est que peu à peu qu'elle peut s'en dégager, c'est-à-dire, à mesure que celle de la surface s'évapore.

Quoique la propriété d'être spongieuse, de se laisser renfler par l'eau qui la pénètre, soit selon moi une de celles qui caractérise le mieux la Terre, & une de celles dont on peut faire le plus d'usage dans l'explication des phénomènes, elle en a un autre qui va de pair, dont l'existence est plus aisée à démontrer, & qui prouve même l'existence de la première. Le caractère le mieux marqué que nous ayons, pour distinguer les Métaux des Minéraux, c'est leur malléabilité; de ce que, soit à froid, soit à chaud, ils soutiennent les coups de marteau sans se casser. Tous les composés que nous avons mis dans la classe des Métaux ont cette propriété; quand ils sont purs, quand ils ne sont point alliés avec des matières

qui la leur ôtent, soit qu'on les frappe, soit qu'on les tire par une filière, dont la force équivaut à celle de la percussion; on les étend sans les casser, ils sont ductiles. La Terre est aussi caractérisée par une espèce de ductilité que n'ont ni les autres Minéraux, ni les Métaux. Sa ductilité est de l'espèce de celle de la pâte; la Terre est pétrissable. Lorsqu'on la ramollie par l'eau, elle se laisse étendre, elle prend entre les doigts la forme qu'on veut lui donner, & elle la conserve. C'est à cette propriété de la Terre à qui nous sommes redevables du bas prix auquel sont tant d'ouvrages de Poterie & de Fayance, si commodes pour une infinité d'usages. Un ouvrier exercé fait prendre sur le Tour les figures de vases arrondis à une masse de Terre informe, & cela presque sur le champ.

Toutes les Terres n'ont pas cette propriété à un même degré; celles qui l'ont le plus, sont appelées des *Terres grasses*; & celles qui l'ont le moins, des *Terres maigres*. Les Terres les plus maigres, les moins ductiles, sont celles qui se rapprochent le plus du Sable, car cette ductilité, propre à la Terre, manque entièrement aux Sables. Une masse de Terre peut être maigre de deux manières, ou parce que la vraie Terre ne fait qu'une portion du tout, dans lequel entre une portion considérable de Sable. Ainsi nos Terres labourables sont-elles toutes mêlées avec une quantité de Sable sensible, qui en peut être séparé par des lotions; elles ne sont souvent plus maigres les unes que les autres, que parce que le Sable y est mêlé en plus grande proportion. Mais diverses Terres sont par elles-mêmes, indépendamment du Sable avec lequel elles sont mêlées, moins ductiles, moins grasses que bien d'autres Terres, la ténacité de leurs grains se rapproche plus de celle des Sables, & s'éloigne de celle des Terres les plus grasses. Ces remarques fournissent le fondement de la division des Terres en bien des espèces, toutes aisées à caractériser.

Quoiqu'il soit très-sûr que le Sable ordinaire, que le Sable dont les grains sont sensibles, n'a aucunement la ductilité des

des Terres grasses. On doutera peut-être, & avec vrai-sé-
mblance, si ce manque de ductilité ne doit pas être attribué
uniquement à la grosseur de ses grains ; si le Sable réduit en
grains aussi fins que ceux de la Terre, ne donneroit pas de
même une pâte traitable : car il est évident que plus les grains
seront fins, & plus ils auront de disposition à se lier ensem-
ble. Cependant j'ai fait réduire par un long broyement le
Sable dans une poudre extrêmement fine, & j'ai eu grand
regret de voir que quelque trituré qu'il eût été, il ne faisoit
jamais une pâte qui eût cette liaison, cette onctuosité, qui
met les pâtes de Terre en état d'être travaillées. Lorsque je
traiterai de la manière de faire les différentes especes de Por-
celaines, on verra combien j'ai dû désirer de parvenir à avoir
une pâte de pur Sable qui fût ductile, & avec quels soins j'ai
dû tenter les expériences qui pouvoient la faire espérer.

Mais quelques soins que j'aye pris pour faire bien broyer
du Sable, on peut pourtant penser que la petitesse à laquelle
j'ai réduit ces grains, n'approchoit pas de celle où la nature
les peut amener, & de celle que la nature a réellement donnée
aux grains qui composent les Terres grasses. J'ai craint que
cela ne fut ainsi ; mais des expériences m'ont prouvé que
j'avois des pâtes de Sable très-peu traitables, quoique leurs
grains ne fussent peut-être pas plus gros, ou peut-être le
fussent moins, que les grains de Terre. La meilleure manière
de séparer le Sable de la Terre avec laquelle il est mêlé, est
de détrempier la masse composée dans une suffisante quantité
d'eau, de faire du tout une eau bourbeuse ; & de laisser en-
suite reposer cette eau pendant quelque temps, c'est-à-dire ;
jusqu'à ce qu'elle commence à s'éclaircir. Les grains les plus
gros & les plus pesants se précipitent les premiers, bien-tôt
ils tombent au fond du vase : si on verse l'eau doucement
par inclination, elle n'emporte avec soi que les parties les
plus fines & les plus légères qui y étoient restées suspendues.
Si cette eau a été reçue dans un second vase, & qu'on l'y
laisse reposer pendant un temps plus long que celui où on
l'a laissée dans le premier, peu à peu elle y dépose les parties

dont elle étoit chargée, elle reprend avec le temps sa première limpidité. Dans le premier vase il est resté un sédiment sablonneux, qui n'est plus mêlé avec une aussi grande portion de Terre qu'il l'étoit d'abord, & ce qui a passé dans le second vase est une Terre mêlée avec peu de Sable, ou avec le Sable le plus fin. Si on repete un nombre de fois suffisant des opérations semblables sur le sédiment sablonneux du premier vase, ce sédiment se trouve purgé de toute Terre, c'est du Sable aussi pur que nous pouvons nous proposer de l'avoir. Comme l'un des sédiments venus de la première opération, n'étoit pas pur Sable, de même l'autre sédiment venu de cette même opération n'étoit pas pure Terre, il est resté de la Terre dans l'un, & il a passé du Sable avec la Terre dans l'autre. Si on répète pareillement ces opérations sur le sédiment terreux, c'est-à-dire, si on travaille à séparer le Sable fin qui étoit resté mêlé avec la Terre, plus on donnera le temps à l'eau de se reposer, avant de la transvaser, & plus on donnera de facilité au Sable de se séparer, plus aussi on en dépurera la Terre.

Mais quand les opérations auront été répétées un certain nombre de fois, inutilement les repeteroit-on davantage; si les grains de Sable qui restent mêlés avec ceux de la Terre sont d'une telle petitesse, qu'ils n'ayent pas plus de force pour vaincre la résistance que l'eau oppose à leur descente, qu'en ont les grains de Terre, les grains de Terre & les grains de Sable se précipitent alors pêle-mêle. Reste à sçavoir, & c'est précisément la question à éclaircir, si ces grains de Sable qui ne sont pas plus en état de se précipiter que des grains de Terre, si des grains de Sable si petits n'ont pas les qualités que nous regardons comme particulières à la Terre, s'ils ne peuvent pas faire une pâte ductile. Une expérience bien simple me donne les éclaircissements nécessaires pour décider la question.

Je réduis par le broyement le Sable dans une poudre extrêmement fine, j'y réduis de même du Verre. J'entreprends de faire des pâtes avec l'une ou l'autre de ces poudres, & je

trouve que, dans quelque proportion que je les délaye avec de l'eau, je n'ai jamais une pâte grasse, onctueuse, en un mot, ductile. Si je puis démontrer que ces grains sont cependant aussi fins que ceux d'une Terre ductile, j'ai démontré que la ténuité seule des grains ne suffit pas pour donner une pâte grasse : or les remarques précédentes nous mettent en état de décider si ces grains de Sable ou de Verre sont aussi déliés que ceux de la Terre. Pour cela je n'ai qu'à prendre une Terre grasse, bien reconnue pour Terre, & à l'allier avec une quantité connue de poudre de Sable ou de Verre, c'est-à-dire, à faire une pâte de poudre de Sable & de Terre, de poudre de Terre & de Verre ; & après avoir bien fait ces mélanges, tenter par des lotions de séparer le Verre ou le Sable d'avec la Terre. Si je n'y parviens point, je suis certain que les grains de Verre ou de Sable se soustiennent aussi aisément dans l'eau que ceux de Terre ; d'où je suis en droit de conclurre que les grains de Sable & de Verre sont aussi déliés que ceux de Terre : je pourrois même conclurre qu'ils sont plus fins, parce qu'on sçait d'ailleurs que la pesanteur spécifique du Sable & du Verre sont plus grandes que celles de la Terre ; ainsi les grains de Sable, pour rester également suspendus dans le liquide, doivent être plus petits, il faut qu'une augmentation de surface compense leur excès de pesanteur sur celle des grains de Terre. Or j'ai composé des pâtes de Terre glaise, & d'autres Terres grasses mêlées soit avec du Sable réduit dans une poudre très-fine, soit avec du Verre broyé au même point, d'où je n'ai pu ensuite séparer par des lotions que peu ou point du Sable ou du Verre que j'y avois fait entrer : donc les grains de ces poudres de Verre & de Sable étoient aussi fins que ceux de la Terre. Cependant des pâtes faites uniquement de ces mêmes Sables, ou de ces mêmes Verres broyés ne sont pas ductibles : donc la finesse des grains ne suffit pas pour composer une pâte ductible.

Quoiqu'il y ait entre le Verre & le Sable des différences ; je ne les regarde que comme celles qui sont entre les différentes especes de Verres, & nous sommes en droit ici de les

traiter également dès que les grains de l'une & de l'autre de ces matières ont des surfaces polies, & qu'elles sont l'une & l'autre impénétrables à l'eau. Une espece de Verre, dont on avoit fait des Bouteilles, où le Vin s'altéroit, a donné occasion à M. Geoffroy le cadet de faire une fort curieuse observation; c'est qu'il y a des Verres qui, comme les matières métalliques, se laissent dissoudre par l'Esprit de Nitre, & encore mieux par l'Huile de Vitriol. Les dissolvants sont des agents semblables à ceux que la Nature employe, les parcelles dans lesquelles ils divisent les corps sont bien d'une autre finesse que celles qui nous viennent après des triturations ordinaires. J'ai fait dissoudre de ces Verres altérables, & quand la dissolution a été faite, j'ai édulcoré, le mieux qu'il m'a été possible, le Verre dissout, c'est-à-dire, qu'en le lavant à bien des reprises, j'ai emporté tout le Sel que l'eau en pouvoit emporter. Cette poudre, toute fine qu'elle étoit, n'a point été propre à donner une pâte ductile. On auroit tort si on mettoit sur le compte des Sels, qui sont restés engagés dans le Verre, ce manque de ductilité. Une Terre ductile, après avoir été foulée de Sel, de quelque espece que ce soit, se laisse pétrir & bien étendre.

Dès qu'on y regarde de près, on apperçoit aussi qu'il ne suffit pas que les grains d'une poudre, qui a été détrempée par l'eau, soient extrêmement fins, pour que la pâte qui en vient soit ductile. La ductilité de toute masse, de toute matière, suppose que ses parties ont entr'elles un certain degré de liaison; & elle suppose de plus, que lorsqu'on fait changer de forme à cette masse, que lorsqu'on déplace ses parties, qu'il y en a qu'on fait mouvoir sur d'autres; que les parties, pendant leur déplacement, sont aussi adhérentes aux parties qu'elles rencontrent, qu'elles l'étoient à celles qu'elles touchoient pendant qu'elles étoient en repos; qu'il en est de chacune de ces parties à peu-près comme d'un morceau de Marbre qui touche par une surface plane & polie, une table de Marbre aussi plane & aussi polie; qui voudroit l'enlever, auroit à vaincre une résistance plus grande que celle du poids

de ce morceau de Marbre ; & on trouveroit la même résistance, soit qu'on voulût l'enlever pendant qu'il est en repos, soit pendant qu'il est forcé de glisser sur la surface de la table. Des grains anguleux, tels que ceux de tout Sable & de toute poudre de Sable, des grains d'ailleurs roides, ne sont pas propres à se lier, à s'attacher ensemble, par le seul attouchement ; ils ne sçauroient se toucher que par des petites surfaces, & , pour ainsi dire, par quelques points. Si on remplit d'eau les interstices qu'ils laissent entr'eux, leur liaison en sera augmentée, parce que les parties de l'eau tiennent plus les unes aux autres que ne sont celles de l'air : mais elle ne sera augmentée que de ce que l'eau a de liaison ou de viscosité, & cela ne va pas loin. Aussi si l'on veut pétrir cette masse, dont les grains sont si mal liés, il s'y fera des fentes, elle se séparera en plusieurs parcelles. Les déplacements des grains occasionneront ceux de l'eau ; dans les endroits où les grains se trouveront séparés des autres par trop d'eau, & dans les endroits où ils se toucheront moins, il se fera des séparations.

Remplissons un vase d'une Terre bien sèche, réduite en poudre. Pressons cette poudre autant qu'il est possible ; les grains sont alors à peu-près dans le même cas où seroient ceux d'une poudre de Sable. Mais si nous arrosions ensuite cette poudre d'eau, nous allons avoir des effets fort différents de ceux qui arriveroient, si nous arrosions de même du Sable, & dont la cause est dûë à la première propriété de la Terre que nous avons établie ; sçavoir, à ce qu'elle est spongieuse ; à ce que ses grains se laissent pénétrer & gonfler par l'eau. L'eau qui n'iroit que dans les intervalles que les grains de Sable laissent entr'eux, s'insinue dans les grains mêmes de Terre, elle fait effort pour les gonfler en tous sens ; ils vont chacun s'étendre, & les côtés où ils s'étendront le plus, ce seront ceux où ils trouveront moins d'obstacles à leur extension, c'est-à-dire, vers les endroits où ils ne s'entretochent pas. En se gonflant, ils vont à la rencontre les uns des autres ; bien-tôt les attouchements des grains, les engrénements des parties des uns dans celles des autres, seront

considérablement augmentés, ou, ce qui est la même chose, la liaison, la ténacité de la masse va être augmentée, car chaque grain est contraint ici à s'appliquer contre son voisin, par une force pareille à celle qui agit dans les cordes que l'eau pénètre.

Si on vient dans la suite à faire sécher cette masse, il arrivera même que ses grains, redevenus secs, tiendront beaucoup plus ensemble qu'ils n'y tenoient avant qu'ils eussent été mouillés. L'eau les a engrénés les uns dans les autres, & l'engrènement n'a pas été détruit pendant qu'elle s'est évaporée; la pression de l'air extérieur a tenu unis des grains qui ne tendoient pas à se séparer. Nôtre masse de Terre sèche sera plus dure que lorsqu'elle étoit mouillée, tout au contraire de ce qui arrive à un tas de grains de Sable. L'état de chaque grain de Sable est le même, soit que le tas qu'ils composent soit mouillé, soit qu'il ne le soit pas. Il n'en est pas de même de celui de chaque grain de Terre dans ces deux différentes circonstances; la masse qu'ils composent ne sçauroit être mouillée, qu'ils ne soient chacun mouillés intimement. Nous avons tâché de donner quelque idée de la tiffure que nous leur concevons, en les comparant à de petits fragments d'éponge, de papier, à de la poudre de bois; ils boivent l'eau comme ces sortes de matières, & il est à croire aussi que quand ils en sont imbibés, ils ont comme elles une souplesse qui leur manque, lorsqu'ils sont plus secs. Quand l'eau a donné à la Terre la consistance d'une pâte médiocrement molle, elle a ramolli chacun de ses grains: l'eau plus molle que le corps dans lequel elle s'introduit, doit ramollir ce corps, si elle en augmente les dimensions précisément de la quantité du volume qu'elle y va occuper, au lieu qu'elle augmenteroit la dureté du corps où elle s'introduiroit sans le dilater, parce qu'elle y occuperoit la place d'une matière plus tenue. Le papier, le bois mouillés nous donnent un exemple de ce qui arrive dans le premier cas, & le tas de Sable nous en donne un de ce qui arrive dans le second.

La principale cause de la ductilité qu'a la Terre ramollie

par l'eau doit, à mon sens, être tirée de ce qu'alors chacun de ses grains ont une souplesse qu'ils n'avoient pas auparavant; je n'exclus pas pourtant l'eau des vuides que les grains peuvent laisser entr'eux. Je comprends même que lorsqu'on vient à presser la masse, que lorsqu'une force tend à faire mouvoir une partie des grains, que l'eau qui est dans les interstices qu'ils ne remplissent pas, aide à les faire glisser. Mais je conçois que ces grains, qui en changeant de place, cedent à la force qui tend à les faire aller en avant, changent en même temps de figure pour s'appliquer contre les grains qu'ils rencontrent. Cet effet est une suite nécessaire de leur souplesse, dès qu'ils portent à faux quelque part, dès qu'ils ne touchent pas suffisamment leurs voisins, ils sont obligés de céder jusqu'à ce qu'ils ayent trouvé un appui qui les mette en état de résister à la force qui agit contre eux. Si un gâteau de pâte ne touchoit pas par-tout un plateau sur lequel il seroit posé, on l'obligeroit à le toucher par-tout, si on le pressoit au dessus des endroits où il n'y étoit pas appliqué. Ce qui arrive sensiblement à toute la masse de pâte, est ce qui arrive continuellement à ses grains, quand on la manie ou presse pour lui faire changer de forme. Les grains souples & hors d'état de se soutenir, s'ils ne sont appuyés de toutes parts, obéissent jusqu'à ce qu'ils se soient presque moulés sur leurs voisins. Tout se passeroit différemment, si les grains étoient roides, inflexibles comme des grains de Sable; quelques points d'appuis suffisoient à ces derniers, la force qui agit contre eux n'a d'autre effet que de les faire mouvoir. Quand la masse qu'ils formoient, auroit été sans gerçures, il s'y en feroit dès qu'ils seroient forcés à se déplacer, parce qu'alors les vuides cesseroient bien-tôt d'être aussi régulièrement distribués.

On pourroit croire que la figure seule des parties suffiroit pour expliquer la ductilité de la Terre mouillée; qu'en leur en imaginant une qui leur permît de s'appliquer exactement les unes contre les autres, qu'on auroit une cause de leur tenacité, & d'une tenacité qui se conserveroit pendant qu'elles seroient mises en mouvement, ou, ce qui est la même chose,

pendant qu'on feroit changer de forme à la masse qu'elles composent. Mais quelles figures plus favorables leur pourroit-on imaginer que celles de lames bien polies ? Avec de pareilles lames, on pourroit faire un tout dont les parties seroient liées, tant que l'arrangement régulier des lames subsisteroit. Mais cet arrangement seroit bien-tôt troublé, si on venoit à paîtrir la masse ; les lames se trouveroient bien-tôt différemment inclinées les unes par rapport aux autres ; & alors plus de liaison, plus de ductilité, si la souplesse de chacune des lames ne donnoit l'une & l'autre.

Les Gyps, les Talcs fournissent une preuve qui confirme fort le raisonnement précédent. On sçait qu'une des propriétés de l'une & de l'autre de ces matières est de se diviser en feuilles, qui elles-mêmes se subdivisent en d'autres feuilles, jusqu'à un terme que nous ignorons : de sorte que si on pulvérise du Gyps ou du Talc, la poudre ne sera pas composée comme celle du Sable de grains qui auront à peu-près d'égales dimensions en différents sens, mais elle sera composée de petites lames qui auront beaucoup moins d'épaisseur qu'elles n'ont de largeur & de longueur. Cependant quelques fines qu'ayent été les poudres de Talc & de Gyps, quand elles ont été humectées par l'eau, elles ne m'ont jamais donné ni une pâte liée, ni une pâte ductile. Aussi ces pâtes, comme celles du Sable pulvérisé, se séchent sans perdre rien de leurs dimensions ; preuve que l'eau ne pénètre pas plus dans l'intérieur des grains de Gyps & de Talc que dans celui des grains de Sable ; & preuve encore que la figure la plus favorable des parties d'une poudre ne suffit pas pour que cette poudre détrempée par l'eau devienne une pâte ductile, lorsque l'eau ne peut pas pénétrer & ramollir chaque grain. Les Métaux ne doivent aussi leur ductilité qu'à la souplesse de leurs parties ; il y en a même, comme le Fer, & l'Acier sur-tout, qui ne sont bien ductiles que lorsqu'ils sont extrêmement chauds ; il est nécessaire que le feu ramollisse des parties qui ont trop de roideur, lorsqu'elles sont froides. En un mot la ductilité demande que les parties qui composent un tout, puissent elles-mêmes changer aisément

aisément de figure, & que pendant qu'elles en changent elles restent toujours appliquées les unes contre les autres.

Les Terres, les plus terres, si je puis me servir de ce terme, telles que sont les Glaïses, ont une propriété bien connue, celle de retenir l'eau, elle ne peut les traverser. C'est à cette propriété de la Glaïse à qui nous sommes redevables des eaux de tant de Sources & de tant de Puits. Que la Glaïse se laisse mouïller par l'eau, & que cependant elle ne permette pas à l'eau de la percer, qu'elle ne puisse se filtrer au travers d'un lit de Glaïse qui est bien humecté, c'est un fait singulier, & dont l'explication pourroit embarrasser qui ignorerait la propriété que nous avons reconnue dans nos grains de Terre de se laisser pénétrer & gonfler par l'eau. Celle qui arrive sur une masse de Glaïse sèche, trouve des grains prêts à la recevoir, elle peut même alors trouver des passages entre les grains, qui lui permettent d'avancer jusqu'à une certaine profondeur. Mais bien-tôt elle va elle-même se boucher ces passages. A mesure qu'elle s'introduit dans les grains, elle les distend, elle les gonfle, & les force à s'appliquer exactement les uns contre les autres.

Rohault, qui apparemment n'avoit pas assez fait d'attention à notre première propriété de la Terre, attribue cet effet à une autre cause qui semble d'abord suffisante. Il imagine que l'eau qui pénètre la Glaïse, entraîne avec soi les grains les plus fins, qu'elle les dépose dans les passages, & qu'ainsi peu-à-peu elle les bouche. Mais ce sentiment auquel on seroit peut-être forcé de s'en tenir, si on n'en avoit pas un plus probable, seroit combattu par bien des difficultés. Si on humectoit un morceau de Glaïse sèche par la seule vapeur d'un air humide, il seroit difficile de concevoir qu'il s'y fît des déplacements de grains de Terre; cependant la Glaïse humectée ainsi, seroit capable d'arrêter l'eau, comme celle qui auroit été arrosée par une quantité d'eau considérable: il s'ensuivroit que dans un lit de Glaïse de quelques pieds d'épaisseur, sur lequel l'eau coule, que le passage n'est bouché à l'eau qu'à une certaine profondeur de ce lit, & qu'elle en pénètre.

aisément les premières couches. Il ne lui est bouché, le passage, que où il y a eu assés de parties fines portées & déposées ; ces parties plus fines ont été prises des couches les plus proches de la surface ; les premières couches devroient donc laisser passer l'eau, comme le font des couches de Sable. Or l'expérience démontreroit aisément le contraire. Enfin un morceau de Glaïse qui a une fois arrêté l'eau, lorsqu'il auroit été séché, & qu'on viendroit à en verser dessus, l'arrêteroit, lorsque l'eau seroit arrivée au premier endroit, ce qui n'est pas.

Ni la ductilité de la Terre, ni sa propriété de se raccourcir en se séchant, ne peuvent donc être expliquées par la seule petitesse de ses grains. Il faut de plus imaginer chacun de ses grains spongieux & souples. La peine que j'ai eu à croire la première hypothese insuffisante, l'envie que j'ai eu plusieurs fois d'y revenir, me fait penser qu'on ne sçauroit trop bien établir que l'un & l'autre effet ne sçauroient uniquement dépendre de la finesse des grains. Les Sels concrets paroissent propres à le bien prouver. Il n'en est peut-être aucun qui ne soit composé de parties plus tenües que celles des Terres ordinaires ; du moins est-il sûr que leurs parties, qui se soustiennent dans l'eau, pendant que celles de la Terre ne s'y soustiennent pas, sont prodigieusement fines ; cependant je ne connois point de Sel, qui étant imbibé d'eau, fasse une pâte ductile, ni dont l'espece de pâte qu'on en aura faite se raccourcisse en séchant. J'ai formé des lames avec differents Sels réduits en poudre, & ensuite arrosées d'eau légèrement, aucune de ces lames ne s'est raccourcie sensiblement pendant qu'elle s'est séchée. J'ai essayé de la sorte de l'Alun, du Vitriol, du Borax, du Sel de Soude, &c.

Les caractères particuliers que nous avons assignés au Sable & à la Terre, ne sont pas uniquement propres à nous donner des idées plus distinctes de l'une & de l'autre de ces matières, que celles qu'on s'en étoit faites jusqu'ici ; ces caractères nous aideront extrêmement à démêler la composition de bien des Minéraux. Il n'en est point dont la Terre & le Sable

ne fassent partie. Entre les différentes classes des matières minérales, la plus étendue, & celle qui offre de plus belles variétés, est celle des pierres; une grande partie des genres qu'elle comprend, ne sont faits que d'un alliage de Sable & de Terre. C'est une idée que nous développerons plus au long dans quelques Mémoires que nous avons à lire sur la formation des Pierres, & sur leurs divisions en classes, en genres & en especes; nous en avons déjà donné une ébauche, dans un Mémoire imprimé parmi ceux de 1720, où nous avons taché d'expliquer la formation des Cailloux. Nous avons dit alors que dans certaines circonstances, l'eau charrie une matière sablonneuse qui est si fine qu'elle nage dans l'eau qui la transporte, qu'elle y est comme dissoute. Que l'eau pourtant dépose cette poudre sablonneuse & cristalline dans plusieurs Terres ou Sables au travers desquels elle se filtre. Que cette matière déposée entre de purs Sables, en lie les grains ensemble. Que les grains sensibles d'un Sable ainsi liés, forment des Pierres de Grès. Que quand la même matière se dépose entre les molécules de Terre, & qu'elle les lie, qu'elle compose des Pierres communes, telles que nos Pierres à bâtir, qui diffèrent entr'elles selon la qualité de la Terre, dont les grains ont été liés ensemble, & aussi selon la quantité de la matière employée à les lier. Enfin que la matière cristalline introduite dans des Terres compactes, comme les Bols, les Glaïses, &c. & dans des Pierres spongieuses, formoit des Cailloux qui, dans la dernière circonstance, étoient des Pierres, qui elles-mêmes s'étoient pétrifiées de nouveau, qui étoient devenues plus Pierre, qu'elles ne l'étoient en leur premier état. Ces explications sur la nature des Cailloux, qui ne manquent pas de vrai-semblance, sont de plus prouvées, dans le Mémoire que je viens de citer, par des observations très-précises & très-décisives. Mais ni ces observations, ni les raisonnements qui les précèdent, ne nous apprennent point s'il y a des Pierres où la Terre reste sous sa forme de Terre; s'il y a des Pierres aussi grossièrement construites avec la Terre que les Grès le sont avec le Sable; si comme les

grains de Sable des Grès sont simplement liés entr'eux par une matière sablonneuse plus fine. Il y a de même des Pierres où les molécules de Terre sont simplement liés entre eux par une pareille matière cristalline; en un mot, si la Terre qui compose certaines Pierres a conservé toutes les propriétés de la Terre, & si au contraire celle qui est entrée dans la composition de quelques autres Pierres a perdu ces propriétés, & a cessé d'être Terre, ou au moins une Terre qui nous soit connoissable.

Pour éclaircir la première question, j'ai pris un morceau de Pierre d'auprès de Charenton qui ne faisoit qu'arriver au haut de la Carrière; il étoit encore tendre & presque mol. Je l'ai fait piler, il a presque été réduit en une pâte médiocrement dure. J'ai lavé cette pâte pierreuse dans une suffisante quantité d'eau, & cela à diverses reprises. L'eau s'est chargée des parties les plus légères, elle en a emporté assés les premières fois pour être rendue très-trouble. J'ai mis cette eau dans des vases, afin qu'elle y laissât déposer la matière qu'elle avoit enlevée. Je n'ai cessé de laver la pâte que quand j'ai vu que l'eau qui l'avoit lavée ne se troubloit plus.

Les différents sédiments que ces opérations m'ont fournis; m'ont mis en état de décider si cette espece de Pierre n'est composée que d'un Sable extrêmement fin, ou si elle est composée en partie d'une véritable Terre. Le premier, le plus simple essai que j'ai fait des premiers sédiments, auroit seul suffi pour me convaincre que ces sortes de Pierres contiennent une Terre pure. La pâte dans laquelle ils ont été réduits, après que je ne leur ai laissé que l'eau nécessaire pour les tenir mols, étoit aussi ductile que celles de plusieurs Terres; plus ductile que celle de quelques Marnes. Cette matière qui avoit la ductilité propre aux Terres, & qu'on ne trouve point aux Sables, étoit donc de la Terre, & non du Sable.

J'ai passé ensuite à l'épreuve de l'autre propriété de la Terre; de celle de se raccourcir en séchant. J'ai fait des lames de cette Terre, que j'ai mesurées exactement; je les ai laissées sécher à l'ombre. Elles se sont raccourcies de 5 lignes sur 6.

pouces, ce qui est un des grands raccourcissements dont soient capables les Terres pures.

Tous mes sédiments ne se sont pourtant pas raccourcis au même point; les premiers contenoient la Terre la plus pure, & celle des derniers étoit mêlée avec beaucoup de Sable. Aussi les sédiments tirés des dernières lotions n'étoient pas une pâte ductile, comme celle des premiers : au lieu que les lames des premiers se sont raccourcies de 5 lignes sur 6 pouces, celles des derniers ne se sont raccourcies que de 2 lignes sur la même longueur.

Les sédiments moyens ont eû aussi des raccourcissements moyens entre les précédents.

Enfin le résidu dont l'eau n'emportoit plus rien, sur lequel elle ne se blanchissoit pas, étoit un pur Sable.

Nous pourrions par d'autres essais déterminer plus particulièrement le caractère de la Terre contenue dans cette espèce de Pierre, déterminer de quel genre elle est, en déterminer les proportions avec le Sable. Mais cet examen ne doit pas précéder le reste de ce Mémoire; sa place même ne sera que dans les Mémoires qui le doivent suivre. C'est assés d'avoir vû que nos premières propriétés de la Terre nous font connoître qu'il y a des Pierres où elle entre sans être altérée.

La seconde question que nous avons faite, est s'il y a des Pierres dans la composition desquelles la Terre soit entrée, & où elle ne conserve plus de ses premières propriétés de Terre, celles qui la font distinguer du Sable. Pour la résoudre, j'ai fait réduire des Cailloux de Marly dans la poudre la plus fine. Elle se souûenoit dans l'eau à peu-près autant de temps que s'y souûenoit la Terre tirée de nos Pierres de Charenton. Je l'ai pétrie, elle n'a eu nulle ductilité. J'ai fait des lames de cette pâte qui ont séché sans se raccourcir sensiblement. Cependant ces Cailloux ont probablement eu pour base une Terre pareille à celle des Pierres blanches de Marly. Quand la Pierre est devenue Caillou, la Terre a donc perdu ses propriétés, elle semble être elle-même devenuë Caillou,

270 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
Sable, &c. Mais les Pierres d'auprès de Charenton nous fournissent encore de quoi mieux prouver cette espece de transformation de la Terre. On trouve de ces Pierres qui ont été changées en Cailloux, ce sont celles dont j'ai parlé dans le Mémoire de 1720, sur les Cailloux où leur métamorphose est bien prouvée. Or ces Pierres, tant qu'elles n'étoient que simples Pierres, contenoient une véritable Terre, comme il a été prouvé ci-dessus. J'ai traité des Cailloux parfaits, qui devoient sûrement leur première origine à des Pierres communes, de la même façon que j'avois traité des Cailloux de Marly, & ils ne m'ont pas plus donné d'indices de Terre. Je dis qu'ils étoient devenus des Cailloux parfaits, parce qu'il y a des Cailloux qui donnent encore des indices de matières terreuses, mais ce sont ceux dont le grain est le plus gros, & qui ont le moins de transparence.

Il résulte de-là qu'il y a des Pierres qui sont une Terre dont les grains ont été liés par la matière cristalline; mais qu'il y en a d'autres, qui sont des Pierres plus parfaites, où la matière cristalline a pénétré les grains mêmes de la Terre, à peu-près comme on imagine que les Acides pénètrent les Alkalis: mais ces conséquences demanderont à être plus détaillées & plus prouvées, elles doivent nous donner bien des éclaircissements sur la nature des différentes Pierres, & sur leur formation, ç'en est assés ici de les avoir indiquées.

Tous ceux dont la profession est de façonner la Terre en ouvrages, savent assés l'attention qu'il faut avoir à la propriété qu'ont les Terres ductiles de se retirer. Les Potiers de Terre, les faiseurs de Creusets, &c. savent qu'il faut faire sécher lentement les vases qu'ils en ont formés, qu'autrement ils sont en risque de se fendre, avant même qu'on les expose au feu qui les doit cuire; les forces avec lesquelles différentes parties tendroient à se raccourcir, n'étant pas égales, & étant supérieures à celles qui les tiennent unies, produiroient des séparations. Si une partie est épaisse, & que l'humidité s'en échappe trop brusquement, la couche la plus proche de sa surface est presque sèche, pendant que les couches intérieures sont très

abbeuvées d'eau, ou, ce qui revient au même, la couche supérieure est devenuë plus courte que celle sur laquelle elle est appliquée. Il faut donc nécessairement qu'un espace vuide tienne lieu de ce qui manque à sa longueur, elle se fend dans un, ou dans plusieurs endroits, où elle étoit plus foible; de couches en couches il en arrive de même, & alors la partie se trouve partagée par plusieurs fentes qui traversent de part en part avant même qu'elle soit absolument sèche. C'est pour n'avoir pas le désagrement de voir leurs ouvrages cassés avant qu'ils soient secs, que les ouvriers mêlent une certaine quantité de Sable avec leur Terre; ils lui en donnent ce qu'ils lui en peuvent faire porter, sans la rendre trop peu ductile. Plus le Sable fait une grande portion de la masse composée, & moins cette masse a de disposition à se retirer, moins aussi on a à craindre qu'elle sèche trop promptement.

Ceux qui font des modelles en Terre sçavent aussi dans quelles proportions il faut les faire plus grands que ne le doivent être les ouvrages qu'on moulera dessus, parce que ces modelles secs n'auront plus les dimensions qu'ils avoient lorsqu'ils étoient humides.

Mais il y a une circonstance importante où on n'a pas fait assez d'attention à cette propriété de la Terre, c'est dans la construction des murs de revêtemens. Ces murs qui doivent soutenir des Terrasses faites pour l'agrément, comme celles des Jardins, où les Terres d'ouvrages utiles comme ceux des fortifications, sont de conséquence, tant par rapport à leur usage, que par rapport à leur prix; au moins doit-on chercher à les rendre solides en leur donnant l'épaisseur & les talus ou fruits qui leur conviennent. Les dépenses auxquelles ils engagent, sont aussi souhaiter de ne leur donner que la solidité convenable. On a eu recours à la Géométrie, pour déterminer les proportions qui leur sont nécessaires; mais la Géométrie ne résout les problemes que sur les conditions qui ont été proposées, & il n'arrive que trop souvent qu'on restreint ceux de Physiques à des conditions qui en excluent d'autres que la Nature y fait entrer: ou qu'aux conditions que la Nature

présente, on en substitue de totalement différentes. Par rapport à nos murs de revêtements, on a calculé le poids qu'ils ont à soutenir pour empêcher l'éboulement des Terres. M. Couplet, qui a traité cette matière avec plus d'étendue, de détail & d'exactitude que personne, dans plusieurs de nos derniers Volumes, a sur-tout cherché à donner à ces murs toute la force nécessaire. Pour cela il a pris l'hypothèse où ils auroient à soutenir des masses de pur Sable; il a même imaginé les grains de Sable comme autant de petites boules. Des murs bâtis avec la solidité nécessaire pour tenir ferme contre des masses composées de grains si roulants sembleroient avoir bien de la force de reste, car il s'en faut beaucoup que les grains des Terres ordinaires ayent une pareille disposition à rouler. Nous voyons tous les jours de longues & hautes masses de Terres coupées à pic, pour faire des chemins, ou des excavations, dont il ne s'éboule, au bout d'une année, que quelques hottées de Terre. Si des murs eussent été élevés le long de ces Terres, le poids qu'ils auroient eû à arrêter, auroit égalé à peine celui que peut porter un homme robuste. Ce poids même n'auroit jamais été à ces hottées de Terre qui ont été détachées; ce n'est que par petites parcelles que tombe souvent cette Terre qui s'accumule avec le temps à une quantité un peu considérable; les secondes parcelles qui se détachent, ne se détachent, & n'ont de disposition à se détacher que parce que les premières sont tombées; si celles-ci eussent été soutenues, les autres n'eussent jamais fait d'effort pour sortir de leur place. Cependant, si on construit des murs contre de pareilles masses de Terre, il leur faut bien une autre solidité que celle qui leur eût suffi, s'ils eussent été bâtis en des endroits où ils eussent été isolés de toutes parts; sans quoi ils ne subsistent pas long-temps dans leur à plomb, bien-tôt quelques-unes de leurs portions se renflent, présentent des ventres. Le peu de Terre qui tend à tomber, soit verticalement, soit selon des lignes inclinées, ne semble pas capable de produire de si grands effets. Une force autrement puissante, n'agit aussi que trop souvent contre ces murs, &

toute

toute sa direction tend à les pousser horizontalement. Cette force est celle qui fait prendre aux Terres sèches une augmentation de volume à mesure qu'elles s'imbibent d'eau, qui les contraint de se renfler ; c'est une force pareille à celle qui agit sur les cordes mouillées. Nous avons déjà dit que nous ne connoissons pas la mesure de cette dernière, mais nous savons qu'elle est prodigieuse, qu'elle met une corde en état d'enlever tout poids qui ne sera pas capable de la rompre ; ou pour comparer la force de nôtre Terre qui se renfle avec une autre qui semble plus analogue, ou plutôt qui est précisément la même, elle est pareille à celle du bois qui se renfle. Or on sçait que des coins de bois, engagés secs entre d'épaisses roches, lorsqu'ils viennent à être imbibés d'eau, font un effort pour se renfler, qui force les roches à se fendre, à éclater, qui les détache, & les souleve : & c'est l'expédient le plus commode pour détacher ces lourdes masses de Pierres dont on fait les Meules de Moulin. Si donc nous considérons ce qui va arriver à une masse de Terre bien sèche, & bien compacte d'ailleurs, appliquée contre un mur, lorsque l'eau la pénétrera, nous devons nous représenter les efforts qu'elle va faire pour s'étendre, comme capables de vaincre les plus puissants obstacles.

Il est vrai que ce qu'il n'est pas permis, à la Terre qui s'imbibe, de prendre d'accroissement, de dimensions dans un sens, elle le prend dans un autre. Si la Terre, qui sèche, remplissoit un vase, vient à s'humecter, en se gonflant elle s'élèvera au dessus des bords du vase, qui est le seul côté où il lui soit permis de s'étendre : de même si les obstacles qui contiennent une masse de Terre, des murs, par exemple, s'opposent à l'extension qu'elle veut prendre dans une direction horizontale, elle sera forcée à s'élever. Mais aussi quels terribles efforts le mur a-t-il à soutenir dans quelques circonstances ! Qu'un lit de Terre sèche, posé à 10 pieds de profondeur, vienne à être pénétré par l'eau, l'effet de la force qui le porte à s'étendre horizontalement, ne sera détruit que quand l'obstacle qui s'oppose à cet effet sera plus fort que la

résistance de la masse de la Terre supérieure à être soulevée: Il faut donc que cette résistance du mur tienne alors contre le poids d'une couche de Terre de 10 pieds d'épaisseur sur une longueur égale à la sienne, & sur une largeur plus ou moins grande, selon l'étendue du lit de Terre dans ce sens.

L'action de la couche de Terre, qui se dilate, contre le mur, n'est pas seulement proportionnée au poids de la masse qu'il lui faut soulever pour se dilater, elle est encore augmentée par la résistance qui vient de la tenacité des parties de la Terre les unes avec les autres. La force des coins mouillés, qui enlève des portions d'un rocher, n'est pas seulement égale au poids de ces portions ; avant de commencer à les soulever, elle a eu à vaincre l'engrènement ; l'adhésion de cette partie avec le reste, il a fallu la détacher dans le premier instant qu'elle a été soulevée. Les parties de la Terre ne sont pas liées entr'elles aussi solidement que le sont celles d'une roche, leur tenacité est pourtant considérable dans certaines Terres. D'ailleurs la couche qui commence à se renfler, ne se renfle pas par-tout également, dès-lors elle souleve plus la masse qu'elle porte, en certains endroits que dans d'autres, & de-là il suit qu'il faut vaincre la résistance de la tenacité de la Terre en bien des endroits. Une expérience, que je vais rapporter, prouve combien il faut avoir de considération à cette tenacité, & que le poids à soulever n'est pas à beaucoup près la mesure de l'effort nécessaire.

J'ai fait une lame de Terre glaise, qui, quand elle a été sèche, a eu environ 9 pouces de longueur, un de largeur & 5 lignes d'épaisseur en quelques endroits, & dans d'autres 6. Je l'ai posée à plat sur le mur d'appuis d'une fenêtre, de façon qu'un de ses bouts touchoit un des murs montants de la même fenêtre. J'ai appliqué contre son autre bout une masse de Fer, dont il est inutile de déterminer le poids absolu ; mais ce que j'ai cherché à déterminer, & qui étoit nécessaire, c'est le poids capable de faire glisser cette masse horizontalement. L'expérience m'apprit qu'il devoit être de 10 livres.

Contre les côtés de la lame de Terre j'ai posé deux barres de Fer, qui comme deux regles les touchoient tout du long. Ainsi cette lame de Terre étoit arrêtée par les deux côtés & par les deux bouts, le dessus seul étoit libre & à découvert. En cet état je l'ai arrosée d'eau, qui n'a pas été long-temps à la pénétrer. Je voulois éprouver si l'augmentation du volume se feroit toute en hauteur, lorsque dans les autres sens il y avoit des obstacles à vaincre plus considérables que le poids de la Terre. Je n'ai point été attentif à observer l'augmentation qui auroit pû se faire en largeur, une lame si étroite, eût-elle été libre, n'en eût pas pris une bien sensible en ce sens; mais j'ai observé soigneusement s'il s'en feroit en longueur, & j'ai vû qu'il s'y en est fait une. La masse de Fer, qui résistoit de 10 livres, a été portée à environ 2 lignes $\frac{1}{2}$ par de-là l'endroit où je l'avois placée. Cependant cette résistance de 10 livres étoit une force beaucoup plus considérable que celle qu'il eût fallu pour soulever toute la Terre qui avoit agi; cette Terre ne pouvoit pas peser plus de quelques onces. L'engrénement des parties les unes dans les autres, leur disposition à s'étendre dans une certaine direction, a donc mis la force dilatative en état d'agir efficacement contre le poids qui s'opposoit à l'allongement. Il est vrai pourtant que l'allongement n'a pas été aussi considérable qu'il l'eût été, si la bande n'eût pas trouvé d'obstacle à repousser; elle se fût alors allongée de plus de 4 lign. $\frac{1}{2}$, au lieu qu'elle ne s'est allongée que de 2 lign. $\frac{1}{2}$.

Quand des murs sont appuyés contre des Terres compactes, sèches, & que l'eau parvient à les pénétrer jusqu'à une certaine profondeur, ces murs ont donc besoin d'une prodigieuse force pour se soutenir. Aussi l'expérience a-t-elle appris que les temps à craindre pour les murs de Terrasses sont les temps de pluies abondantes; alors les Terres sont imbibées à une profondeur considérable d'une eau qui met en action des forces immenses. Les pluies d'orage qui viennent après une longue sécheresse, sont par-là extrêmement à craindre.

Si la force de la dilatation de la Terre va jusqu'ou nos

raisonnements & l'expérience précédente semblent la porter; on sera étonné qu'il y ait des murs de revêtements qui puissent se soutenir pendant une année entière. Il est vrai aussi qu'il leur faudroit une épaisseur prodigieuse pour soutenir la poussée des Terres qui se dilatent, si bien des causes ne concourroient à en affoiblir l'effet. Les Terres qu'ils ont à arrêter se dilatent d'autant moins qu'elles sont plus sablonneuses; pendant qu'il est ordinaire de trouver des Terres grasses, qui étant sèches, ont dans chaque dimension $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{1}{12}$ de moins que lorsqu'elles sont humides; c'est-à-dire, des Terres que l'humidité étend de $\frac{1}{3}$, ou même de $\frac{1}{12}$ en tout sens; il est ordinaire aussi de trouver des Terres sablonneuses que l'humidité n'allongera que de $\frac{1}{29}$, ou $\frac{1}{30}$, & quelquefois moins.

Les Terres les plus grasses & les plus compactes, celles dont l'eau peut augmenter le plus les dimensions, lorsqu'elle les pénètre, sont aussi les plus difficiles à pénétrer; & lorsqu'elles ont été une fois imbibées d'eau, elles la laissent échapper difficilement; de sorte que celles qui se trouvent à une certaine profondeur, ne deviennent jamais sèches à un point où leur force de se dilater puisse ensuite être mise en jeu dans toute son étendue.

Il est sur-tout à remarquer que si un mur de revêtement étoit construit dans une circonstance où la masse de Terre qu'il a à arrêter, est aussi imbibée d'eau qu'elle le peut être; qu'il n'auroit jamais rien à craindre des effets de cette Terre pour se dilater, si cette masse de Terre restoit précisément la même. Quand cette Terre se sécheroit, elle se retireroit un peu du mur; il s'y feroit des fentes, des crevasses en une infinité d'endroits, qui seroient les places nécessaires pour la recevoir, lorsqu'elle viendroit à se gonfler de nouveau: mais malheureusement les vuides des fentes, des crevasses, faites par la Terre qui se retire, ne se conservent pas dans leur entier. Les mouvements des hommes & des animaux, le vent; la pluie, y portent des corps qui les remplissent en partie; de sorte que quand la Terre vient à être imbibée d'eau, elle

ne trouve plus pour se loger ces mêmes places qu'elle avoit abandonnées en se séchant, ou au moins elle ne les trouve plus en leur entier; & c'est proportionnellement à ce qu'elle est mise plus à l'étroit qu'elle fait des efforts contre les murs qui s'opposent à sa dilatation. Il résulte pourtant de-là que la circonstance la plus avantageuse pour construire des murs de Terrasse, est celle où les Terres, le long desquels ils sont élevés, sont le plus abreuvées d'eau qu'il est possible.

Tout ce que nous venons d'observer prouve que l'épaisseur qui suffiroit à des murs de revêtements opposés à certaines Terres, ne suffiroit pas à ceux qui seroient opposés à d'autres Terres. Les Terres les plus à craindre pour eux, sont celles qui joignent à la qualité de se dilater beaucoup, celle de se laisser aisément pénétrer par l'eau, & de laisser évaporer aisément l'eau dont elles ont été pénétrées. Elles sont alors sujettes à de plus fréquentes alternatives de contraction & de rarefaction, & à des alternatives plus considérables. Les différentes épaisseurs qui conviennent à différents murs de revêtements, selon la qualité des Terres qui agissent contre eux, ne seroient peut-être pas aisées à déterminer. Des expériences sur les extensions dont sont susceptibles différentes Terres, aideroient pourtant à établir quelques règles, à donner des limites entre lesquelles on pourroit se tenir. Nous rapporterons dans la suite un grand nombre d'expériences sur les dilatations des différentes Terres, qui pourront aider à établir ces règles qui nous paroissent à désirer.

Une remarque, qui d'avance me paroît essentielle, c'est que plus il y aura de gravois, de pierrailles amoncellées entre le mur & la masse de Terre, & moins la poussée de la Terre sera à craindre; on lui ménagera par-là des vuides qu'elle pourra occuper lorsqu'elle se gonflera: des gravois amoncellés dans la masse même de la Terre n'y pourroient produire qu'un utile effet. Du reste je ne me suis pas proposé de rechercher ici tout ce qui conviendrait pour assurer la durée des murs de revêtements, j'ai seulement voulu faire remarquer qu'il importoit, quand on les construit, de faire attention à la

propriété qu'ont les Terres de se gonfler, lorsqu'elles s'imbibent d'eau; & que c'est une attention, toute importante qu'elle est, que je ne sçache point qu'on ait eû jusqu'ici.

Nous ne nous sommes attachés encore qu'à considérer les deux propriétés de la Terre qui la distinguent des Sables & de tous les Minéraux qui nous sont connus, aussi ne l'avons-nous encore regardée que selon des vûes très-générales. Nous en ferons dans la suite un examen plus particulier; les variétés qu'elle nous offre, méritent chacune de l'attention; elles nous montrent de la Terre sous bien des apparences différentes. La plupart de ces variétés ont été remarquées par ceux qui aiment l'Histoire naturelle, mais on a négligé d'en faire usage pour bien caractériser les différentes sortes de Terres; dans les ouvrages où il est fait mention de quelque espece de Terre, il nous est ordinairement difficile de démêler à laquelle de celles que nous connoissons, elle doit être rapportée. Nous avons donc crû qu'il seroit utile à l'Histoire naturelle, à la Physique & aux Arts, de distribuer les différentes Terres en classes, ou en genres premiers, en genres seconds & en especes. Les premières divisions doivent être tirées en partie des deux premières propriétés qui nous ont tant arrêté. Mais les caractères des genres subalternes & des especes seront fournis par des différences propres à chacun de ces genres, ou à chacune de ces especes.

Des sources de différences se présenteront en nombre selon les rapports sous lesquels nous considérerons les Terres. Quoique communément elles soient faites par grains, elles ne sont pas composées de grains également fins. Il y en a qui au lieu d'être un amas de grains, dont on n'apperçoit pas l'arrangement, sont composées de feuilles aussi distinctes que celles des Ardoises. Les Peintres sçavent combien est grande la variété des couleurs des Terres, & c'est une connoissance qu'ils mettent à profit. L'action du feu sur les Terres nous fait voir combien elles diffèrent les unes de autres. Il y en a qui se vitrifient plus aisément qu'aucune matière à nous connue; d'autres ne sont presque pas vitrifiables, elles se

soutiennent contre la plus violente action du feu de nos fourneaux : il y en a que le feu calcine, au lieu de les vitrifier. Quand quelques-unes ont souffert le feu, qu'elles sont devenues ce que nous appellons de la *Terre cuite*, elles sont rouges; d'autres alors sont blanches, d'autres sont grises. Il nous suffit d'indiquer actuellement ces sources de variétés, mais il y en a deux autres auxquelles nous nous arrêterons un peu plus, parce qu'on ne les a pas, ce me semble, assez bien remarquées.

Je veux d'abord parler de l'effet des Acides sur les Terres. En général elles sont regardées comme des matières très-alkalines, & des plus alkalines. Aussi des acides foibles, tels que le Vinaigre, versés sur quantité de Terres, y excitent une fermentation subite, accompagnée d'une ébullition considérable. J'ai observé que ces mêmes acides, & même les plus violents, tels que l'Esprit de Nitre, l'Esprit de Sel, &c. versés sur d'autres Terres, n'y causent pas plus d'ébullition que l'eau simple y en causeroit; au lieu qu'alors les premières Terres se couvrent sur le champ d'une écume épaisse, qui s'élève haut, à peine peut-on observer quelques petites bulles d'air qui s'échappent des dernières. Les Esprits acides ne viennent gueres à bout de ramollir plus vite les Terres avec lesquelles ils ne bouillonnent pas, que feroit l'eau commune.

La manière dont les Acides agissent sur la plupart des Terres sur lesquelles ils peuvent le plus, est différente de celle dont ils agissent sur les Métaux. Ils produisent dans les Terres de plus promptes ébullitions, mais leur action se termine presque là; je veux dire, qu'au lieu que les liqueurs acides se saisissent des Métaux avec qui elles ont fermenté, qu'au lieu qu'elles les tiennent suspendus, qu'elles se les approprient, que les Acides n'enlèvent la Terre que pour la laisser précipiter peu-après.

Il nous reste encore à examiner une propriété des Terres qu'on ne trouve ni aux Cristaux, ni aux Talcs, ni aux Gyps, ni aux Sables parfaits, c'est-à-dire, comme nous l'expliquons ailleurs au long, aux Sables qui sont purement Sables,

qui ne sont pas des composés, où la Terre entre pour quelque chose. Cette propriété est d'avoir de l'odeur. Toutes les Terres sont capables de faire une impression sensible sur notre odorat, & il y en a de très-communes qui en peuvent faire une extrêmement forte. Cependant c'est une propriété de la Terre à laquelle on ne paroît avoir fait assez d'attention, & à laquelle même on n'a presque pas pris garde ; aussi ne se fait-elle appercevoir que dans quelques circonstances, qui sont rarement celles où ceux même qui sont capables d'observer examinent la Terre. Quand on en prend un morceau entre les mains pour l'examiner, il est ordinairement sec ; alors les Terres les plus capables de donner de l'odeur, ne sentent rien, ou presque rien. Mais qu'on mouille légèrement ce morceau de Terre, qu'on ne le mouille qu'autant qu'il faut pour le pétrir en pâte ferme, & que quelques instants après on l'approche du nez, il y a telle Terre alors qui fera sentir une odeur forte & pénétrante. Si au lieu d'humecter simplement la même Terre, on la noie d'eau, si on en fait une pâte trop liquide, elle ne donnera qu'une odeur beaucoup plus foible : l'odeur qui s'en exhalera, n'aura de la force que quand la pâte, devenue épaisse, commencera à sécher. Une autre circonstance encore a empêché de faire attention aux odeurs des différentes Terres, c'est que leur atmosphère ne s'étend pas loin. Un morceau de Terre qui est capable d'affecter, même trop fortement, notre odorat, n'étant éloigné du nez que de deux ou trois pouces, n'y fera aucune impression sensible, si on l'en éloigne d'un pied, ou davantage.

Si la propriété de répandre de l'odeur est commune à la Terre avec un grand nombre d'autres corps, la circonstance où elle en donne le plus, lui est particulière, ou presque particulière. Quantité de corps n'ont de l'odeur pour nous que quand ils sont échauffés, & quelques-uns en ont d'autant plus qu'ils sont plus échauffés ; il faut que le feu aille jusqu'à en détruire d'autres pour en faire sortir des odeurs. Les Cheveux, la Corne, le Cuir, répandent quand ils se brûlent des odeurs très-fortes ; la Corne & les Cheveux ne sentent rien en toutes
autres

autres circonstances; les Pyrites, le Cobolt, & bien d'autres matières minérales, réduites simplement en poudre, ne sentent rien, ou sentent peu. La poudre des premiers, jetée sur des charbons allumés, répand une forte odeur de Soufre, & celle de la seconde matière répand une désagréable & dangereuse odeur d'Ail. Les Terres qu'on fait cuire donnent aussi de l'odeur, mais une odeur très-différente de celle qu'elles ont étant humectées, & bien moins forte. Il y a des fleurs dont l'odeur est plus sensible pendant la fraîcheur du soir & du matin que pendant la chaleur du midi; mais si on excepte les farines, il y a peu de matières qui répandent plus d'odeur, quand elles ont été réduites en pâte au moyen de l'eau, que quand elles sont en une poudre presque sèche.

Nous ne savons exprimer l'espèce de sentiment que produit en nous une Rose, un Oeillet, une Jonquille, que par les termes d'odeur de Rose, d'Oeillet, de Jonquille: il ne nous est pas possible de faire connoître autrement ce qui se passe chés nous à l'occasion de l'approche d'une Rose, d'un Oeillet; nous ne saurions décrire nos sentiments, nous ne pouvons qu'indiquer en quels cas ils naissent, & nous pensons qu'il en naît de semblables dans les autres en pareilles circonstances, quoiqu'il nous soit impossible de reconnoître si le sentiment dont ils sont affectés est précisément semblable au nôtre. En un mot on ne sauroit donner idée de l'odeur d'une Rose, à qui n'auroit jamais senti de Roses. Les odeurs de nos différentes Terres ont entr'elles des différences comme en ont celles de différentes fleurs, mais de même il est difficile, & souvent impossible, de les caractériser. On ne peut gueres les faire connoître que par le nom de l'odeur de la Terre même qui les donne, c'est-à-dire, en renvoyant à sentir cette Terre, comme nous renvoyerions à sentir une Rose celui à qui nous voudrions faire connoître son odeur. Les odeurs des Terres, en général, sont des odeurs particulières; il y en a pourtant quelques-unes qui ressemblent assés à d'autres qui nous sont connües. Il y a, par exemple, des Terres dont l'odeur approche de celle du Poivre.

Lorsqu'il survient en Eté une petite pluie, qui humecte légèrement des Terres qui avoient été desséchées pendant une suite de jours chauds, nous sentons dans toutes les campagnes une odeur qui nous plaît. On l'attribue ordinairement aux Plantes des Bois ou des Jardins où l'on se promene. Mais si on fait attention que les champs les plus arides, que ceux qui ne sont couverts que d'un chaume sec, ou de Plantes aussi sèches, en répandent alors une semblable, on pensera que la Terre même est la source de cette odeur, qui ne fait sur nous qu'une légère & douce impression, parce que nôtre tête est à une distance où l'atmosphère de cette odeur ne s'étend qu'à peine, & ou au moins elle est très-affoiblie ; si on se couche sur la Terre, on sera bien frappé d'une odeur autrement forte.

Quand un morceau de Terre a été légèrement humecté, & quand l'eau dont il a été pénétré s'évapore, elle emporte donc avec soi, de l'intérieur de la Terre, de petits corps capables d'affecter nôtre odorat. J'ai voulu voir s'il seroit possible d'épuiser cette odeur de la Terre. J'ai arrosé & fait sécher successivement de petits gâteaux de Terre pendant plus de quinze jours, & cela à diverses reprises chaque jour : à la dernière de ces expériences je n'ai point remarqué qu'aucun des gâteaux donnât moins d'odeur qu'à la première. S'il y a des corps dont l'odeur se dissipe aisément, il y en a d'autres qui la conservent, & qui en fournissent bien au de-là de ce qu'on pourroit imaginer. Des corps parfumés de Musc en conservent l'odeur pendant des siècles.

Au reste, de ce que les différentes Terres ne donnent de l'odeur qu'après qu'elles ont été humectées par l'eau, il semble qu'on en doive conclurre que la matière qui fait les odeurs des Terres est trop pesante pour être élevée par la simple chaleur de l'air, qu'il est nécessaire que l'eau la dissolve, qu'elle s'en charge, qu'elle l'emporte ensuite avec soi. Peut-être même que l'eau ne peut pas l'emporter bien-loin, & de-là vient que l'atmosphère de l'odeur des Terres n'est pas fort étendu. Il résulte encore de-là que quand l'eau pénètre les

grains de Terre, qu'elle y occasionne quelque altération. Les bulles d'air qui sortent alors, disposent à penser qu'il s'y fait une fermentation. On pourroit cependant croire que ces bulles ne s'échappent que comme l'air s'échappe d'une bouteille qu'on remplit d'eau. Mais ici il y a quelque chose de plus : dès que l'eau qui sort de la Terre est en état d'affecter nôtre odorat autrement qu'elle l'affectoit avant d'y être entrée, il semble qu'elle y a occasionné quelque fermentation ; & si cette fermentation étoit bien prouvée, on auroit une cause très-probable de l'augmentation de volume qui survient à chaque grain de Terre pendant que l'eau le pénètre. C'est ce que nous examinerons ailleurs.



SUITE DES OBSERVATIONS DE LA COMETE

*Qui a commencé à paroître à la fin de Juillet
de l'année 1729.*

Par M. CASSINI.

19 Avril
1730.

NOUS avons déjà rendu compte à l'Académie des Observations d'une Comete qui avoit commencé à paroître le 31 Juillet de l'année 1729 entre la Constellation du petit Cheval & celle du Dauphin, & que nous avions continué d'observer jusqu'au 10 Novembre de la même année.

Son mouvement propre, qui étoit contre la suite des Signes de l'Orient vers l'Occident, semblable à celui des Planetes supérieures, lorsqu'elles sont en opposition avec le Soleil, nous fit juger d'abord que cette Comete, qui se trouvoit aussi dans la même situation à l'égard de la Terre & du Soleil, avoit réellement, de même que toutes les autres Planetes, un mouvement de l'Occident vers l'Orient suivant la suite des Signes, & que son mouvement, rétrograde en apparence, n'étoit que l'effet du mouvement de la Terre autour du Soleil, qui étant plus prompt que celui de la Comete, la laissoit en arrière, quoiqu'elles s'avançassent toutes les deux du même sens. Que par conséquent le mouvement rétrograde de cette Comete paroîtroit se ralentir jusqu'à ce qu'il cessât entièrement, de même qu'on l'observe dans les Planetes supérieures après qu'elles ont passé leurs oppositions ; qu'on la verroit ensuite se mouvoir dans une direction contraire, & aller, suivant la suite des Signes, avec une vitesse proportionnée à la distance & à la situation où elle se trouveroit à l'égard de la Terre & du Soleil.

Toutes ces apparences arriverent successivement comme

nous les avions prévûs ; car cette Comete, après avoir passé près de la queue du Dauphin, s'avança vers l'Aigle avec un mouvement rétrograde qui se rallentit insensiblement jusqu'au 19 Octobre, après lequel on la vit aller suivant la suite des Signes, ayant parcouru 13 minutes de l'Occident vers l'Orient dans l'espace de 8 jours, depuis le 19 Octobre jusqu'au 27 du même mois.

On ne pouvoit appercevoir alors cette Comete que par le secours des Lunettes, où on la voyoit en forme d'une Etoile nébuleuse dont la lumière étoit très-foible, mais dont le diametre ne laissoit pas d'occuper au moins une minute & demie de degré de la circonférence du Ciel, c'est-à-dire, qu'elle étoit encore plus grande en apparence qu'aucune des Planetes que nous appercevons dans le Ciel, à la réserve de la Lune.

Il est vrai que l'on peut attribuer la grandeur apparente de cette Comete à la chevelure qui l'environnoit, & qui se confondant avec son disque, en augmentoit considérablement l'étendue.

Le mauvais temps qu'il fit ensuite, joint au clair de la Lune, nous fit cesser de voir cette Comete pendant près de quinze jours. Cependant comme par la comparaison des Observations précédentes, nous sçavions à peu-près l'endroit du Ciel où elle devoit se trouver chaque jour, & que sa grandeur, qui étoit encore fort sensible dans le temps que nous l'avions perdu de vûë, nous faisoit esperer qu'elle seroit encore visible pendant quelque temps, nous essayâmes de la chercher le 10 Novembre, jour auquel le Ciel fut serein, ce qui nous réussit, & nous la trouvâmes plus avancée que le 27 Octobre d'un degré & quelques minutes, suivant la suite des Signes, avec un mouvement direct qui avoit accéléré depuis les dernières Observations que l'on en avoit faites.

Dans le compte que nous en rendîmes à l'Académie dans la dernière Assemblée publique, nous promîmes de donner la continuation des Observations que nous espérons d'en faire dans la suite. En effet, quoiqu'elle eût déjà paru l'espace

de trois mois dix jours, qui est un intervalle plus grand que celui d'aucune Comete qui ait été observée depuis plus d'un siècle, nous avons continué de l'appercevoir encore plus de deux mois & demi jusqu'au 21 Janvier de cette année 1730, après quoi le mauvais temps & le clair de la Lune qui survinrent, ne nous permirent plus de l'observer.

Elle étoit alors au dessus des Etoiles septentrionales de la tête du Dauphin, & répondoit au 18^{me} degré du Signe du Verseau, le Soleil étant au premier degré du même Signe ; ainsi elle ne se trouvoit éloignée en longitude que de 17 degrés du Soleil dont elle s'approchoit continuellement, ce qui ôtoit toute espérance de pouvoir encore l'appercevoir, parce qu'elle se devoit trouver alors près des rayons du Soleil où les Etoiles les plus éclatantes disparoissent.

La route qu'elle avoit faite depuis que son mouvement apparent étoit direct, étoit à peu-près égale à celle qu'elle avoit parcouru étant rétrograde, de sorte qu'elle se trouvoit répondre au même degré de l'Ecliptique où on avoit commencé à l'appercevoir, mais avec une latitude qui dans l'intervalle de 5 mois & 22 jours avoit augmenté de 14 degrés vers le Nord.

Après les premières Observations que nous fîmes de cette Comete, nous nous contentâmes de faire voir le rapport de son mouvement avec ceux des Planetes supérieures dans le temps de leurs oppositions avec le Soleil. Nous essayâmes même de démontrer que cette Comete étoit placée entre les orbes de Mars & de Jupiter, en supposant que son mouvement étoit réellement de l'Occident vers l'Orient suivant la suite des Signes.

La supposition du mouvement de cette Comete de l'Occident vers l'Orient, sur laquelle nôtre démonstration étoit fondée, pouvoit n'être pas reçûe généralement de tous les Philosophes, puisqu'il s'est trouvé de nôtre temps, de très-habiles & grands Géometres, qui ont crû que les Cometes faisoient leur mouvement autour du Soleil indifféremment de tous les sens. En effet on ne peut douter qu'on n'en

ait observé plusieurs, dont le mouvement apparent ait paru contre la suite des Signes, telles que celles de 1698, 1702 & 1706.

La Comete du mois d'Avril de l'année 1702 est remarquable entre les autres, en ce que son mouvement journalier étoit au commencement de son apparition de 15 degrés contre la suite des Signes, le lieu de la Terre étant éloigné de celui de la Comete d'environ trois Signes, qui est la situation où les Planetes paroissent stationnaires.

On peut représenter cependant avec assez de précision son cours, & lui attribuer un mouvement réel suivant la suite des Signes, en supposant qu'elle étoit placée au commencement de son apparition beaucoup plus près de la Terre que du Soleil, ce qui d'ailleurs s'accorde assez bien à la rapidité de son mouvement apparent, qui étoit quinze fois plus grand que celui de la Terre. Car cette Comete étant au moins aussi éloignée du Soleil que la Terre l'est de cet Astre, comme il est aisé de le démontrer, il y a lieu de supposer que son mouvement réel à l'égard du Soleil n'étoit pas à beaucoup près si grand que celui que l'on y a observé, & que sa rapidité apparente n'étoit causée que par sa proximité de la Terre; ce qui se trouve d'ailleurs confirmé par la Parallaxe que M.^{rs} Bianchini & Maraldi y ont observée de 13 minutes.

On trouvera de même qu'on peut représenter également bien les mouvements rétrogrades des autres Cometes dont nous venons de parler, en leur donnant un mouvement réel suivant la suite des Signes. Mais on n'a pas jugé devoir entrer dans ce détail, qui demande trop de discussion, & qui excéderoit les bornes que nous nous sommes prescrites pour ce Mémoire.

Ce que l'on vient d'exposer suffit pour faire voir que les mouvements de diverses Cometes qui ont paru rétrogrades, ne peuvent point servir pour combattre le système de Descartes & celui des Tourbillons, suivant lesquels les Corps célestes doivent se mouvoir tous dans le même sens suivant la suite des Signes.

Pour nous renfermer dans ce qui regarde cette dernière Comete, nous ferons voir d'abord que le mouvement direct que nous lui avons attribué comme étant le plus vrai-semblable, s'est trouvé par la suite de nos Observations, susceptible d'une démonstration exacte que nous tâcherons d'expliquer, sans qu'il soit nécessaire d'y employer de Figures.

On suppose pour cela que les Étoiles fixes, avec lesquelles on compare les Cometes pour déterminer leur situation dans le Ciel & à l'égard de l'Écliptique, sont à une distance si grande, que le chemin que la Terre parcourt sur son orbe dans l'espace de plusieurs jours n'y a aucun rapport sensible.

Cette supposition doit être admise, puisque dans les recherches les plus exactes qui ont été faites pour déterminer la distance des Étoiles fixes à la Terre par le moyen de son mouvement sur son orbe annuel, l'angle que font entr'elles deux lignes tirées d'une Étoile fixe à la Terre placée aux deux extrémités de cet orbe à la distance de plus de 60 millions de lieues, a été trouvé à peine d'une minute de degré.

Suivant ce principe, on peut considérer toutes les lignes tirées de la Terre en différents endroits de son orbe à une même Étoile fixe, comme des paralleles éloignées l'une de l'autre d'un intervalle mesuré par la quantité du mouvement de la Terre de l'Occident vers l'Orient.

S'il se trouve donc qu'une Comete, après avoir passé près d'une Étoile fixe, retourne à cette Étoile après quelque espace de temps, ou, ce qui revient au même, si elle retourne au même point de l'Écliptique, où elle étoit quelques jours auparavant, il en résulte nécessairement qu'elle s'est avancée, de même que la Terre, de l'Occident vers l'Orient, d'une quantité comprise entre les deux paralleles tirées de la Terre au même point de l'Écliptique, qui sera plus ou moins grande, suivant la différente direction & inclinaison de l'orbe de la Comete.

C'est ce qui est arrivé dans le cours de nos Observations, pendant lequel nous l'avons vûe répondre successivement aux mêmes lieux de l'Écliptique, où elle s'est trouvée dans les précédentes

précédentes Observations. Ainsi il est démontré que cette Comete, rétrograde en apparence, avoit un mouvement réel de l'Occident vers l'Orient, & que par conséquent, suivant ce que j'avois exposé dans le Mémoire précédent, elle se trouvoit placée entre les orbes de Mars & de Jupiter.

Pour déterminer présentement avec plus d'exactitude sa distance au Solcil & à la Terre, de même que la quantité, la direction de son mouvement propre & les autres éléments de sa Théorie, nous pourrions employer la Méthode générale que nous avons proposée dans les Mémoires de l'Académie de l'année 1727. Mais comme les circonstances de cette Observation nous fournissent une Méthode nouvelle, beaucoup plus simple & plus aisée pour déterminer ces éléments, nous l'employerons ici, après en avoir donné une idée la plus sensible qu'il nous sera possible.

On choisira pour cette recherche trois Observations exactes, dont deux ont été faites, lorsque la Comete s'est trouvée répondre à un même point de l'Ecliptique, & la troisième à un autre lieu quelconque. Si ces trois Observations avoient été dirigées à un même lieu de l'Ecliptique, il est clair, par les raisons que nous avons rapportées ci-dessus, que le mouvement de cette Comete auroit été mesuré par l'intervalle compris entre les lignes tirées de la Terre, à ce même point, que l'on peut regarder comme paralleles entre elles; ainsi connoissant la direction & l'inclinaison de la route de la Comete, de même que l'intervalle entre ces paralleles, qui est mesuré par le mouvement de la Terre sur son orbe, on trouveroit la quantité du mouvement de la Comete, mais non pas sa distance à la Terre, que l'on pourroit supposer telle que l'on voudroit.

Mais si la ligne tirée de la Terre dans une troisième Observation ne se rapporte pas au même lieu de l'Ecliptique, où étoient les deux autres, mais qu'elle leur soit inclinée, il est évident que la Comete a dû passer en de-çà ou au de-là du point du concours de ces lignes, & que par conséquent

son inclinaison plus ou moins grande doit déterminer sa véritable distance à la Terre.

Soit dans la Figure ci-jointe T & B , le vrai lieu de la Terre sur son orbe annuel dans deux différentes Observations. TC , BR , deux lignes tirées de la Terre au vrai lieu de la Comete que l'on suppose répondre au même point de l'Ecliptique, & que l'on peut regarder comme paralleles entre elles. PC la ligne tirée de la Terre à la Comete dans une Observation précédente. Du point T soit menée la ligne TD perpendiculaire à BR que l'on prolongera en G , enforte que TG soit à TD , comme l'intervalle entre le temps de l'Observation de la Comete, lorsque la Terre étoit aux points T , & B est à l'intervalle entre le temps de l'Observation, lorsque la Terre s'est trouvée aux points T & P . Du point G soit menée la ligne GL parallele à BR & TF qui rencontre PC au point L . Je dis que supposant que la Comete ait parcouru des espaces égaux en temps égaux sur une ligne sensiblement droite, le point L marque le vrai lieu de la Comete réduit à l'Ecliptique, lorsque la Terre étoit au point P . Car si l'on tire du point L une ligne quelconque LFR comprise entre les lignes tirées de la Terre au lieu de la Comete dans les trois Observations, à cause des paralleles GL , BR , TF , on aura LF à RF , comme TG à TD , c'est-à-dire, par la construction comme l'intervalle entre la première & la seconde Observation est à l'intervalle entre la seconde & la troisième, & par conséquent le point L marquera le vrai lieu de la Comete réduit à l'Ecliptique dans toutes les directions qu'on ait pû lui attribuer.

Si l'on choisit presentement une autre Observation où la Terre étant, par exemple, au point A , la ligne AI détermine son vrai lieu sur l'Ecliptique. On prolongera TD en H , enforte que DH soit à DT comme l'intervalle de temps entre la troisième & la quatrième Observation est à celui qui est entre la seconde & la troisième; & du point H , on tirera la ligne HI parallele à BR , qui rencontrera AI au point I .

Ce point représentera le lieu de la Comète dans la quatrième Observation, & la ligne LI tirée du point L au point I , mesurera la quantité du mouvement de la Comète réduit à l'Ecliptique depuis la première jusqu'à la quatrième Observation. Car IR est à RF comme DH est à DT , c'est-à-dire, par la construction comme l'intervalle entre la troisième & la quatrième Observation est à celui qui est entre la seconde & la troisième. Mais nous venons de démontrer que LF est à FR comme l'intervalle entre la première & la seconde Observation est à celui qui est entre la seconde & la troisième. Donc la ligne LI est telle que ses portions LF , FR , RI , comprises entre les lignes PC , TC , BR & AI , tirées de la Terre au lieu de la Comète dans ces différentes Observations, sont entr'elles comme les intervalles de temps entre ces Observations, c'est-à-dire, comme les espaces parcourus, & par conséquent la ligne $LFR I$ représente le cours véritable de la Comète réduit à l'Ecliptique. Ce qu'il falloit trouver.

Pour déterminer en nombres tous ces éléments, on trouvera par la théorie du Soleil, les distances SP , ST , SB , SA , de la Terre au Soleil dans le temps de ces quatre Observations, & les angles PST , TSB , BSA , compris entre ces lignes; & dans les triangles PST , TSB & BSA , dont les côtés sont connus & les angles compris entre ces côtés, on aura la valeur des cordes PT , TB , BA , & des angles SPT , STP , STB , SBT , SBA & SAB . Retranchant l'angle STP de l'angle STC qui mesure la distance de la Comète au Soleil au temps de la seconde Observation, on aura l'angle CTP & dans le triangle CTP , dont le côté TP est connu, de même que l'angle CTP & l'angle PCT , différence entre le vrai lieu de la Comète dans les deux premières Observations, on aura la valeur du côté CP .

Retranchant pareillement l'angle SBT de l'angle SBR , distance de la Comète au Soleil au temps de la troisième Observation, on aura l'angle TBD , & dans le triangle BDT rectangle en D , l'angle DBT & l'hypothénuse BT étant

connus, on trouvera la valeur de DT . On fera ensuite comme l'intervalle de temps entre la seconde & la troisième Observation est à celui qui est entre la première & la seconde, ainsi DT est à TG ou LK & dans le triangle CKL rectangle en K , dont le côté LK est connu, & l'angle PCT ou LCK , on trouvera le côté CL , qui étant retranché de la ligne CP , déterminée ci-dessus, donne la valeur de LP , distance de la Terre à la Comète dans la première Observation réduite à l'Ecliptique. On trouvera de la même manière la distance AI de la Terre à la Comète dans la quatrième Observation. Car si l'on retranche de l'angle SAB connu, l'angle SAI qui mesure la distance de la Comète au Soleil dans cette Observation, on aura l'angle EAB , & dans le triangle EAB dont le côté AB est connu, de même que l'angle EAB & l'angle AEB , différence entre le vrai lieu de la Comète dans les deux dernières Observations, on trouvera le côté AE .

On fera ensuite comme l'intervalle de temps entre la seconde & la troisième Observation est à celui qui est entre la troisième & la quatrième. Ainsi DT est à DH ou IZ ; & dans le triangle EZI rectangle en Z , dont le côté IZ est connu & l'angle IEZ ou AEB , on trouvera la valeur de l'hypothénuse EI , qui étant ajoutée à AE , donne la distance AI de la Comète à la Terre dans la quatrième Observation réduite à l'Ecliptique.

Ayant employé la Méthode que nous venons d'exposer dans les Observations qui ont été faites le 2 & le 26 Septembre, & le 18 Novembre 1729, on trouve que supposant la distance moyenne de la Terre au Soleil de 22 mille demi-diamètres de la Terre, ou 33 millions de lieues, telle qu'on l'a déterminée par les Observations de la Parallaxe, la distance véritable de la Comète à la Terre étoit le 2 Septembre 1729, de 113 millions & 372 mille lieues.

Par d'autres Observations des 20 Septembre & 18 Novembre, on trouve la distance véritable de la Comète à la Terre le même jour 2 Septembre 1729 de 113 millions 413 mille lieues, qui comparée à la première détermination,

est environ comme 900 à 901 ; ainsi ces deux distances trouvées par des Observations différentes, ne sont éloignées l'une de l'autre que d'un millième, ce qui est une précision beaucoup plus grande que celle que l'on oseroit espérer dans de pareilles recherches.

Comme nôtre Méthode & les calculs qui en résultent sont fondés sur la supposition que la Comete a décrit pendant l'intervalle entre les Observations que l'on a comparées ensemble, des espaces égaux en temps égaux sur une ligne sensiblement droite, la conformité qui se trouve entre ces distances est une preuve que les inégalités apparentes, causées par la courbure de son orbe, ont été compensées par celles de l'augmentation ou de la diminution de son mouvement.

A l'égard de la distance de la Comete à la Terre dans les dernières Observations que nous en avons faites, nous la trouvons par celles du 18 Janvier de cette année 1730 de 171 millions 206 mille lieues ; ainsi elle s'est éloignée de la Terre, dans l'espace de quatre mois & demi, d'environ 58 millions de lieues, la moitié de la distance où elle étoit le 2 Septembre ; d'où il suit, par les regles de l'Optique, que son diametre ne devoit être diminué que d'un tiers, & sa lumière d'un peu plus de la moitié de celle qu'elle avoit au commencement que nous l'avons apperçûë, de sorte qu'il n'est point surprenant que l'on ait continué à l'observer pendant si longtemps, quoiqu'elle ait paru fort petite dès le commencement qu'on l'a apperçûë.

Après avoir déterminé la distance de la Comete à la Terre dans les différentes Observations que nous en avons faites, nous avons crû devoir chercher sa distance au Soleil, que l'on peut regarder comme le principe de son mouvement. Car quoique l'on puisse supposer que les Cometes sont des Planetes qui ont pour foyer des Soleils différents du nôtre, & que quelques Auteurs ayent crû que ce pouvoient être des Satellites de quelque Planete principale de nôtre Tourbillon, mais si éloignée de nous, qu'elle est toujours invisible à nos yeux, & que les Satellites ne deviennent visibles que lorsqu'ils

sont par rapport à nous dans la partie la plus basse de leur cercle. Cependant en attendant que ces suppositions soient confirmées par des Observations qui aient quelque évidence, nous avons estimé qu'il étoit convenable de déterminer le mouvement des Comètes par rapport au Soleil, que presque tous les Philosophes considerent comme le centre du mouvement des autres Planetes.

Nous avons donc calculé la distance de cette Comete au Soleil suivant nôtre théorie, & nous avons trouvé qu'elle étoit le 2 Septembre de 139 millions 667 mille lieues, le 22 Novembre de 144 millions 126 mille lieues, & le 18 Janvier 1730 de 148 millions 89 mille lieues.

La moyenne distance du Soleil à la Terre est à celle de cet Astre à Jupiter comme 100 à 521; d'où il suit que la distance de cette Comete au Soleil étoit le 2 Septembre 1729 à celle de Jupiter au même Astre, environ comme 4 à 5, de sorte que cette Comete étoit alors, comme nous l'avions supposé dans le Mémoire précédent, entre les orbes de Mars & de Jupiter, où elle est restée pendant tout le temps que nous l'avons aperçûe.

A l'égard de la quantité de son mouvement, nous trouvons que depuis le 2 Septembre jusqu'au 22 Novembre 1729 dans l'intervalle de 81 jours, elle a décrit par rapport au Soleil 13 degrés & 3 minutes sur son orbe, ce qui est à raison de 9' 40" par jour, & que depuis le 22 Novembre 1729 jusqu'au 18 Janvier 1730, dans l'intervalle de 57 jours, elle a parcouru 8^d 11' 20", ce qui est à raison de 8' 37" par jour; nous trouvons aussi que son mouvement réel sur son orbe dans le premier intervalle de temps est à son mouvement dans le second comme 1215 à 1140, de sorte que la diminution de sa vitesse réelle sur son orbe est comme 15 à 14, moindre à peu près de la moitié de celle de sa vitesse apparente qui est comme 18 à 16; ce qui est conforme à ce que l'on observe dans les Planetes, lorsqu'elles s'éloignent du Soleil, où l'on remarque deux sortes de diminutions; l'une apparente, qui n'est que l'effet de leur plus

grande distance au Soleil, & l'autre réelle sur leur orbe, à cause qu'elles s'éloignent de plus en plus du principe de leur mouvement.

Il faut présentement examiner si les degrés de vitesse que l'on a remarqué dans cette Comete s'accordent à la regle de Kepler, qui s'observe non-seulement dans les Planetes autour du Soleil, mais même dans les Satellites autour des Planetes principales. Suivant cette regle, une Planete éloignée du Soleil quatre fois plus que la Terre, doit faire sa révolution dans l'espace de 8 années, qui est la racine quarrée du cube de sa distance au Soleil, son mouvement réel sur son orbe doit être deux fois plus lent que celui de la Terre, & son moyen mouvement journalier de $7' 30''$.

Quoique cette Comete, dans le temps que nous l'avons apperçûe, se soit trouvée éloignée un peu plus de quatre fois du Soleil que la Terre ne l'est de cet Astre, cependant son mouvement journalier a été déterminé de $9' 40''$, plus grand de près d'un quart qu'il n'auroit dû l'être, suivant cette regle, à laquelle il s'accorderoit plus parfaitement, en supposant que cette Comete, après avoir passé par son Périhélie, n'étoit pas encore arrivé à ses moyennes distances, où sa vitesse qui alloit en diminuant, devoit être plus petite que celle que l'on avoit observée.

En effet, si l'on considere la direction de la route de cette Comete, & sa distance à la Terre dans les différentes Observations, dont le rapport a augmenté continuellement, pendant que son mouvement diminuoit continuellement de vitesse, il résulte de la figure elliptique, qu'au temps de son apparition elle devoit être près de son Périhélie, d'où elle s'éloignoit en s'approchant de ses moyennes distances.

Ainsi la regle de Kepler reçoit un nouveau degré de confirmation de la théorie de cette Comete dans le rapport des distances des corps célestes aux divers degrés de leur vitesse, puisqu'outre les Planetes principales & leurs Satellites, elle représente assés exactement la quantité du mouvement & de la vitesse de cette Comete, qui est peut-être la seule dont la

distance au Soleil & à la Terre ait été déterminée avec presque autant d'exactitude que celle des autres Planetes.

Connoissant la distance de cette Comete au Soleil & la quantité de son mouvement en divers endroits de son orbe, on pourroit déterminer géométriquement la figure de l'Ellipse sur laquelle elle fait sa révolution ; mais comme cette recherche, pour être exacte, demande que l'on connoisse avec une très-grande précision sa distance au Soleil dans les diverses Observations que l'on y employe, nous nous contenterons de remarquer que l'on peut représenter assez exactement son cours, en supposant que sa moyenne distance au Soleil est à celle de la Terre au Soleil comme 4800 est à 1000. D'où il suit, suivant la regle de Képler, que sa révolution sur son orbe doit être d'environ dix années, & son moyen mouvement journalier de 6 minutes.

Par ce moyen, attribuant à l'orbe de cette Comete une excentricité de 1000 parties, en sorte que la proportion de son grand axe à celle du petit soit comme 5800 à 3800, on aura son mouvement vrai dans son Aphélie de près de 4 minutes, & dans son Périhélie de plus de 9 minutes, conformément à celui que nous avons observé dans cette situation.

A l'égard du lieu du Nœud de cette Comete, nous l'avons trouvé par les premières Observations à $10^d 16'$ du Verseau, & par les dernières à $10^d 6'$ du même Signe, éloigné seulement de 6 degrés du lieu où nous avons commencé à l'appercevoir. Nous avons aussi trouvé l'inclinaison de l'orbite de cette Comete à l'Ecliptique par les premières Observations comparées ensemble, de $76^d 56'$, & par les dernières, de $76^d 34'$, avec une différence seulement de $22'$ de l'une à l'autre, ce qui est bien différent de celles des autres Planetes, dont la plus grande, qui est celle de Mercure, n'est au plus que de 7 degrés ; mais comme l'on ne connoît point encore, du moins avec évidence, la cause physique de l'inclinaison des Orbites des Planetes à l'Equateur du Soleil, & la raison pour laquelle ces inclinaisons sont différentes entr'elles, peut-être que les Traités que l'on composera pour le Prix que l'on

vient

vient de proposer, nous donneront quelque éclaircissement sur la cause d'une si grande inclinaison.

Il nous reste présentement à déterminer les lieux par où cette Comete a dû passer depuis que nous avons cessé de la voir, ceux où elle se trouve présentement, & où on pourra l'apercevoir dans la suite, afin de la pouvoir chercher dans le Ciel au temps qu'elle sera dans la situation la plus convenable.

Elle étoit à la fin de Janvier 1729 au dessus de la Constellation du Dauphin, d'où elle s'est avancée vers le Pégase; & elle doit se trouver présentement dans l'aîle du Cygne avec une latitude septentrionale de près de 50 degrés, elle passera ensuite vers la queue de cette Constellation, & se trouvera dans le mois de Septembre en opposition avec le Soleil, qui sera la situation la plus propre pour la voir, parce qu'elle sera alors plus près de la Terre que dans toute autre saison de cette année. Il sera cependant alors très-difficile à la découvrir, parce que sa distance sera encore plus grande que lorsqu'on a cessé de la voir à la vûe simple.

*Longitude & Latitude de la Comete qui a paru en 1729
& 1730.*

1729.		Longitude.	Latitude Boréale.
Août	31 à 9 ^h 34'	≈ 8 ^d 34' 0"	28 ^d 48' 9"
Sept.	2 9 25	8 3 10	29 6 30
	3 9 28	7 48 42	29 14 4
	10 8 6	6 18 34	29 55 7
	11 7 59	6 6 49	30 4 35
	12 7 33	5 55 20	30 9 32
	15 8 28	5 21 29	30 24 45
	16 8 24	5 11 22	30 29 0
	18 7 55	4 50 51	30 39 25
	19 7 7	4 42 58	30 43 50
	21 7 8	4 25 50	30 51 48
	23 7 0	4 8 36	31 0 17
	26 7 0	3 48 39	31 13 57
Mem. 1730.			Pp

298 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE

1729		Longitude.	Latitude Boréale.
Octob. 10	à 7 ^h 10'	≈ 2 ^d 38' 1"	31 ^d 54' 29"
11	7 5	2 36 5	31 56 10
12	7 8	2 34 32	31 59 19
14	7 48	2 30 20	32 3 1
19	6 40	2 26 13	32 15 13
22	7 7	Directe 2 33 42	32 21 31
24	6 15	2 34 17	32 23 8
26	6 32	2 36 46	32 28 0
27	8 33	2 39 43	32 30 0
Nov. 10	8 24	3 42 37	32 57 17
14	6 12	4 8 27	33 3 9
16	7 40	4 23 5	33 6 2
17	6 37	4 29 55	33 10 0
18	5 38	4 38 14	33 11 40
20	9 12	4 54 33	33 16 30
12	6 28	5 10 31	33 18 40
24	5 54	5 29 29	33 26 0
30	7 55	6 27 23	33 39 34
Dec. 2	6 54	6 50 20	33 43 58
3	6 19	6 59 13	33 45 45
9	6 17	8 6 41	34 1 52
14	6 0	9 7 11	34 18 10
19	5 32	10 6 46	34 32 38
20	5 29	10 19 16	34 37 24
24	6 34	11 14 52	34 45 32
27	5 36	11 57 32	35 1 39
1730			
Janv. 7	5 35	14 41 31	35 44 34
8	6 10	14 57 23	35 48 50
16	5 48	17 1 29	36 27 30
17	5 51	17 16 12	36 33 22
18	5 57	17 34 16	36 38 50



ANATOMIE DE LA POIRE.

Par M. DU HAMEL.

IL n'est guère possible de raisonner juste sur un corps organisé, & de décider des usages des parties qui le composent, sans avoir auparavant une connoissance exacte de leur structure, de leur situation, & de la connexion qu'elles ont les unes avec les autres.

19 Juillet
1730.

C'est la voye qu'ont tenu jusqu'ici tant d'habiles Anatomistes pour débrouïller le mécanisme prodigieux qui se trouve dans le corps des Animaux. C'est à cet ordre, qu'ils ont gardé dans leurs recherches, que nous sommes redevables de tout ce que nous avons aujourd'hui de plus certain sur l'économie du Corps humain, & cet ordre ne peut être changé, si l'on veut réussir dans l'examen de quelque corps organisé que ce soit.

Il arrive cependant assés souvent que cet examen scrupuleux des parties rend la connoissance des usages très-difficile.

A force de travail & de recherches, on découvre une structure fine, délicate & composée. Les desseins sur lesquels elle a été formée sont incertains, & les effets qu'elle doit produire, bien différents de ceux que nous attribuons (par conjecture seulement) à une organisation simple & unie, dont nous nous étions formé une idée peu conforme à la réalité.

C'est ce que m'a fait connoître le travail que j'ai fait sur la Poire. La structure d'une pelote de coton, ou, ce qui est la même chose, d'une éponge, d'un parenchyme, chargé des suc du Poirier, me paroïssoit d'abord suffisante pour satisfaire à l'explication de tout ce que je connoissois de ce fruit; mais depuis qu'en y prêtant plus d'attention, j'y ai découvert des parties solides, & d'autres molles, des vaisseaux contournés de différentes manières dans le même fruit, & toujours

uniformément dans les différents fruits du même genre ; depuis que j'ai observé des especes de membranes, de cartilages, de glandes, de ligaments, & de pores, j'ai bien reconnu que les explications simples n'étoient pas toujours les meilleures en Physique, & qu'il falloit abandonner les préjugés que j'avois sur la nature de la Poire : pour y parvenir, je résolus de m'attacher uniquement à la structure & à la situation de ses parties, & de mettre après cet examen celui de leurs usages.

Sur ce projet, il y a environ trois ans que j'essayai de disséquer plusieurs fruits mols, pourris ou cuits de différente manière. Mais après ces préparations, à peine les parties les plus grossières se trouverent-elles conservées ; mon travail ne servit donc qu'à me faire entrevoir un nombre d'organes, sans en pouvoir reconnoître aucun un peu clairement.

Il est vrai qu'on employe même avantageusement ces sortes de préparations dans l'anatomie des Animaux, mais ce n'est que sur certaines parties ; la cuisson, par exemple, fait appercevoir bien clairement la direction des fibres d'un muscle, mais elle détruit entièrement les vaisseaux & les membranes, elle les réduit en gélées.

Les macérations conviennent en plus d'occasions, elles ne détruisent que les parties extrêmement fines qui lient & unissent les autres qu'on se propose de connoître ; par ce moyen on est donc en état d'en examiner la structure, ce qui me détermina à mettre tremper dans différentes liqueurs plusieurs especes de Poires que je choisis à dessein, les unes fort mûres, & les autres encore vertes.

Je n'ai pû retirer aucun avantage des Eaux fortes, elles détruisent tout, & lorsque les fruits y ont trempé long-temps, ils deviennent d'une substance qui paroît uniforme & presque comme de la pâte.

Ce que j'ai remarqué seulement, c'est que les fruits caillent fort promptement l'Eau-forte, & la rendent comme de la gelée, qui se réduit ensuite, quoique difficilement, en une espece de *Serum*.

Les fruits acides & les doux produisent également cette coagulation, j'en ai fait l'expérience sur les Oranges douces & aigres, sur les Cerises & les Groseilles, sur les Poires & les Pommes, &c.

On ne tire pas non plus un grand avantage de la macération des fruits dans l'Eau-de-vie & le Vinaigre distillé; ces liqueurs, au lieu de commencer la desunion des parties, les racornissent, & les rendent ainsi plus difficiles à disséquer.

C'est de la macération dans l'eau commune dont j'ai retiré le plus d'avantage, elle pénètre petit-à-petit, elle s'insinue entre les parties des fruits, elle en détruit un nombre d'infiniment fines, & épargne les autres, elle en augmente seulement un peu le volume, ce qui les fait plus aisément appercevoir, mais elle agit très-lentement, de sorte que quelques-uns n'ont été dans l'état où je les demandois qu'au bout de deux ans.

Par les macérations j'étois donc parvenu à attendrir mes Poires, mais cela ne suffisoit pas, il falloit achever la desunion d'un nombre de parties qui par leur entrelassement forment la substance de ce fruit. Voici comme je m'y suis pris.

Je les ai toujours disséqué nageant dans l'eau, quelquefois avec une Lancette ou un petit Scapel, d'autres fois avec la pointe d'un Canif très-délié ou une érigne très-fine; souvent même la délicatesse des parties est si grande, que la seule pointe d'un curedent m'a fort bien servi, mais rien ne m'a mieux réussi que de darder de l'eau chaude avec une Seringue à injection sur les endroits difficiles à séparer, ou de souffler simplement avec un tuyau sur ces endroits, cependant cela n'a quelquefois pas suffi, & j'ai été obligé de presser mollement entre les doigts ou avec des petites pinces, & de secouer & agiter dans l'eau la pièce que je préparois pour occasionner avec douceur & ménagement la desunion que je souhaitois; mais ce qu'il est important de remarquer, lorsqu'on veut préparer proprement une partie, c'est de ne pas entreprendre de la disséquer tout de suite, il faut, après l'avoir travaillée un temps, la laisser reposer & se macérer encore pendant une quinzaine de jours.

Ces préparations, si nécessaires en Anatomie, dépendent d'un grand nombre de précautions qui paroissent quelquefois dégénérer en scrupules, elles n'en sont cependant pas moins importantes, c'est ce qui m'a engagé à détailler les moyens que j'ai employés pour reconnoître les parties que je me suis proposé de décrire, afin que ceux qui voudront perfectionner cette recherche, puissent profiter des mêmes secours qui m'ont été si utiles.

Après m'être suffisamment étendu sur ces sortes de préparations en général, je crois qu'il sera plus utile de joindre à la description de chaque partie la manière de la découvrir, ainsi je passe à la division générale de la Poire.

La Poire, comme l'a décrite M. de Tournefort, est un fruit charnu, plus mince ordinairement vers la queue que vers l'autre bout, où il est garni d'un nombril formé par les découpures du calice, on trouve dans son intérieur cinq loges remplies de pépins, c'est-à-dire, des semences couvertes d'une peau cartilagineuse.

PL. I. Fig. 1.
PL. II. Fig.
1. & 2.

Cette définition, qui suffisoit à cet Auteur pour caractériser la Poire, peut bien nous servir à faire la division de ce fruit en trois parties, qui sont, la tête ou l'ombilic, la queue ou le pédicule, & le corps, parties à décrire chacune en particulier : mais comme actuellement ma vûë est différente de celle de cet illustre Botaniste, & que l'examen que je me propose de ce fruit est plus intime que celui qu'il avoit pour but, il m'a paru que j'étois obligé de le considérer dans ses téguments, dans ses vaisseaux & dans les organes qui appartiennent à ses pépins ; trois objets assez considérables pour donner de l'étendue à autant de parties de mon Mémoire. Je commence par celle qui est extérieure.

DES TEGUMENTS.

On retranche de dessus ces fruits une peau qui est ordinairement dure & désagréable. Par l'examen que j'en ai fait, j'ai reconnu que ce qu'on enleve avec le couteau est composé de quatre substances différentes qui s'étendent sur tout

le fruit, & le recouvrent en entier, c'est pourquoi je les nomme les *téguments* ou les *enveloppes communes*, dont la première, en commençant par l'extérieur, peut s'appeller l'*épiderme*, la deuxième le *corps muqueux*, la troisième le *tissu pierreux*, & la quatrième la *peau*. J'ai crû devoir distinguer ainsi ces quatre téguments, par la ressemblance qu'ils ont avec ceux du Corps humain, comme il sera aisé de s'en convaincre par l'examen que nous allons faire de chacun d'eux en particulier.

DE L'ÉPIDERME.

Lorsqu'on examine avec une Loupe la superficie de la plupart des Poires, elle paroît chagrinée, & on découvre dessus, outre des petites gales dont nous parlerons dans la suite, une quantité de petits points blancs, qui examinés avec un bon Microscope, ne paroissent être qu'une membrane mince, transparente & blancheâtre qui s'est détachée du fruit, & s'est relevée, comme on le voit dans la Fig. 2. Pl. I.

Pl. I. Fig. 3.
Figure 2.

De plus j'ai encore remarqué sur l'écorce de quelques fruits macérés, qu'il restoit de petits morceaux de membranes qui se distinguoient du reste en ce qu'ils étoient bruns, brillants, gerçés, & qu'ils ne se détachent que par écailles.

Je crus d'abord que ces morceaux de membrane appartenoient à une cinquième enveloppe très-mince, délicate, fort adhérente, & que je ne pouvois à cause de cela appercevoir que dans quelques endroits, quoiqu'elle recouvrit toute la Poire, cela paroissoit probable ; cependant par les moyens que j'ai employés pour m'en assurer, j'ai reconnu parfaitement que ce que j'avois appercû tant sur les fruits verts que sur les macérés, n'étoit que des parcelles d'épiderme qui s'étoient desléchées, & sous lesquelles il s'en étoit régénéré un nouveau.

Pour examiner la structure de ces parcelles d'épiderme, j'en mis de très-petits morceaux au foyer d'un Microscope à liqueur, ils me parurent d'une substance très-uniforme, & je n'y reconnus ni ramification de vaisseaux ni pores (peut-être

à cause de leur dessèchement) je remarquai seulement qu'ils étoient très-transparents : mais une membrane si mince peut-elle être opaque ?

On a coutume d'employer un fer rouge ou l'eau bouillante pour détacher l'épiderme des Animaux ; ces mêmes secours m'ont été aussi très-utiles pour reconnoître celui de notre fruit, de sorte que par leur moyen je l'ai apperçû aussi clairement dans les jeunes fruits que je l'avois fait dans les fruits mûrs à l'aide des macérations, & dans les mols sans aucune préparation.

PL. I. Fig. 1. Cette membrane se trouve par tout le fruit, je l'ai observée à la queue, au corps & dans l'ombilic, elle est mince ; d'un tissu uni, qui ne paroît point composé de vaisseaux, mais elle est ferme, & fortement attachée au corps muqueux.

Fig. 4. Le Microscope nous la fait encore appercevoir percée d'une infinité de pores qui ne sont pas tous de la même grosseur, les uns sont très-fins, & forment comme un fond de sable, les autres sont plus considérables, & arrangés de telle sorte, qu'ils imitent en quelque manière un réseau.

La couleur de l'épiderme est incertaine, quelquefois elle paroît transparente comme de l'écaille blonde ; pour lors elle prend, ou plutôt elle laisse appercevoir la couleur du corps muqueux, mais d'autres fois, & sur-tout dans les endroits où le fruit a été le plus exposé au Soleil, elle paroît rouge.

On pourroit donc à cette occasion faire la question, si la couleur des fruits réside dans l'épiderme ou dans le corps muqueux.

Je sçais que dans les fruits qui sont colorés naturellement comme la Pomme de calville, plusieurs Pêches, la Poire sanguinole, &c. la couleur réside non seulement dans le corps muqueux, mais même dans les vaisseaux, & sur-tout dans leur épanouissement aux approches du tissu pierreux.

Mais dans les Poires qui ne sont pas rouges naturellement ; & qui ne prennent cette couleur que par l'action du Soleil, elle ne passe jamais le corps muqueux, & paroît souvent ne résider que dans l'épiderme, ou du moins dans la surface
externe

externe du corps muqueux, ce qui n'est pas aisé à vérifier, car la couleur rouge disparoit, soit qu'on mette les fruits dans l'eau bouillante, soit qu'on essaye d'en détacher l'épiderme avec un fer rouge ; ainsi pour conserver la couleur, on n'a d'autre moyen de détacher l'épiderme qu'avec la pointe du Scalpel. Qui sçait pour lors si on n'emporte pas une partie du corps muqueux avec l'épiderme ? ces deux membranes sont fort minces, avec cela très-intimement unies, ainsi elles sont très-difficiles à séparer l'une de l'autre : je suis cependant venu à bout de le faire dans quelques especes, ce qui paroîtroit décider la question ; mais comme cette observation a beaucoup de rapport avec celle que j'ai été obligé de faire pour reconnoître ce corps muqueux, je n'en parlerai que lorsque j'examinerai cette membrane.

Les petits points blancs que j'ai remarqués être des petits morceaux d'épiderme desséchés, & qui tombent par écailles, font voir qu'il se détruit petit à petit comme dans les Animaux ; & ce qui est encore admirable, c'est que sa régénération se fait aussi de la même manière ; car si, comme je l'ai déjà remarqué, l'on examine le dessous de ces écailles blanches dont je viens de parler, on y trouve un nouvel épiderme tout régénéré sans aucune cicatrice. En effet comme l'épiderme se détruit peu-à-peu, & se régénere de même, la superficie des fruits ne seroit-elle pas toute galeuse, si sa régénération se faisoit avec cicatrice.

PL. I. Fig. 2.

Le rapport & la conformité est si exacte entre l'épiderme de nôtre fruit & celui de l'Homme, que je serois fort porté à lui attribuer une pareille origine : mais comment l'épiderme de l'Homme est-il produit ? est-ce par une liqueur, par un suc, ou une rosée qui se condense & s'épaissit sur la peau, ou par l'expansion de quelques vaisseaux ? Si c'est une rosée, s'échappe-t-elle des nerfs ou des vaisseaux sécrétoires, ou indifféremment de tous les vaisseaux ? Si c'est plutôt par l'expansion de quelques vaisseaux, est-ce par celle des papilles nerveuses, des vaisseaux sécrétoires ou des lymphatiques, ou sans distinction de tous les vaisseaux ? Quoique la production

de cette membrane ait été un point fort discuté, il est cependant encore très-incertain, chaque Anatomiste a presque eu son sentiment particulier, & chaque sentiment a encore ses partisans.

En attendant que nôtre travail sur l'anatomie des Végétaux nous ait fourni quelques lumières sur ce sujet, je me contenterai de remarquer que les nerfs étant les organes de la sensation & du mouvement, nôtre Poire qui n'a point de mouvement, & qui ne nous donne aucune marque de sensibilité, n'a probablement point de nerfs, d'ailleurs les dissections les plus exactes ne nous y ont rien fait découvrir qui en eût le caractère, ainsi l'épiderme de nôtre Poire n'est probablement formé ni par l'épanouissement des houppes nerveuses, ni par l'épaississement du suc nerveux.

Mais ce fruit transpire (nous nous en sommes assurés par des expériences particulières) ainsi il y a des vaisseaux excrétoires; d'un autre côté il est recouvert par un corps muqueux (comme nous allons le voir) ainsi son épiderme pourroit être formé ou par l'épanouissement des vaisseaux sécrétoires, ou par l'épaississement de la superficie extérieure du corps muqueux. Je serois fort porté à embrasser ce dernier sentiment, sur-tout si cette muquosité qu'on remarque en touchant ce corps, qu'on appelle à cause de cela *muqueux*, vient d'une espece d'extravasation de la lymphe glutineuse qui sert à la réparation des vaisseaux & des membranes; mais encore un coup la nature de l'épiderme n'est gueres plus éclaircie par l'anatomie de la Poire que par celle des Animaux, ainsi j'attends, pour embrasser un sentiment, que l'anatomie de quelques autres fruits m'ait été plus favorable.

Enfin, pour dire un mot des usages de cette membrane, il me paroît probable que sa situation, sa solidité, & les autres caractères que nous avons remarqués en elle, sont des preuves manifestes que la Nature l'a destinée à défendre des injures de l'air les autres parties de la Poire qui sont tendres, molles & délicates.

La fermeté de l'épiderme peut encore écarter quantité de

petits insectes, qui sans cela détruiroient toutes les Poires; comme il arrive au Beurré & au Doyenné. Lorsque leur épiderme est fort éminci par une grande maturité, cette membrane peut encore diminuer la transpiration, qui étant trop abondante, dessécheroit les fruits dans les grandes chaleurs.

Je finis cet article sans parler des maladies de l'épiderme; parce que je crois qu'on lui attribue mal-à-propos celles du corps muqueux.

Quand, par exemple; on voit l'épiderme se détacher presque entièrement, & tomber par grandes pièces, il m'a toujours paru que c'étoit le corps muqueux, qui étant attaqué, laissoit l'épiderme sans soutien; & si quelquefois après cette maladie il ne reste point de cicatrice sur la Poire, c'est que quand le corps muqueux n'est pas détruit dans toute son épaisseur, mais seulement dans sa partie externe, ou qui est contigüe à l'épiderme, il peut alors se réparer sans cicatrice,

DU CORPS MUQUEUX.

Quand par les macérations on est parvenu à enlever l'épiderme seul, on apperçoit une membrane fort mince, déliée & très-délicate, qui demeure attachée au tissu pierreux qu'elle couvre immédiatement & dans toute l'étendue de la Poire. Pl. I. Fig. 5.

En la touchant, on remarque une certaine douceur ou une viscosité qui nous la fait appeller le *corps muqueux*, nom qui convient encore par la place qu'elle occupe entre l'épiderme & la peau.

Cette membrane reste communément adhérente, tantôt à l'épiderme, & tantôt au tissu pierreux, ce qui prouve bien son existence & son caractère de membrane; mais pour observer sa tiffure, il falloit la voir seule & détachée de toute autre partie. Elle est si délicate, que je n'ai pû en avoir que de petits morceaux: ainsi séparés, je les ai examinés avec un Microscope à liqueur, qui me les a fait appercevoir très-transparents, & percés comme l'épiderme de quantité de pores, quoique moins apparents.

Le corps muqueux de beaucoup de Poires est vert, cela

ne fait pas de difficulté. Il n'en est pas de même aux endroits exposés au Soleil, comme je l'ai fait sentir en parlant de l'épiderme, & il n'est pas aisé de décider à laquelle de ces deux membranes appartient cette couleur rouge. Voici quelques observations qui tendent à éclaircir la question.

Ayant essayé plusieurs fois, & sur différents fruits, d'emporter avec un Scalpel très-fin l'épiderme d'une petite partie de Poire que j'avois exposé à une Loupe de trois à quatre lignes de foyer : J'ai remarqué,

Que quelquefois je n'ai pu enlever l'épiderme, sans être teint de rouge, & d'autres fois je l'ai détaché clair & transparent, sans être teint en aucune manière; lorsque j'ai gratté pour enlever le corps muqueux, tantôt la couleur rouge s'est conservée jusques sur les pierres, & tantôt je l'ai apperçûë superficielle, de sorte que la partie interne du corps muqueux étoit encore verte.

Ces observations me font croire que la couleur rouge réside dans le corps muqueux, mais qu'elle l'affecte diversement, de sorte que tantôt elle ne paroît que sur la surface externe ou voisine de l'épiderme, & tantôt toute la surface en est teinte.

Si quelquefois je n'ai pu détacher l'épiderme, sans être coloré, la grande délicatesse ou son adhérence au corps muqueux pouvoient bien en être la cause.

Quoique je n'aye rien de bien certain sur la nature de cette membrane, je crois cependant qu'elle est formée d'un lassis de vaisseaux infiniment fins, baignés d'une liqueur mucilagineuse qui lui donne sa douceur.

Pour ce qui est de ces usages, la manière avec laquelle elle embrasse les pierres du tissu pierreux, m'a fait conjecturer qu'elle sert à les assujettir & les tenir dans une même situation; il arrive peut-être encore qu'elle sert à la régénération de l'épiderme, mais il est bon de remarquer que la surface chagrinée que nous avons observée sur beaucoup de Poires, leur vient de cette sorte d'adhésion du corps muqueux au tissu pierreux.

J'ai dit que beaucoup d'Animaux s'accommoderoient fort

de cette membrane pour leur nourriture, si l'épiderme ne la mettoit à couvert. Cette défense n'empêche pas qu'une espece de Mites très-petites, que je n'ai observées que confusément, ne mangent le corps muqueux sous l'épiderme, qu'elles laissent en son entier : il y a encore quelquefois une troupe de ces Chenilles, qu'on appelle des *Livrées*, qui après avoir détruit l'épiderme, mangent entièrement le corps muqueux, ce qui produit ces petites gales fines qu'on remarque si souvent sur les Poires ; car lorsque le corps muqueux est détruit en entier, il ne se régénère plus, mais il se forme à la place une espece de gale gommeuse.

Le corps muqueux est encore sujet à bien des accidents, qui presque tous altèrent sa couleur.

Les meurtrissures, comme les coups de grêles, le dessèchent, & font des taches noires sur les Poires.

Les humidités, quand elles sont longues & froides, interrompant la transpiration, occasionnent la corruption, qu'on reconnoît à la couleur grise & livide qu'elle prend alors. J'observerai à cette occasion, que quelques Auteurs recommandent, pour faire grossir les fruits, de les mettre, lorsqu'ils sont encore petits, tremper dans l'eau jusqu'à ce qu'ils ayent acquis leur maturité. J'ai fait cette expérience, & mes fruits ont été d'abord attaqués de la maladie dont je viens de parler, se sont ensuite fendus, & enfin se sont détachés de l'arbre presque pourris & avant leur maturité.

La trop grande ardeur du Soleil quelquefois le dessèche petit à petit, mais assés souvent produit cette maladie, qu'on appelle les *coups de Soleil*, qui n'est autre chose que la rupture des vaisseaux & des sacs aériens, occasionnée par la trop grande raréfaction de l'air & des liqueurs, comme on peut s'en assurer en approchant un fer chaud d'une Poire encore verte, car alors on entend une espece de crépitation & un craquement considérable qui change sur le champ la couleur du corps muqueux.

PL. I. Fig. 6. Les deux enveloppes dont je viens de parler, étant levées, on découvre une quantité de corps solides, qui sont tellement arrangés sur toute la superficie de la Poire, qu'ils lui en forment une troisième que nous nommerons *l'enveloppe pierreuse*, parce qu'on a coûtume d'appeller des pierres, les petits corps dont il s'agit *.

Je mets ce tissu pierreux au nombre des enveloppes, quoique dans la Poire il se trouve des pierres ailleurs que sous son corps muqueux, mais cet ordre n'est point opposé à celui que les Anatomistes observent à l'égard des Animaux, puisque le corps graisseux, qui est mis au nombre de leurs téguments, se trouve encore répandu dans toutes les parties de leur corps.

Les pierres de la superficie, & celles qui se rencontrent dans les différentes parties de la Poire, m'ont paru, tant par leur solidité que par les organes qui les accompagnent, d'une nature assez semblable pour n'être point séparées; ainsi j'ai crû qu'il seroit plus à propos, même plus conforme à l'usage des Anatomistes, d'examiner dans un seul & même article les pierres qui sont arrangées sous le corps muqueux, & celles qui sont répandues dans la substance de la Poire, quoique je me fusse proposé, dans cette première Partie, de n'examiner que ce qui concerne les téguments.

Les pierres sont donc répandues dans toute la substance de la Poire, mais elles n'y sont pas jettées tout-à-fait au hasard.

PL. II.
Fig. 1.

Elles sont amoncelées auprès de l'ombilic, & y forment une espece de roche.

PL. I. Fig. 6.

PL. II.

Fig. 1.

Sous le corps muqueux, elles sont arrangées assez régulièrement à côté les unes des autres, ce qui m'a fait nommer cet assemblage, le *tissu* ou *l'enveloppe pierreuse*.

Le long de l'axe du fruit, excepté dans le centre, elles forment par leur disposition une espece de canal; ce canal est divisé en deux parties par les pépins. Dans l'examen que je

* M. Ruich a parlé des pierres, & les a nommées *corps aciniformes*, M.^{rs} Grew & Malpighi en ont aussi parlé.

ferai de ces deux parties, j'appellerai la supérieure, ou celle qui est proche de l'ombilic, le *canal pierreux*, & l'inférieure, ou celle qui est proche de la queue, la *gaine pierreuse*; car pour reconnoître ces parties, il faut leur donner des noms. PL. II.
Fig. 1.

Il n'y a point d'endroit dans le fruit où les pierres soient plus grosses qu'aux environs des pépins, elles y sont plus écartées les unes des autres que par-tout ailleurs, & les espaces qui sont entr'elles sont remplis par une substance fine & ordinairement bien différente, à la vûë & au goût, de la substance propre de la Poire, mais elle est assés semblable à celle qui unit les grains du tissu pierreux; c'est cette espece d'enveloppe des pépins que j'ai appelé la *substance pierreuse*. Fig. 1. 2.
& 3.

Depuis cette substance jusqu'au tissu pierreux, il se trouve répandu dans la substance propre de la Poire un nombre de petites pierres très-écartées les unes des autres, & qui, à cause de cela, ne se remarquent pas aisément: j'ai observé qu'elles vont toujours diminuant en nombre & en grosseur depuis le centre jusqu'à la circonférence. Fig. 1. & 2.

Enfin, il y en a encore une grande quantité de très-fines qui sont répandues par toute la Poire entre les pierres dont j'ai parlé, on ne peut cependant les y découvrir qu'à l'aide d'une Loupe, & après de longues macérations.

Mais une chose singulière, c'est que toutes ces pierres qui sont, comme nous venons de le voir, situées si différemment dans nôtre fruit, ont cependant une grande connexité les unes avec les autres, & forment toutes ensemble une continuité que nous allons suivre dans toute son étendue.

D'abord elles sont situées tout le long de la queue entre les téguments & un faisceau de vaisseaux qui en occupent le centre. Fig. 1.

A l'insertion de la queue au corps de la Poire, elles se divisent en deux portions, dont une qui est le tissu pierreux, s'épanouit sur la surface de la Poire, & l'autre qui est la gaine pierreuse, se prolonge encore selon son axe, enveloppant, comme dans une espece de gaine, un gros faisceau de vaisseaux que tout le monde connoît en cet endroit. Fig. 1.

Un peu au-dessous de la base des pépins, cette gaine

Pl. II.
Fig. 1. 2.
& 3.

s'épanouit, & c'est en cet endroit que commence la substance pierreuse que je regarde comme le foyer de toutes les pierres qui sont répandues dans la substance propre du fruit, de sorte que je crois que par les pierres intermédiaires, il y a une espee de communication entre cette substance pierreuse & le tissu pierreux : quoiqu'il en soit, elle forme autour des pépins une enveloppe sensible, épaisse, & de figure à peu-près ovoïde, qui par son retrécissement devient ce que nous avons appelé le *canal pierreux*, qui s'étend jusqu'à l'ombilic ; la longueur de ce canal varie beaucoup, suivant les différentes especes de Poires. Dans les Bergamottes & les autres Poires qui ont la tête renfoncée, il est fort court, au lieu que dans le Bon-chrétien & beaucoup d'autres especes il est assés long : les Pierres dans cet endroit sont ordinairement grosses, très-ferrées les unes contre les autres, de sorte que souvent elles s'unissent plusieurs ensemble, quelquefois même j'ai trouvé le canal tout d'une pièce.

Fig. 1.

Fig. 8.

Fig. 1. 4.
& 5.

J'ai dit que le canal pierreux se terminoit à l'ombilic, c'est aussi en cet endroit que vient finir le tissu pierreux, & la réunion de l'un & de l'autre y forme ce que nous avons appelé *la roche*.

Fig. 4. & 5.

Cette roche a la figure d'un cone renversé, de manière que la base répond à l'ombilic, & la pointe qui, à la vérité est tronquée, regarde les pépins. Elle ne paroît d'abord composée que d'un amas de pierres soudées fort irrégulièrement ensemble, cependant elle se divise fort aisément, & d'une manière très-distincte en deux parties, une extérieure, & l'autre intérieure; celle-ci, qui en est comme le noyau, a aussi la figure d'un cone tronqué, & c'est la continuation du canal pierreux, qui en s'épanouissant par son extrémité en manière de trompe, forme à l'endroit de l'ombilic la base du cone.

Fig. 4.

Fig. 9.

Pour ce qui est de la partie extérieure de la roche, c'est un prolongement du tissu pierreux qui fournit une espee d'enveloppe au noyau dont je viens de parler, de manière cependant qu'elle est beaucoup plus épaisse du côté de l'ombilic que de l'autre, ce qui augmente la largeur de la base du cone.

Enfin,

Enfin, je crois que par ce prolongement le tissu pierreux communique encore avec la substance pierreuse.

L'on connoît par cet examen général, que les pierres affectoient de certaines positions constantes, quoique différentes presque dans chaque partie de la Poire. Ces positions ne sont certainement pas inutiles, mais avant de former aucune conjecture sur leur usage, il faut bien connoître la nature de ces pierres; pour cela, j'ai commencé par les considérer seules & détachées de toutes les parties qui les environnent, & ensuite je les ai examinées jointes avec les parties qui s'unissent à elles.

Suivant mes observations, il seroit inutile de chercher des pierres dans les fruits nouvellement noués; cette partie du fruit qui doit s'endurcir, ne m'a paru dans ce temps qu'une masse blanche, compacte, à la vérité, mais toute tendre & toute pleine d'eau. Dans la suite cette substance paroît se diviser par grains blancs qui n'ont encore guères de solidité, & qui sont presque toute la substance intérieure du fruit. Enfin ces grains grossissent & durcissent peu à peu, de sorte que les fruits étant encore fort petits, sont tous remplis de pierres: ces pierres ne sont cependant pas si dures que dans les fruits parvenus à leur maturité, & elles conservent une légère transparence, qui donne lieu d'appercevoir quelques vaisseaux qui vont s'insérer & se ramifier dans leur substance. A mesure que les Poires approchent de leur maturité, les pierres disparaissent en quelque manière, & il semble que la meilleure partie s'en détruisse; nous verrons cependant par la suite de ce Mémoire, qu'elles ne diminuent ni en nombre ni en grosseur, bien-loin de cela elles deviennent plus dures & plus opaques, sur-tout celles du tissu pierreux.

PL. II.
Fig. 7.

C'est dans cet état que ces pierres examinées au Microscope, ne m'ont jamais paru formées par couches, ou par l'union de plusieurs lames pierreuses, mais seulement par l'assemblage de plusieurs grains, ou si l'on veut, par l'union de plusieurs pierres beaucoup plus petites, qui communiquent les unes avec les autres par des vaisseaux.

Mem. 1730.

2 R r

J'ai outre cela quelque fois apperçû dans ces grosses pierres; qui forment la gaine pierreuse, une espece de lassis de la même substance que la pierre, qui imite assés bien les cellules de la moëlle des os, & qui est formé par des vaisseaux endurcis.

Il est encore bon d'observer que ces pierres brûlent au feu, & exhalent une odeur pénétrante assés semblable à celle du pain brûlé.

Enfin il y en a beaucoup qui par une forte ébullition se dissolvent entièrement dans l'eau commune, ou encore plus aisément dans les liqueurs spiritueuses.

Pour examiner les pierres nûes & détachées des parties qui les environnent, j'ai eu besoin d'une bonne Loupe & d'un Microscope à trois verres; mais pour les observer avec toutes leurs dépendances, il m'a fallu d'autres secours, car étant ordinairement accompagnées de vaisseaux d'une finesse extrême, ces vaisseaux s'affaîssent les uns sur les autres, si-tôt qu'on les tire de l'eau, & ne forment alors qu'un peloton auquel on ne peut rien connoître, ce qui m'obligea de chercher un moyen commode pour les examiner flotant dans l'eau : rien ne m'a mieux réussi que de border une glace avec de la cire, & de mettre la pièce que je voulois observer nageant dans l'eau avec laquelle j'avois rempli ce petit bassin. Il est bon de remarquer en passant que les liqueurs flegmatiques, pourvû qu'elles soient bien claires, sont préférables aux spiritueuses, parce que ces dernières s'évaporant aisément, sur-tout lorsqu'elles sont exposées au Soleil, forment par une partie de ces exhalaisons qui se condensent sur la lentille du Microscope, une espece de broüillard qui nuit beaucoup à l'observateur.

Ayant donc examiné de la manière dont je viens de parler; quelques pierres garnies de la matière qui les environnoit, & que j'avois tirées des fruits qui avoient macéré fort longtemps, j'apperçus un nombre prodigieux de fibres que je crois être des vaisseaux très-fins, qui étoient disposées en manière de rayons autour de chaque pierre, avec quelques autres

vaisseaux beaucoup plus gros, qui quelquefois venoient se terminer & se perdre, pour ainsi dire, à une pierre; d'autrefois ils en sortoient, ou sans s'y être divisés, & presque aussi gros qu'ils y étoient entrés, ou après s'y être divisés en trois ou quatre branches.

J'ai remarqué que pour faire ces observations, il falloit prendre des fruits qui eussent atteint leur grosseur, car on ne pourroit pas découvrir cet épanouissement de vaisseaux dans les jeunes fruits; ces vaisseaux ne se développent pas tout d'un coup, il est même un temps où on ne peut presque les y appercevoir.

Immédiatement après que les Poires sont nouées, je n'ai pu découvrir dans leur intérieur, comme je l'ai remarqué, qu'une substance blancheâtre & uniforme où les principes des pierres & des vaisseaux sont confondus.

Quelque temps après, lorsque les pierres commencent à se diviser par grains, ces petits vaisseaux ne sont guères apparents.

Enfin on commence à les appercevoir lorsque les pierres prennent une certaine solidité, mais c'est encore bien confusément, ils sont courts, gros, & assez solides, de la même couleur que les pierres, ce qui fait qu'on a bien de la peine à les distinguer d'avec elles; mais peu à peu, & à mesure que la Poire approche de sa maturité, ces vaisseaux s'emplissent de liqueur, s'émincissent, s'allongent, s'attendrissent & blanchissent, pendant que les pierres durcissent, deviennent opaques, & rougissent un peu, ce qui fait qu'on peut alors distinguer beaucoup plus aisément ces deux parties. C'est dans ce temps que par le secours des macérations, on découvre la route, la multitude & la disposition des vaisseaux, tels que nous venons de les décrire.

On voit encore assez distinctement ce même arrangement dans un petit morceau de Poire coupé très-mince, en l'exa-
PL. II.
Fig. 12.

Il ne faut pas croire que ce que je viens de dire de ces pierres se rencontre seulement dans les Poires qu'on appelle

communément *pierreuses*, je les ai trouvées dans la Magdelaine d'Été, la Virgouleuse & l'Ambrette, qui sont des fruits fondants, aussi-bien que dans le Bon-chrétien & le Saint-Martial, qui en sont de cassants, cependant elles sont plus grosses & plus sensibles dans les dernières que dans les premières.

On souhaitera peut-être sçavoir comment se forment certaines grosses pierres qui se trouvent par accident dans quelques Poires; mais comme je crois qu'à cela près qu'elles prennent plus de nourriture, elles croissent de la même manière que les autres pierres, je me réserve à en parler, lorsque je donnerai mes conjectures, qui s'étendront sur les unes & les autres en même temps.

Ainsi, pour le présent, je me contenterai de remarquer qu'il ne manque presque jamais de s'y aboucher un, deux, ou trois gros vaisseaux, quand même ces pierres se trouveroient dans le tissu pierreux, lieu où les vaisseaux sont ordinairement très-fins.

A cette occasion on peut encore observer que quand les pierres se trouvent dans le tissu pierreux, il n'y a ordinairement en cet endroit ni épiderme, ni corps muqueux, mais seulement une espèce de gale qui est fortement attachée aux pierres, ce qui n'est pas surprenant; car ces grosses pierres, qui sont de la nature des exostoses, ou de quelque autre concrétion osseuse, sont occasionnées ordinairement par un coup de grêle, la picqueure d'un insecte, ou quelques autres causes extérieures qui détruisent l'épiderme & le corps muqueux: or, comme nous l'avons remarqué en parlant de ces membranes, elles ne se régénèrent point, quand le corps muqueux a été détruit jusques sur le tissu pierreux.

Depuis que nous parlons de ces petits corps durs qui sont répandus en si prodigieuse quantité dans les Poires, je leur ai toujours donné le nom de *pierres*, mais ce n'est que pour me conformer au langage ordinaire, je n'ai garde de les confondre avec les pierres minérales ou fossiles, ni même avec les pierres qu'on trouve dans les reins & la vessie des

Animaux ; elles se forment bien différemment :

Les pierres minérales ne sont point des corps organisés qui reçoivent leur nourriture par l'entremise des vaisseaux.

Un suc pétrifiant peut être de la nature du cristal ou de la sélénite, pénétre de la terre, du bois, des coquillages, & ces corps deviennent ainsi des pierres.

Ce n'est point non plus une cause intérieure qui les fait grossir, la chose est bien plus simple, ce sont des incrustations de la même matière à peu-près que celles du noyau de la pierre, & qui s'endurcissent de la même manière, ainsi le volume de la pierre augmente à mesure qu'il s'en forme de nouvelles.

Pour peu qu'on fasse attention à nos observations, on reconnoîtra que les pierres de nos Végétaux (car je conserve le terme en faveur de l'usage) ne grossissent point par des incrustations, mais par les sucres que leur charrient le nombre prodigieux de vaisseaux qui viennent y aboutir. Pourquoi en effet tant & de si gros vaisseaux qui aboutissent principalement à ces pierres monstrueuses, qui les pénètrent, & en sortent divisés en trois ou quatre ramifications, s'ils ne servoient en rien à leur accroissement ?

Pourquoi ce nombre prodigieux de petits vaisseaux qui forment des rayons autour de ces pierres, sinon pour charrier la liqueur de quelques sécrétions ?

Enfin si ces pierres étoient formées par incrustations, pourquoi n'apperceverions-nous pas ces lames qui en font le caractère ?

Pour établir encore plus la différence entre nos pierres & les minérales, nous pourrions dire que celles-ci brûlent au feu, & se dissolvent pour la plupart par l'ébullition, ce qui n'arrive pas ordinairement aux pierres minérales.

Il paroît donc probable que les pierres de nos Poires sont des corps organisés.

Il reste encore deux questions aussi curieuses & aussi embarrassantes l'une que l'autre : comment ces pierres ont-elles été formées, & pourquoi l'ont-elles été ?

Nous avons remarqué que les Poires, immédiatement après être noûées, n'avoient point de pierres, que peu de temps après elles en étoient toutes remplies, & qu'enfin, lorsqu'elles étoient grosses & approchantes de leur maturité, ces pierres dispaçoient presque entièrement. Ces circonstances rendent la première question embarrassante ; car enfin d'où viennent-elles, quand elles commencent à paroître ? & que deviennent-elles, quand on ne les apperçoit plus ? D'un autre côté les usages deviennent ainsi compliqués plusieurs ensemble ; car est-il probable qu'un corps qui change si visiblement de consistance & de nature, produise constamment les mêmes effets.

Pour essayer de satisfaire à l'une & à l'autre question, je commence à examiner les pierres dès leur origine, dans le temps qu'elles n'ont pas encore cette solidité qui les rend si sensibles & si aisées à découvrir, lorsqu'on ne les distingue encore que parce qu'elles sont d'une substance plus serrée que le reste de la Poire, en un mot telles qu'elles paroissent dans les fruits nouvellement noûés. Que sont-elles alors ? pour moi je les regarde comme des pelotons de vaisseaux ou des glandes ; leur figure & leur tissu semblent en être des caractères bien marqués, aussi-bien que leur situation par rapport aux autres vaisseaux : mais de plus les différentes liqueurs qui doivent servir à la formation de l'amande n'en supposent-elles pas, puisque la préparation des liqueurs est du ressort des glandes ? J'ajouterai encore, si l'on peut se servir de comparaison, que la matrice des Animaux en est toute tapissée intérieurement.

Ces petits grains, dans le temps qu'ils sont mols, sont donc des glandes qui doivent préparer quelques liqueurs dans lesquelles par conséquent les suc du Poirier doivent circuler.

Or ces suc sont visqueux & très-tartareux, & les vaisseaux dans lesquels ils doivent circuler, sont d'une finesse extrême & fort repliés, ce qui me fait soupçonner qu'un sédiment analogue au Tartre, s'attache peu-à-peu aux parois intérieurs de ces petits vaisseaux, en diminüe le diamètre, & commence

à leur donner cette solidité que nous remarquons dans les jeunes fruits. Pour lors les liqueurs, qui ne peuvent passer en si grande abondance, refluent en quelque manière sur elles-mêmes, dilatent les vaisseaux, & se forment de nouvelles routes par des vaisseaux latéraux qu'elles dilatent aussi, leur donne plus de volume en longueur & en diametre, ce qui les rend plus aisés à appercevoir, & augmente considérablement la grosseur du fruit.

J'ai dit encore que lorsque les Poires approchoient de leur maturité, les pierres devenoient presque insensibles, quoiqu'elles fussent en aussi grand nombre, aussi grosses & plus dures : la cause en est la même.

L'obstruction * produit le reflux des liqueurs dans les vaisseaux, le reflux augmente le volume des vaisseaux : par l'augmentation du volume des vaisseaux, les pierres se trouvent plus écartées les unes des autres, ce qui fait qu'elles sont moins sensibles, quoique par le progrès de cette obstruction elles se soient considérablement endurcies.

Toutes les pierres n'acquièrent cependant pas la même dureté, car on en trouve qui sont très-dures, d'autres qui ne le sont que médiocrement, pendant que quelques-unes sont tout-à-fait molles, comme dans les fruits nouvellement noués. C'est de ce plus ou moins de pierres endurcies que vient la différence des Poires pierreuses d'avec celles qui ne le sont pas, & le plus ou moins de pierres endurcies dépend peut-être du plus ou moins de Tartre qui est charrié avec les liqueurs, comme le prouvent les observations suivantes.

Premièrement, les pierres considérablement endurcies sont en plus grand nombre dans les Poires cassantes que dans les fondantes, parce que le Tartre y est dissous dans moins de fluide, & par conséquent s'arrête plus aisément dans les petits vaisseaux qui forment les glandes.

* Il ne faut pas prendre le terme d'*obstruction*, comme on le prend ordinairement, pour exprimer un effet contre nature, ou, ce qui est la même chose, une maladie, car je ne lui fais signifier autre chose que la diminution du diametre des vaisseaux, telle qu'elle arrive dans les os, lorsqu'ils s'endurcissent.

2.^o C'est pour cette même raison que les fruits dans les terrains secs sont plus pierreux que dans d'autres.

3.^o Les coups de grêle peuvent occasionner en quelques endroits une grosse pierre, parce que l'obstruction étant une fois commencée, le Tartre s'y arrête plus aisément.

4.^o Les Poires d'Été sont moins sujettes à avoir des pierres que celles d'Automne, parce que les liqueurs circulant avec plus de rapidité, le Tartre ne s'y dépose pas si aisément.

J'ai considéré les pierres dans deux états; sçavoir, lorsqu'elles sont encore molles, & j'ai commencé à prouver qu'elles faisoient alors la fonction de glandes.

Le second état où je les ai considérées, c'est lorsqu'elles commencent à s'obstruer, & j'ai dit qu'alors elles occasionnoient un reflux qui servoit beaucoup à augmenter le volume des fruits. Lorsque je parlerai des vaisseaux, j'aurai occasion de justifier les usages que j'ai attribué à nos pierres dans l'un & l'autre état, mais on peut encore les considérer dans un troisième, c'est-à-dire, lorsqu'elles sont tout-à-fait obstruées, car je crois qu'elles ne sont pas alors tout-à-fait inutiles dans la Poire, & après avoir fait dans le jeune fruit l'office de glande, elles peuvent faire ensuite celui d'os, & servir de points d'appui aux fibres, qui sans cela n'auroient point eu de soutien à cause de leur longueur.

Par exemple, les fruits qui n'ont point ces sortes de points d'appui, comme les Pêches, les Abricots & les Pommes, n'ont pas la solidité des Poires.

Dans les Poires même, celles qui n'ont qu'une petite quantité de pierres qui s'endurcissent, comme les Poires fondantes, n'ont pas la solidité des autres, qu'on appelle à cause de cela les *Poires cassantes*.

Encore une chose qu'il est bon d'observer, c'est que dans le temps que l'arbre est le plus occupé à la formation du pépin, c'est-à-dire, lorsque le fruit noie, & un peu après, les glandes sont molles, & remplissent presque tout le fruit, elles ne s'obstruient & ne durcissent que peu-à-peu, de sorte qu'elles n'ont

n'ont acquis leur parfaite solidité que lorsque le pépin est presque parvenu à sa grosseur, & c'est alors que le fruit prend la sienne.

Je ne prétends pas dire qu'il ne circule plus de liqueur dans les pierres, lorsqu'elles ont une fois acquis une certaine solidité ; il faut bien que les liqueurs circulent dans les os, qui sont infiniment plus durs, puisqu'ils croissent dans les jeunes gens, & se régèrent à tout âge à l'occasion des fractures.

Nous nous servirons de cette circulation pour expliquer la formation de ces pierres monstrueuses, qui comme des especes d'anquiloses, sont produites par une trop grande affluence de ce suc tartareux auquel nous attribuons la formation des pierres.

Il est naturel que les glandes que nous avons fait remarquer dans les différentes parties de la Poire, operent des sécrétions particulières suivant les places qu'elles occupent dans le fruit ; par exemple, celles du tissu pierreux, la liqueur de la transpiration, celles de la substance pierreuse, les liqueurs qui servent à la formation du pépin : mais nous avons crû plus à propos de remettre à en parler, lorsque nous examinerons les parties auxquelles elles sont jointes le plus immédiatement.

DES ECHANCRURES DU CALICE.

Le calice de la fleur du Poirier a dans la circonférence de son bord, cinq échancrures ou découpures, qui subsistent ordinairement autant que le fruit ; elles forment à l'extrémité de son axe, opposée à celle qui s'unit avec la queue, une especie de couronne à l'antique, qui entoure & borde en quelque manière la partie du fruit que nous avons appelée l'*ombilic*.

Par l'examen particulier que j'ai fait de ces especes d'appendices, j'ai reconnu qu'elles sont formées des trois téguments, dont l'anatomie a fait le sujet du commencement de ce Mémoire, & c'est leur dépendance des enveloppes de notre fruit, qui m'a fait juger qu'il seroit à propos d'en faire la

PL. I. Fig. 1.

322 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
description dans la partie même de mon Mémoire, où je me
suis proposé d'examiner les téguments.

PL. II.
Fig. 9.

J'ai fait remarquer, en parlant des pierres, que la partie intérieure de la roche étoit formée par l'allongement du canal pierreux, qui s'épanouit par son extrémité en manière de trompe, c'est des bords de cet évasement que partent les especes d'apophyses ou allongements pierreux, qui étant recouverts par une duplicature de l'épiderme & du corps muqueux, forment les appendices de l'ombilic, ou, ce qui est la même chose, les échancrures du calice.

Si les pierres font l'office de glandes avant qu'elles soient endurcies, la grande quantité qu'on en trouve à l'ombilic de la Poire mûre, nous indique qu'il y avoit beaucoup de glandes en cet endroit, lorsque le fruit étoit encore fort jeune. En fera-t-on surpris, si l'on fait attention que dans le temps de la fleur, c'est en cet endroit que toutes les étamines & les pétales prenoient leur naissance, mais lorsqu'après le desséchement des étamines & des pétales, ces glandes s'endurcissent, devenues alors des corps solides ou des especes, d'où elles communiquent leur solidité aux appendices du calice; assés souvent même cet endurcissement est si grand que le suc nourricier ne pouvant passer au corps muqueux, cette membrane devient comme caleuse, & s'attache si fortement aux pierres & à l'épiderme, que ces trois téguments ne font qu'un corps qui devient coriace à peu-près comme des ongles.

J'ai encore remarqué que quelques-uns des pédicules des étamines s'endurcissent quelquefois, & pour lors ils sont beaucoup plus gros que dans le temps de la fleur, & restent attachés aux parois de l'ombilic jusqu'à l'entière destruction du fruit.

DU TISSU FIBREUX DE LA PEAU.

Sous le tissu pierreux, on apperçoit une substance plus ferme que le reste de la Poire, & dans laquelle les pierres sont enchassées à peu-près de la même manière que quelques Anatomistes ont prétendu que le sont sur le cuir, les glandes milliérées des Animaux.

Pour découvrir la structure de cette substance, il faut après avoir levé l'épiderme, le corps muqueux & le tissu pierreux d'une Poire macérée, sétinguer de l'eau sur sa superficie, mais il faut que cette Poire nage dans l'eau, & en soit même couverte de deux à trois lignes, afin que les vaisseaux qu'on veut appercevoir ne s'affaissent pas les uns sur les autres, & que ceux qu'on détruit se détachent & se dégagent plus aisément d'entre les gros.

De cette manière je l'ai reconnu formée d'un lassis d'assés PL. I. Fig. 8.
gros vaisseaux qui s'anastomosent fort souvent les uns avec les autres, & qui pour cette raison ne peuvent être détachés ni épanouïs comme ceux du reste de la Poire, ce qui fait qu'on est obligé de détruire toute cette substance, lorsqu'on veut examiner les vaisseaux.

Par cet examen, on reconnoît donc dans cette substance une structure assés particulière, pour être distinguée du reste de la Poire : j'ai crû ne pouvoir mieux la comparer qu'au cuir des Animaux, ou, ce qui est la même chose, à la peau proprement dite, ou encore au tissu fibreux de la peau, parce que cette enveloppe dans les Animaux, comme dans nôtre fruit, est un lassis & un entrelassement très-serré de vaisseaux.

Il y a cependant cette différence, que la pierre n'ayant pas, à beaucoup près, tant d'especes de vaisseaux que les Animaux, son tissu fibreux & son cuir ne peuvent être ni si forts, ni si distincts.

J'aurois encore plusieurs choses à faire remarquer sur la structure de ce tégument, mais c'est un détail dans lequel on ne peut bien entrer, sans avoir donné une idée des vaisseaux; c'est pourquoi il suffit pour le présent d'avoir caractérisé cette quatrième & dernière enveloppe que j'ai appelée le *tissu fibreux de la peau* de la Poire.

Il est bon, avant de terminer cette première Partie, d'observer encore que les quatre téguments dont nous avons donné la description, composent la peau de la Poire de telle sorte, que par la partie, que nous avons appelée l'épiderme,

324 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
elle met le fruit à couvert de plusieurs accidents auxquels
sans cela il seroit exposé.

Par son corps muqueux & son tissu pierreux ou glandu-
eux elle opere la transpiration, qui est une des principales
opérations de la peau.

Enfin par cet entrelassement de vaisseaux que nous avons
appellé son *tissu fibreux*, elle peut retenir le fruit dans les bornes
de sa crûe, & c'est peut-être lorsque ce tissu est attaqué de
quelques maladies d'un côté, qu'en ne prenant sa nourriture
que du côté opposé il devient contrefait.

R E M A R Q U E.

M.^{rs} Malpighi, Grew, Leuvenock & Ruich, ces illustres
Observateurs, ont travaillé sur l'anatomie de la Poire, & leurs
recherches m'ont été d'une grande utilité.

Je voudrois qu'il me fût possible de rendre justice à leurs
découvertes dans le corps de mon Mémoire; mais comment
(dans un Mémoire qui ne peut avoir qu'une certaine étendue,
pour être inséré dans ceux de l'Académie) entreprendre
de faire, pour ainsi dire, la concorde de ces quatre grands
observateurs, ou même la critique des uns par les observa-
tions des autres? La chose m'a paru impossible, c'est pourquoi
je me suis contenté de les citer dans les principaux endroits,
en mettant par renvoi au bas des pages le nom de celui de
ces Auteurs qui m'a paru avoir le mieux observé la partie
dont il s'agira dans chaque article, sans cependant prétendre
indiquer par-là qu'il y ait une conformité parfaite entre ce
qu'a observé l'Auteur cité, & ce que je rapporte dans mon
Mémoire; il pourroit bien cependant m'échapper quelques
endroits remarquables des Observations de M. Grew, parce
que comme son Ouvrage est écrit en Anglois, je n'ai pu
avoir qu'une légère idée de ce qui est contenu dans son Livre
in-folio.

EXPLICATION DES FIGURES.

PREMIÈRE PLANCHE.

Figure 1^{re}. La Poire en entier, où l'on peut remarquer,

a, sa queue, ou son pédicule.

b, son corps.

c, sa tête, ou son nombril, ou son œil.

Fig. 2. Un petit morceau de Poire où l'on voit

a, des petites élevures d'épiderme grossies au Microscope.

Fig. 3. Un petit morceau de la pelure d'une Poire, pour faire voir les inégalités qu'on apperçoit sur la superficie de la plupart des Poires, quand on les examine avec la Loupe.

Fig. 4. Un morceau d'épiderme vû au Microscope, où l'on apperçoit de deux especes de trous pour laisser passer la transpiration; les uns plus grands, qui sont comme un réseau, & les autres plus fins, qui sont comme un fond de sable.

Fig. 5. Le corps muqueux vû au Microscope, où l'on apperçoit,

a, les mêmes trous qu'à l'épiderme, mais moins apparents.

b, quelques glandes du tissu pierreux.

Fig. 6. Le tissu pierreux ou glanduleux qui est sous le corps muqueux.

Fig. 7. Le même tissu pierreux vû au Microscope, où l'on peut remarquer de gros vaisseaux qui vont répondre à quelques-unes de ces pierres, ou qui passent des unes aux autres.

Fig. 8. Une Poire dépouillée de toutes les membranes dont je viens de parler, & sur laquelle on peut remarquer,

a, les gros vaisseaux qui vont rendre au tissu pierreux.

b, l'entrelassement des vaisseaux que j'ai appelé le *tissu fibreux de la peau*.

c, un tuyau ou une seringue qui est nécessaire pour découvrir cet entrelassement.

SECONDE PLANCHE.

Figure 1^{re}. Une Poire coupée suivant sa longueur, où l'on peut remarquer,

- a*, les téguments dont je viens de parler.
- b*, la roche.
- c*, les pistils desséchés.
- d*, le canal pierreux.
- e*, la gaine pierreuse.
- f*, la substance pierreuse.
- g*, les loges des pépins.
- h*, un pépin dans sa loge.
- i*, l'insertion de la queue au corps de la Poire.
- l*, le pédicule de la Poire.
- m*, une cavité qui est entre les loges des pépins.

Fig. 2. Une Poire coupée de travers dans laquelle on voit,

- a*, les téguments.
- b*, la substance pierreuse.
- c*, la coupe de plusieurs gros vaisseaux, qui sont assés souvent au nombre de dix, & quelquefois on n'en apperçoit que cinq, mais dans l'un & l'autre cas ils vont se rendre à la roche.
- d*, les loges des pépins où il y en a deux dans chaque loge.
- e*, la cavité qui est entre les loges des pépins, & qui est fort grande dans quelques especes, & très-petite dans d'autres.
- f*, une substance particulière qui est entre les loges des pépins.

Fig. 3. La substance pierreuse séparée de toutes les autres parties, & dans laquelle les pépins sont renfermés.

Fig. 4. La roche vûë à la Loupe.

- a*, la partie de la roche qui est formée du tissu pierreux.
- b*, un stilet qui est passé dans l'ouverture par où les pistils doivent passer.
- c*, l'insertion d'un des dix gros vaisseaux à la roche.

d, d'autres vaisseaux plus petits qui partent de la roche pour se distribuer dans la substance charnue de la Poire.

e, la portion interne de la roche, qui est formée par un épanouissement du canal pierreux.

Fig. 5. La même roche, pour faire voir qu'elle ressemble assez bien à un cône tronqué *a, b, c*.

Fig. 6. Une pierre de la substance pierreuse, vûe au Microscope avec les vaisseaux qui l'accompagnent.

a, les vaisseaux capillaires.

b, les gros vaisseaux.

Fig. 7. Une pierre pareille, tirée d'un jeune fruit, vûe au Microscope.

a, les vaisseaux qui sont fort courts.

b, la pierre, qui n'est pas encore bien endurcie.

Fig. 8. Le canal pierreux, qui est quelquefois tout d'une pièce.

a, ce canal.

b, un stilet qui passe dans l'ouverture par laquelle les pistils doivent passer.

Fig. 9. La continuation de ce canal, qui fait la portion interne de la roche.

a, le noyau de la roche.

b, un des pistils desséché qui passe au travers.

Fig. 10. Le même noyau coupé suivant sa longueur, pour faire voir

a, les pistils desséchés qui le traversent.

Fig. 11. Une grosse pierre du canal pierreux vûe au Microscope.

a, des vaisseaux devenus pierreux, &c qui joignent ensemble les différentes pierres *b, b, b, b*.



*OBSERVATION ANATOMIQUE
SUR UNE ALTERATION SINGULIERE
DU CRISTALLIN
ET DE L'HUMEUR VITRE'E.*

Par M. MORAND.

UN Homme de quarante ans, mort à l'Hôpital de la Charité le 31 Juillet de la présente année, d'une Hémiparésie ascite, avoit à l'Oeil gauche une Cataracte jaune, qui paroïssoit vieille, & faisoit une grande difformité; je fus curieux d'examiner cet Oeil, dans lequel je croyois trouver un Cristallin opaque, comme dans les Cataractes ordinaires; mais lorsqu'il fut détaché de l'orbite & disséqué exactement, j'y trouvai plusieurs choses si singulières, qu'elles me parurent mériter la description que j'en donne.

Cet Oeil détaché de l'orbite, & dépouillé des muscles & des graisses qui l'environnent (*Fig. A*) n'étoit point de la forme ordinaire; vu pardevant, il étoit plus quarré que rond; il avoit sur sa surface quatre enfoncements ou sillons paralleles au plan des quatre muscles droits. Comme tout le globe étoit maigre & atrophie, je jugeai que la contraction de ces muscles avoit fait ces enfoncements, faute de résistance de la part des parties intérieures de l'Oeil. Au travers de la Cornée transparente, l'Iris paroïssoit plus large en haut qu'en bas, & l'ouverture de la Prunelle presque régulièrement quarrée.

Après l'examen superficiel de cet Oeil, je fis une coupe circulaire du globe, à deux lignes au de-là du rebord de la Cornée transparente, pour partager tout l'Oeil en deux hémispheres, dont l'antérieure seroit plus petite. La Sclérotique & la Choroïde étant entamées par cette coupe, je fus surpris de voir qu'il ne s'écoulat ni humeur aqueuse, ni rien qui pût ressembler à quelque portion de l'Humeur vitrée; je fis de
tout

tout le globe de l'Oeil deux pièces. (*Fig. B. C.*) la pièce *B* me donna la face postérieure de l'Iris & du Cristallin ; le Cristallin étoit d'une couleur blanche tirant sur le jaune, & de la consistance de la pierre la plus dure.

Il me parut plus ovale que rond (*Fig. D.*) A une partie de son bord supérieur, il étoit comme usé en quelques endroits ; ayant essayé de l'ôter de sa place, je le trouvai retenu à sa partie inférieure par la membrane cristalline qui étoit transparente, & qui adhéroit à l'Iris dans presque toute sa circonférence (*Fig. E.*) je détachai le Cristallin de cette membrane pour voir sa face antérieure (*Fig. F.*) sur laquelle étoit une pellicule membraneuse & opaque que j'enlevai aisément.

Cette pellicule recouvroit une petite cavité (*Fig. G.*) située horizontalement, eu égard à la position de l'Oeil dans l'Orbite, & creusée dans l'épaisseur du Cristallin même ; à cette face antérieure le Cristallin étoit plus plat qu'à la postérieure.

La coupe de l'hémisphère postérieure (*Fig. C.*) monroit le chaton de l'Humeur vitrée bien marqué & parfaitement proportionné au Cristallin qui tenoit à l'autre coupe ; mais au lieu de l'Humeur vitrée qui auroit dû remplir cet hémisphère, je vis d'abord une substance gélatineuse, de couleur cendrée, d'une consistance assez ferme, dont la couche étoit épaisse de demi-ligne, & cette matière (*Fig. L.*) composoit le chaton qui recevoit le Cristallin pierreux. Le chaton étoit entouré des fibres ciliaires, mais fort irrégulièrement arrangées (*Fig. C.*) Cette matière gélatineuse, qui étoit apparemment un reste d'Humeur vitrée, étoit enveloppée d'une membrane très-déliée, & recouvroit un petit Os dont le fond du globe étoit rempli, laissant cependant entre ce petit Os & la Sclérotique un espace auquel il est vrai-semblable d'attribuer la facilité que les muscles droits ont eû de faire sur le globe les quatre dépressions parallèles à leur plan ; la Sclérotique, beaucoup plus épaisse & plus dure que dans l'état naturel, étoit intérieurement revêtue de la Choroïde à l'ordinaire.

L'Os qui tenoit la place de l'Humeur vitrée, avoit du côté du Nerf optique la forme d'un culot moulé dans le fond

du globe (*Fig. H.*) En tenant l'Oeil par le Nerf optique, ce culot étoit suspendu par un petit cordon mollaſſe que formoit la Rétine avant ſon épanouiſſement, & par une coupe de la Sclérotique on voyoit bien que ce cordon venoit du Nerf optique (*Fig. I.*) Du côté le plus large, & qui regarde le Criſtallin, ce petit Os étoit creuſé & recouvert de la matière gélatineuſe qui formoit le chaton du Criſtallin.

La *Fig. M* repréſente cette cavité, qui en quelques endroits étoit revêtue de quelques portions de la Rétine. La *Fig. N* montre la face poſtérieure du culot, où l'on voit le trou rond dont il étoit percé pour le paſſage de la Rétine. A une des faces de côté il y avoit un autre trou (*Fig. O.*) par où reſortoient quelques filets de la Rétine, qui ſ'attachoient à la Choroïde. Ce petit Os eſt plus épais dans quelques endroits que dans d'autres, & compoſé de fibres abſolument oſſeufes, dont le tiſſu eſt irrégulier, & qu'on a tâché de rendre ſenſible dans les trois Figures *M. N. O.*

Cette altération du Criſtallin & de l'Humeur vitrée étant digne de remarque, j'ai fait tout ce que j'ai pû pour en découvrir la cauſe, & par les perquiſitions que j'ai faites, j'ai appris que le Sujet incommodé étoit borgne depuis plus de vingt ans; qu'à l'âge d'environ quinze ans il avoit eu ſur cet Oeil une fluxion violente, à la ſuite de laquelle s'étoit formée une Cataracte jaune, & que pluſieurs Oculiſtes lui ayant offert d'en faire l'opération, il n'avoit jamais voulu la ſouffrir. Un Oculiſte, qui au lieu des parties molles & preſque fluides, telle que l'Humeur vitrée, auroit rencontré un Os avec ſon Aiguille, auroit été bien déconcerté. Il ne ſera peut-être pas inutile à ceux qui ſe mêlent de l'opération de la Cataracte, de connoître cet exemple, quoique rare & peut-être le ſeul, d'une Oſſification dans le globe de l'Oeil.



M É T H O D E

*Pour déterminer le sort de tant de Joueurs que l'on voudra;
& l'avantage que les uns ont sur les autres, lorsqu'ils
jouent à qui gagnera le plus de parties dans un nombre
de parties déterminé.*

Par M. NICOLE.

DANS le Mémoire que je lus, il y a quelques jours, j'ai 29 Mars
1730. déterminé le sort de deux Joueurs, & l'avantage de l'un sur l'autre, pour tel nombre de parties que ce soit. Je me suis servi dans ce Mémoire de la méthode analytique, & en parcourant toutes les Equations que la nature des différentes questions fournit, j'ai fait voir de quelle manière elles conduisent à la solution de chaque cas. La comparaison des grandeurs résultantes de chaque solution de ces différents cas, fait ensuite découvrir la loi selon laquelle ces grandeurs croissent, & donne la solution générale pour un nombre de parties quelconque.

Dans le Mémoire que je donne aujourd'hui, je me sers aussi d'abord de la même méthode analytique, mais les différents cas que l'on est obligé d'examiner, devenant bien-tôt fort composés, & par-là le nombre des Equations dont il faut faire usage, devenant très-grand, j'abandonne cette méthode, qui n'a donné la solution que de quelques cas particuliers, & en donne une autre beaucoup plus simple, & qui satisfait à tous les cas possibles que l'on peut proposer sur cette matière. Cette nouvelle manière de procéder, fournit encore une autre utilité, c'est une méthode générale pour élever un Multinôme composé de tant de parties que l'on voudra, à une puissance quelconque, beaucoup plus simple, & qui demande considérablement moins de calcul que les méthodes ordinaires.

PROBLEME I.

Trois Joïeurs, dont les forces sont entr'elles, comme les grandeurs p, q, m , jouient ou parient à qui gagnera le plus de fois en un nombre déterminé de parties. On demande le sort de chacun de ces Joïeurs, & l'avantage du Joïeur le plus fort sur chacun des autres.

SOLUTION.

Si l'on nomme a l'argent qui est au jeu, ou la mise des trois Joïeurs, & si l'on suppose qu'ils jouient en une partie,

le sort du 1.^{er} Joïeur sera $\frac{1.0.0 \quad 0.1.0 \quad 0.0.1}{p \times a + q \times 0 + m \times 0} = \frac{ap}{p+q+m}$.

Celui du second. $\frac{aq}{p+q+m}$.

Celui du troisiéme. $\frac{am}{p+q+m}$.

Où il faut remarquer que les nombres 1.0.0, 0.1.0 & 0.0.1 qui sont écrits au-dessus de chaque terme de la quantité qui exprime le sort du premier Joïeur, indiquent le nombre de parties que chaque Joïeur a gagné; par exemple, 1.0.0 exprime que le premier Joïeur a gagné une partie, & les deux autres n'en gagnent point, ce qui doit être entendu pour la suite de ce Mémoire; 3.2.1 exprimera de même que le premier Joïeur a gagné 3 parties, le second 2 parties, & le troisiéme une partie.

Les inconnuës f, x, y, z, t, r , &c. expriment ici le sort du premier Joïeur, dans les différents états indiqués par les nombres dont on vient de parler, ou, ce qui est la même chose, la partie de l'argent qui est au jeu, laquelle appartient à ce Joïeur relativement à chaque état.

Si l'on joue en deux parties

Le sort du 1.^{er} est $f = \frac{1.0.0 \quad 0.1.0 \quad 0.0.1}{p \times x + q \times y + m \times z}$; pour déterminer la

valeur de f , on a $x = \frac{2.0.0 \quad 1.1.0 \quad 1.0.1}{p \times a + q \times \frac{1}{2}a + m \times \frac{1}{2}a} = \frac{ap + \frac{1}{2}aq + \frac{1}{2}am}{p+q+m}$,

$$y = \frac{p \times \frac{1}{2}a + q \times 0 + m \times 0}{p+q+m} = \frac{\frac{1}{2}ap}{p+q+m}, \text{ \& } z = \frac{p \times \frac{1}{2}a + q \times 0 + m \times 0}{p+q+m} \\ = \frac{\frac{1}{2}ap}{p+q+m}. \text{ D'où l'on tire } f = \frac{app + \frac{1}{2}apq + \frac{1}{2}apm + \frac{1}{2}apq + \frac{1}{2}apm}{p+q+m} \\ = \frac{app + apq + apm}{p+q+m}.$$

Le sort du second est donc $\frac{aqq + apq + aqm}{p+q+m}.$

Et celui du troisième est $\frac{amm + amq + apm}{p+q+m}.$

Lesquels sont entr'eux comme $pa, qa, ma.$

Si l'on joïe en trois parties

Le sort du 1.^{er} est $f = \frac{p \times a + q \times y + m \times z}{p+q+m}$, pour déterminer f ,

$$\text{on a } x = \frac{p \times a + q \times u + m \times t}{p+q+m}, u = \frac{p \times a + q \times 0 + m \times \frac{1}{2}a}{p+q+m} = \frac{ap + \frac{1}{2}am}{p+q+m}$$

$$\text{\& } t = \frac{p \times a + q \times \frac{1}{2}a + m \times 0}{p+q+m} = \frac{ap + \frac{1}{2}aq}{p+q+m}, \text{ donc } x =$$

$$\frac{app + 2apq + 2apm + \frac{1}{2}aqm}{p+q+m}. \text{ On a aussi } y = \frac{p \times \frac{ap + \frac{1}{2}am}{p+q+m} + q \times 0 + m \times r}{p+q+m},$$

$$r = \frac{p \times \frac{1}{2}a + q \times 0 + m \times 0}{p+q+m} = \frac{\frac{1}{2}ap}{p+q+m}, \text{ donc } y = \frac{app + \frac{1}{2}apm}{p+q+m}.$$

$$\text{On trouvera aussi } z = \frac{p \times \frac{ap + \frac{1}{2}aq}{p+q+m} + \frac{q \times \frac{1}{2}ap}{p+q+m} + m \times 0}{p+q+m}$$

$$= \frac{app + \frac{1}{2}apq}{p+q+m}. \text{ Si donc on substitue pour } x, y \text{ \& } z, \text{ les}$$

valeurs que l'on vient de trouver, on aura la valeur de f
pour le sort du 1.^{er} Joïeur... $\frac{ap^3 + 3appq + 3appm + 2apqm}{p+q+m}$

pour celui du second..... $\frac{a q^3 + 3 a q q p + 3 a q q m + 2 a p q m}{p+q+m}$

pour celui du troisième..... $\frac{a m^3 + 3 a m m q + 3 a m m p + 2 a p q m}{p+q+m}$

Si l'on joue en quatre parties

Le sort du 1.^{er} Joueur sera $f = \frac{p \times x + q \times y + m \times z}{p + q + m}$; pour déterminer f , on aura toutes les Equations suivantes, $x =$

$$\frac{p \times u + q \times t + m \times r}{p + q + m}, u = \frac{p \times a + q \times k + m \times l}{p + q + m}, k = \frac{p \times a + q \times \frac{1}{2}a + m \times a}{p + q + m}$$

$$= \frac{ap + \frac{1}{2}aq + am}{p + q + m}, l = \frac{p \times a + q \times a + m \times \frac{1}{2}a}{p + q + m}.$$

Donc $u = \frac{app + 2apq + 2apm + 2aqm + \frac{1}{2}aqq + \frac{1}{2}amm}{p + q + m},$

$$t = \frac{p \times \frac{ap + \frac{1}{2}aq + am}{p + q + m} + q \times g + m \times h}{p + q + m}, g = \frac{p \times \frac{1}{2}a + q \times 0 + m \times 0}{p + q + m}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}ap}{p + q + m}, h = \frac{p \times a + q \times 0 + m \times 0}{p + q + m} = \frac{ap}{p + q + m}, \text{ donc}$$

$$r = \frac{app + apq + 2apm}{p + q + m}, r = \frac{p \times ap + aq + \frac{1}{2}am + q \times ap}{p + q + m} +$$

$$\frac{m \times f}{p + q + m}, f = \frac{p \times \frac{1}{2}a + q \times 0 + m \times 0}{p + q + m} = \frac{\frac{1}{2}ap}{p + q + m}, \text{ donc } r$$

$$= \frac{app + 2apq + apm}{p + q + m} \& x = \frac{ap^3 + 3apq + 3apm + 6aqm + \frac{1}{2}aqq + \frac{1}{2}amm}{p + q + m}.$$

Pour déterminer y , on a ces Equations

$$\frac{p \times \frac{app + apq + 2apm}{p + q + m} + q \times d + m \times e}{p + q + m}, d = \frac{p \times \frac{1}{2}ap}{p + q + m} + q \times 0 + m \times 0$$

$$= \frac{\frac{1}{2}app}{p + q + m}, e = \frac{p \times \frac{ap}{p + q + m} + q \times 0 + m \times 0}{p + q + m} = \frac{app}{p + q + m},$$

donc $y = \frac{ap^3 + \frac{1}{2}appq + 3apm}{p + q + m},$ & pour déterminer z , on a

$$z = \frac{p \times \frac{app + 2apq + apm}{p + q + m} + q \times \frac{app}{p + q + m} + m \times b}{p + q + m};$$

$$b = \frac{p \times X + q \times o + m \times o}{p + q + m}, \quad X = \frac{p \times \frac{1}{2}a + q \times o + m \times o}{p + q + m} = \frac{\frac{1}{2}ap}{p + q + m},$$

donc $b = \frac{\frac{1}{2}app}{p + q + m}$, & $z = \frac{ap^3 + 3appq + \frac{1}{2}appm}{p + q + m}$. Si donc

on substitue pour x, y & z leurs valeurs, on aura f , ou le fort du 1.^{er} Joieur = $\frac{ap^4 + 4ap^3q + 4ap^2m + 12appq + 3appm + 3aqmm}{p + q + m}$.

Celui du 2.^d... $\frac{aq^4 + 4aq^3p + 4aq^2m + 12agqp + 3appq + 3aqmm}{p + q + m}$.

Celui du 3.^{me}... $\frac{am^4 + 4am^3p + 4am^2q + 12amnp + 3appm + 3aqmm}{p + q + m}$.

Lorsque l'on joie en une partie

Le fort du 1.^{er} Joieur est $\frac{ap}{p + q + m}$.

Celui du 2.^d $\frac{aq}{p + q + m}$.

Celui du 3.^{me} $\frac{am}{p + q + m}$.

Lorsque l'on joie en deux parties

Le fort du 1.^{er} est $\frac{app + apq + apm}{p + q + m}$.

Celui du 2.^d $\frac{aqg + apq + aqm}{p + q + m}$.

Celui du 3.^{me} $\frac{amm + apm + aqm}{p + q + m}$.

Lorsque l'on joie en trois parties

Le fort du 1.^{er} est $\frac{ap^3 + 3appq + 3appm + 2apqm}{p + q + m}$.

Celui du 2.^d $\frac{aq^3 + 3apqg + 3aqqm + 2apqm}{p + q + m}$.

Celui du 3.^{me} $\frac{am^3 + 3apmm + 3aqmm + 2apqm}{p + q + m}$.

Lorsque l'on joie en quatre parties

Le fort du 1.^{er} est $\frac{ap^4 + 4ap^3q + 4ap^2m + 3appq^2 + 3appm^2 + 12appqm}{p + q + m}$.

Celui du 2.^d $\frac{aq^4 + 4aq^3p + 4aq^2m + 3appqg + 3aqgm^2 + 12apqgm}{p + q + m}$.

Celui du 3.^{me} $\frac{am^4 + 4apm^3 + 4aqm^2 + 3appmm + 3aqgm^2 + 12apqm^2}{p + q + m}$.

Si $p=6$, $q=5$, $m=4$, les sorts seront

pour une partie	6.	5.	4.
pour deux.....	90.	75.	60.
ou	6.	5.	4.
pour trois.....	1428.	1115.	832.
pour quatre.....	22100.	16981.	11754.

R E M A R Q U E.

Si l'on vouloit rechercher le sort de ces trois Joüeurs; pour 5, 6, 7, 8, &c. parties, le nombre des Équations qu'il faudroit parcourir par cette méthode deviendroit fort considérable; il en faudroit parcourir encore un bien plus grand nombre, si au lieu de trois Joüeurs, on en supposoit quatre, cinq, six, &c. car ces Équations exprimant les différens événements qui peuvent arriver dans le cours du Jeu, le nombre de ces événements sera d'autant plus grand, qu'il y aura un plus grand nombre de Joüeurs, & qu'ils jouïront en un plus grand nombre de parties. Dans tous ces cas considérés, la voye des Équations est trop longue & trop pénible. Voici une méthode qui satisfait à tous les cas, quel que soit le nombre des Joüeurs, & quel que soit le nombre de parties que l'on doive jouïr.

P R O B L E M E I I.

Soit, par exemple, quatre Joüeurs, dont les forces soient exprimées par les grandeurs p, q, m, r. On demande le sort de chacun de ces Joüeurs, & l'avantage des uns sur les autres, lorsqu'ils conviennent de jouïr en huit parties; il suffit pour gagner le fond du Jeu, de gagner une partie au moins de ces huit plus qu'aucun des autres Joüeurs.

S O L U T I O N.

On sçait que $\frac{p}{p+q+m+r}$ exprime la probabilité que le premier Joüeur a de gagner la 1.^{re} partie, que $\frac{pp}{p+q+m+r}$ exprime celle qu'il a de gagner les deux premières, & enfin p^3

$\frac{p^8}{p+q+m+r}$ exprime la probabilité qu'il a de gagner les huit

parties. Si on ajoute à cette quantité la probabilité que le même Joüeur a de gagner sept de ces parties, un quelconque des trois autres Joüeurs en gagnant une.

Que l'on ajoute encore à ces deux quantités, la probabilité que ce même Joüeur a de gagner six parties, l'un des trois autres Joüeurs en gagnant deux, ou deux de ces trois Joüeurs en gagnant chacun une.

Qu'à cette somme on ajoute encore la probabilité que le même Joüeur a de gagner cinq parties, l'un quelconque des trois autres Joüeurs en gagnant trois, ou deux, ou une.

Puis la probabilité que le même Joüeur a d'en gagner quatre, l'un quelconque des trois autres Joüeurs en gagnant quatre, trois, deux ou une.

Et enfin que l'on ajoute encore la probabilité que ce même Joüeur a de gagner trois parties, l'un quelconque des trois autres Joüeurs en gagnant trois, deux ou une, & celle que ce même Joüeur a de gagner deux parties, chacun des trois autres Joüeurs en gagnant deux.

Il est clair que la somme formée par l'addition de toutes ces parties, exprimera le sort de ce 1.^{er} Joüeur, ou le droit qu'il a à l'argent qui est au Jeu : car cette somme est formée de toutes les manières possibles que ce Joüeur a de gagner, ou tout ce qui est au Jeu, lorsqu'il gagne une partie de plus qu'aucun des autres Joüeurs, ou la moitié de ce qui est au Jeu, lorsqu'un autre Joüeur gagne autant de parties que lui, ou enfin le tiers ou le quart de ce qui est au Jeu, lorsque deux ou trois des autres Joüeurs gagnent autant de parties que lui.

Or, il est évident que les nombres qui expriment combien il y a de manières de prendre huit choses, 8 à 8, 7 à 7, 6 à 6, 5 à 5, 4 à 4, 3 à 3, & 2 à 2, expriment aussi le nombre des manières que ce Joüeur a de gagner huit parties, ou sept, six, cinq, quatre, trois, deux.

Or, tout le monde sçait que la septième bande perpendiculaire du Triangle arithmétique de M. Pascal fournit tous ces

nombres, 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8. Il ne reste plus qu'à multiplier ces nombres par ceux qui expriment toutes les variétés qui peuvent arriver aux trois autres Joüeurs, pour le nombre des parties qu'ils peuvent gagner, relativement à chaque cas du premier Joüeur, & qui multiplient chacun de ces cas. Si donc on nomme a l'argent qui est au Jeu,

1.° On aura $\frac{1 \times p^8 \times a}{p+q+m+r}$ pour que ce Joüeur gagne les

huit parties, $\frac{8 \times p^7 \times q+m+r}{p+q+m+r}$ pour qu'il gagne sept parties,

chacun des autres Joüeurs en gagnant une; car il est clair que chacun des autres Joüeurs en peut gagner une en huit manières, sçavoir, ou la 1^{re} partie, ou la 2^{me}, 3^{me}, 4^{me}.... 8^{me}.

2.° On aura $\frac{28 p^6 \times q+q+m+r}{p+q+m+r}$ pour que ce Joüeur en

gagnant six, l'un des autres en gagnent deux, car 28 exprime toutes les manières de gagner six parties de huit, & sur chacune de ces manières, chacun des autres Joüeurs peut gagner les deux autres parties.

3.° On aura $\frac{28 p^6 \times 2 \times q+m+q+r+m+r}{p+q+m+r}$ pour que ce Joüeur

en gagnant six, deux des trois autres Joüeurs en gagnent chacun une; car il est clair que ces deux autres peuvent être le 2^{me} & le 3^{me}, le 2^{me} & le 4^{me}, ou le 3^{me} & le 4^{me}, & que dans chaque cas il y a deux manières.

4.° On aura aussi $\frac{56 p^5 \times q^3+m^3+r^3}{p+q+m+r}$ pour que ce Joüeur

gagnant cinq parties, l'un quelconque des trois autres en gagne trois.

5.° Puis $\frac{56 p^5 \times 3 \times q+q \times m+r+m \times q+r+r \times q+m}{p+q+m+r}$, car ce

Joüeur a 56 manières de gagner cinq parties des huit, & chacun des autres a trois manières de gagner deux parties des trois restantes.

6.° Puis $\frac{56p^5 \times 6qmr}{p+q+m+r}$ pour que ce Joüeur gagne cinq

parties des huit, chacun des trois autres en gagnant une : car trois choses se peuvent combiner en six manières.

7.° On aura aussi $\frac{70p^4 \times q^4 + m^4 + r^4}{p+q+m+r}$ pour que ce Joüeur

gagnant quatre parties, un quelconque des trois autres en gagne aussi quatre.

8.° Puis $\frac{70p^4 \times 4 \times q^3 \times m + r + m^3 \times q + r + r^3 \times q + m}{p+q+m+r}$ pour que

l'un quelconque des trois autres en gagne trois : car il y a quatre manières pour que cela arrive, quatre choses pouvant être prises 3 à 3 en quatre manières.

9.° On aura encore $\frac{70p^4 \times 6 \times qq \times mm + rr + mmrr}{p+q+m+r}$ pour

que deux quelconques des trois autres Joüeurs en gagnent chacun deux.

10.° Puis $\frac{70p^4 \times 6 \times qq \times 2mr + mm \times 2qr + rr \times 2qm}{p+q+m+r}$ pour

que l'un quelconque des trois autres en gagne deux, les deux restants en gagnant chacun une : car il y a six manières de prendre quatre choses 2 à 2, & les deux Joüeurs restants peuvent changer en deux manières.

11.° On aura aussi $\frac{56p^3 \times 10 \times q^3 \times mm + rr + m^3 \times qq + rr + r^3 \times qq + mm}{p+q+m+r}$

pour que ce Joüeur gagnant trois parties, l'un quelconque des trois autres en gagne aussi trois, chacun des restants en gagnant deux : car il y a dix manières de prendre cinq choses 3 à 3.

12.° Puis $\frac{56p^3 \times 10q^3 \times 2mr + 10m^3 \times 2qr + 10r^3 \times 2qm}{p+q+m+r}$ pour

que ce Joüeur gagnant trois parties, l'un quelconque des trois

340 MITOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
autres en gagne aussi trois, pendant que les deux restants en gagnent chacun une : or il y a dix manières de prendre cinq choses 3 à 3, & deux manières d'en arranger deux.

$$13.^{\circ} \text{ Puis } \frac{56p^3 \times 10qq \times 3mmr + 3rrm + 10m^2 \times 3rrq}{p+q+m+r} \text{ pour}$$

que ce Joüeur en gagnant trois parties, deux quelconques des trois autres Joüeurs en gagnent chacun deux, pendant que le Joüeur restant en gagne une : or il y a dix manières de prendre cinq choses 2 à 2, & trois manières de prendre les trois restantes aussi 2 à 2.

$$14.^{\circ} \text{ On aura enfin } \frac{28pp \times 15qq \times 6mm \times 1rr}{p+q+m+r} \text{ pour que ce}$$

Joüeur gagnant deux parties des huit, les trois autres en gagnent aussi chacun deux : car il y a quinze manières de prendre six choses 2 à 2, six manières de prendre quatre choses 2 à 2, & une manière de prendre les deux restantes 2 à 2.

Il est évident que ce sont là toutes les manières qu'a ce Joüeur de gagner, puisque dans toute autre manière de distribuer les huit parties, ce Joüeur en gagnera moins que quelques-uns des autres Joüeurs.

Il ne reste plus qu'à distinguer entre tous ces cas quels sont ceux qui font gagner à ce Joüeur tout l'argent qui est au Jeu, & quels sont ceux qui ne lui en font gagner que la moitié ou le tiers, ou le quart : or il est visible qu'il gagne tout, lorsqu'il a pris plus de parties qu'aucun des autres Joüeurs, qu'il ne gagne que la moitié, lorsqu'un autre Joüeur prend autant de parties que lui, qu'il ne gagne que le tiers de ce qui est au Jeu, lorsque deux autres Joüeurs gagnent autant de parties que lui, & enfin le quart de ce qui est au Jeu, lorsque les trois autres Joüeurs prennent autant de parties que lui. Le fort de ce Joüeur sera donc

$$\begin{aligned}
& ap^8 + 8ap^7 \times q + m + r + 28ap^6 \times qg + mm + rr + 56ap^6 \times qm + qr + mr \\
& + 56ap^5 \times q^2 + m^2 + r^2 + 168ap^5 \times qgm + qqr + m^2q + m^2r + r^2q + r^2m \\
& + 336ap^5qmr + 35ap^4 \times q^3 + m^3 + r^3 + 280ap^4 \times q^2m + q^3r + m^2q + m^2r + r^2q + r^2m \\
& + 420ap^4 \times q^2m^2 + q^2r^2 + m^2r^2 + 840ap^4 \times qgm^2 + m^2qr + r^2qm + 280ap^3 \\
& \times q^3m^2 + q^3r^2 + m^3q^2 + m^3r^2 + r^3q^2 + r^3m^2 + 560ap^3 \times q^2mr + m^2qr + r^2qm \\
& + 1680ap^3 \times qgm^2r + qqr^2m + m^2rrq + 630ap^2pqgmrr \\
& \hline
& p + q + m + r
\end{aligned}$$

COROLLAIRE I.

Il est évident que si dans cette formule, on met q à la place de p , & p à la place de q , elle se changera en une autre quantité composée, qui exprimera le sort du Joüeur, dont la force ou l'habileté est exprimée par q . Car le même raisonnement qui a été fait pour le premier Joüeur, doit être fait pour chacun des autres Joüeurs, ainsi en substituant encore successivement pour p les grandeurs m & r , & réciproquement, on aura les sorts des deux autres Joüeurs dont les forces sont représentées par m & r .

COROLLAIRE II.

La quantité composée qui a été trouvée pour le sort du premier Joüeur, & qui exprime dans le cours des huit parties tous les événements qui lui sont favorables, cette quantité, dis-je, étant ajoutée aux trois quantités semblables, qui résultent de la substitution qui a été faite, lesquelles expriment dans le cours des huit parties, tous les événements favorables aux trois autres Joüeurs, & qui sont contraires au premier, la somme qui en viendra sera égale à l'unité ou à l'argent qui est au Jeu. Car chacune de ces quantités étant une fraction qui exprime la partie de cet argent qui appartient à chaque Joüeur, selon le droit qu'il a à cette partie de Jeu, il est nécessaire que toutes ces portions rassemblées soient égales au tout. Or comme chacune de ces fractions a un dénominateur commun, qui dans cet exemple est la huitième puissance de $p + q + m + r$, il s'ensuit que les quatre numérateurs

342 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
pris ensemble, doivent aussi être égaux à cette huitième puissance. Le même raisonnement aura toujours lieu, quel que soit le nombre de Joüeurs, & la quantité de parties que l'on joue.

COROLLAIRE III.

Si l'on nomme A ce qui a été trouvé pour le sort du 1.^{er} Joüeur, & B, C, D , pour les sorts des autres Joüeurs, trouvés par la substitution successive de q, m, r , à la place de p , l'avantage du 1.^{er} Joüeur sur le 2.^d sera $A - B$, sur le 3.^{me} $A - C$, & sur le 4.^{me} $A - D$; & par conséquent son avantage total sera $3 A - B - C - D$. D'où il suit que l'avantage du 2.^d sera $3 B - A - C - D$, celui du 3.^{me} sera $3 C - A - B - D$, & celui du 4.^{me} sera $3 D - A - B - C$; quelques-unes de ces grandeurs seront négatives, & alors elles exprimeront le désavantage du Joüeur auquel elles appartiennent.

REMARQUE.

Si l'on fait attention à ce qui a été fait pour trouver tous les termes qui composent le sort du premier Joüeur dans l'exemple que l'on s'est proposé, on verra que dans tous les cas possibles que l'on peut proposer sur cette matière, c'est-à-dire, quel que soit le nombre des Joüeurs dont les forces soient p, q, m, r, s, t , &c. & quel que soit le nombre de parties qu'ils doivent jouer, par exemple 20, on verra, dis-je, que le sort du premier Joüeur sera composé de tous les termes de la vingtième puissance de $p + q + m + r + s + t$ &c. dans lesquels la lettre p a plus de dimensions, ou autant que quelques-unes, ou que toutes les autres q, m, r, s, t , &c. Le premier de ces termes est p^{20} , & le dernier est $p^4 q^4 m^4 r^4 s^4 t^4$, dont le coefficient doit être fait par ces nombres $\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \times \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \times \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \times \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \times \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$.

Le 1.^{er} facteur exprime en combien de manières on peut prendre 20 choses 4 à 4.

Le 2.^d les 16 restantes 4 à 4.

Le 3.^{me} les 12 restantes 4 à 4.

Le 4.^{me} les 8 restantes 4 à 4.

Et le 5.^{me} les 4 restantes 4 à 4.

Et leur produit $2845 \times 1820 \times 495 \times 70 \times 1$ exprime le nombre de manières dont chacun des cinq Joüeurs peut gagner quatre parties, & dans ce cas chacun des cinq Joüeurs doit retirer $\frac{1}{5}$ de ce qui est au Jeu.

Le terme du milieu est celui qui exprime le nombre de manières que le premier Joüeur a de gagner 12 parties, les autres cinq Joüeurs en gagnant ou 8, ou 7, 6, 5, 4, 3, 2, & 1 de toutes les façons possibles.

Il en fera de même des autres termes dont on ne donne point ici le calcul, que l'on trouvera, si l'on veut, en suivant les mêmes règles que dans l'exemple résolu.

COROLLAIRE.

On voit par le Corollaire second & par les suivans, que chercher le sort du premier Joüeur entre plusieurs, dont les forces sont p, q, m, r, f, t , &c. lesquels jouent un nombre n de parties; c'est chercher dans le multinôme $p + q + m + r + f + t + \dots$ &c. élevé à la puissance n , tous les termes où p a plus de dimensions, ou au moins autant qu'aucune des autres lettres q, m, r, f , &c. & que cette quantité étant trouvée, on trouve le sort des autres Joüeurs, en substituant successivement pour p les autres lettres q, m, r, f , &c. Il est donc aussi évident que les quantités trouvées par ces substitutions, représenteront aussi successivement dans le même multinôme tous les termes où les lettres q, m, r, f , &c. auront plus de dimensions, ou au moins autant que toutes les autres lettres, & qu'ainsi la même méthode que l'on a suivie, peut servir à élever un multinôme quelconque à telle puissance qu'on voudra, & qu'il suffit pour cela de trouver tout ce qui appartient à une des parties dont le multinôme est composé.

E X E M P L E.

On demande la sixième puissance de $a+b+c+d$. Pour la trouver il suffit de chercher tous les termes de cette puissance où la lettre a a plus ou autant de dimensions que chacune des autres lettres b, c, d . Ces termes sont

$$\begin{aligned} & a^6 + 6a^5 \times b + c + d + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \times a^4 \times bb + cc + dd + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \\ & \times a^4 \times 2 \times bc + bd + cd + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times a^3 \times \frac{1}{2} \times b^3 + c^3 + d^3 \\ & + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times a^3 \times \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} \times bbc + bbd + ccb + ccd + ddb + ddc \\ & + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times a^3 \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \times bcd + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \times aa \times \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \\ & \times b b c c + b b d d + c c d d \times \frac{1}{3} + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \times aa \times \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \times 2 \\ & \times b b c d + c c b d + d d b c \times \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Si dans tous ces termes qui expriment les parties de la sixième puissance, dans lesquelles la lettre a domine, on substitue successivement pour a les grandeurs b, c, d , & réciproquement pour b, c, d , la grandeur a , on aura tous les termes de cette sixième puissance où les lettres b, c, d , dominent, & en rassemblant toutes ces parties, on aura la sixième puissance demandée.



*SUR LES MOUVEMENTS
DE LA TÊTE, DU COL,
ET DU RESTE DE L'EPINE DU DOS.*

Par M. WINSLOW.

ON est à présent très-convaincu que les petits mouve- 26 Mai
ments en rond, par lesquels on tourne la Tête récipro- 1730.
quement de côté & d'autre, comme sur un pivot, n'est qu'une
espece de rotation de la première Vertebre sur la seconde. On
est persuadé que l'articulation de l'Os occipital n'y a aucune
part, & que dans tous les degrés de ce mouvement, la Tête est
simplement soutenue par la première Vertebre, qui la porte
& transporte avec elle de côté & d'autre. J'examinerai dans
un autre temps les difficultés qui pourroient encore arrêter
quelques-uns sur ce second point. On avance aussi que les
autres Vertebres du Col peuvent contribuer à cette espece de
rotation, en ce que chacune d'elles prêtent un peu en même
temps, de sorte que par-là elles font toutes ensemble un petit
tour gradué, & ainsi augmentent ce mouvement de rotation.

On sçait que les petits mouvements de Tête en devant &
en arrière, que l'on peut faire en tenant le Col immobile,
dépendent uniquement de l'articulation de l'Os occipital avec
la première Vertebre. On est d'accord que les grands mou-
vements de Tête en devant & en arrière, par lesquels on
peut abaisser, relever & renverser la Tête, sont exécutés par
le mouvement commun de plusieurs Vertebres du Col ; &
que l'articulation de la première Vertebre avec la seconde n'y
peut rien du tout contribuer, étant uniquement bornée aux
petits tours de pivot dont je viens de parler.

A l'égard des inflexions latérales par lesquelles on incline
la Tête vers l'une ou l'autre Epaule, il est évident que l'arti-
culation de l'Occiput avec la première Vertebre, ni celle de

Mem. 1730.

, X x

la première Vertebre avec la seconde ne les peuvent faire, mais qu'elles dépendent de l'articulation de la seconde Vertebre avec la troisième, & de celles des autres Vertebres suivantes entre elles.

Outre les quatre inflexions directes dont je viens de parler, & que l'on peut appeller *simples*, il y a quantité d'obliques, que l'on peut nommer *composés* ou *combinés*; & outre le mouvement de rotation ou pivot que je viens d'exposer, il s'en trouve un autre qui a beaucoup de rapport avec celui que j'ai appellé dans mon Mémoire de l'année passée, *mouvement conique*, ou *mouvement en fronde*; car on peut, en se tenant debout ou assis, faire un certain tournoyement de Tête par une combinaison successive de plusieurs inflexions du Col, de manière que par le chemin de ce mouvement, le haut de la Tête décrit un cercle, & le reste avec le Col trace une espee de cone.

Je ne m'arrête pas ici à d'autres mouvements plus combinés; par exemple, quand on fait le mouvement de charnière avec la Tête sur la première Vertebre dans le même temps que l'on fait le mouvement de pivot avec la première Vertebre sur la seconde.

L'artifice de la structure & de la connexion de ces deux premières Vertebres du Col, par rapport aux mouvements de la Tête, est à présent presque assés connu. Il s'y rencontre une circonstance que je n'ai pas encore trouvée éclaircie. C'est la mécanique de l'articulation des apophyses inférieures de la première Vertebre avec les apophyses supérieures de la seconde. J'ai déjà fait là-dessus plusieurs tentatives, mais je n'ai encore rien pû trouver d'assés clair pour être proposé avec contentement à la Compagnie. J'ai dit cela exprès, afin de donner à d'autres l'occasion d'en faire aussi la recherche.

A l'égard des cinq Vertebres suivantes, on se contente de dire que leurs apophyses, communément appellées *obliques*, facilitent tous les différents mouvements ordinaires du Col. Mais je n'ai pas été content de ce langage, après avoir fait attention que ces mêmes especes de mouvements se font aussi

par les Vertèbres des Lombes, quoique la direction de leurs apophyses obliques soit très-différente de celle des apophyses obliques du Col, & qu'elles ne peuvent pas se faire toutes par les Vertèbres du Dos, quoiqu'il y ait des apophyses obliques.

Cela m'a porté à examiner de nouveau la conformation & la connexion des Vertèbres du Col, & à comparer leurs apophyses obliques non seulement avec les apophyses obliques des Vertèbres des Lombes, mais encore avec les apophyses obliques des Vertèbres du Dos.

On sçait que chacune de la plupart des Vertèbres de l'Épine du Dos a quatre apophyses de cette espece. Elles n'ont pas toujours été appelées *obliques*. Vésale, dans sa grande & excellente Histoire des Os du Corps humain, en parlant de toutes les Vertèbres en général, & de leurs différentes apophyses, donne simplement aux deux supérieures des quatre dont il s'agit ici, le nom d'*apophyses ascendantes*, & celui d'*apophyses descendantes* aux deux inférieures. Il y fait observer que dans les Vertèbres du Col la direction de ces quatre apophyses est oblique, & que dans les Vertèbres du Dos elle est en quelque manière (*quandantenus*) droite. Il a même eu soin d'exprimer ces deux différences dans la marge de son Livre par deux lignes particulières, l'une oblique & l'autre verticale. Il avertit ensuite que dans les Vertèbres des Lombes le plan de ces apophyses a aussi une direction droite ou longitudinale. Il y a ajouté encore que ces différentes directions ont des degrés dans plusieurs Vertèbres de la même classe. Riolan a appelé ces apophyses *articulaires*, & c'est ainsi que je les nommerai après ceci plutôt qu'*obliques*.

Quant à l'usage de ces différentes directions, il n'en parle que comme en passant. Ainsi à l'occasion des Vertèbres du Col, ayant fait observer que l'obliquité de leurs apophyses ascendantes & descendantes est toujours moindre dans les Vertèbres qui approchent le plus du Dos : C'est, dit-il, parce que ces Vertèbres ne devant pas avoir un mouvement aussi lâche que celles qui sont au dessus, leur articulation de même ne devoit pas être aussi lâche. Ensuite, en parlant des Vertèbres

du Dos, il dit que leurs apophyses ascendantes & descendantes sont presque en ligne droite selon la longueur du Corps, afin que la connexion de ces Vertebres soit plus ferme, & qu'elle prête moins au mouvement.

Pour mieux exposer ce que je crois avoir remarqué en particulier sur l'usage des différentes directions de ces apophyses, il sera nécessaire de rappeler une idée courte de l'attitude, de l'assemblage & de la connexion de toutes les Vertebres, dont la colonne pliante, qu'on appelle en général *l'Epine du Dos*, est composée.

Il suffira de faire souvenir, 1.^o Que dans la plupart des Vertebres, ce qu'on appelle le *corps* est une espece de tronçon dont la portion antérieure est en quelque manière cylindrique, coupée transversalement par les deux bouts, auxquels on donne le nom de *faces*, dont l'une est supérieure, & l'autre inférieure. 2.^o Que dans les douze Vertebres dorsales, de même que dans les cinq lombaires, ces faces sont planes, au lieu que dans les Vertebres du Col la face inférieure est en quelque façon convexe, & la supérieure proportionnellement concave. 3.^o Que les corps de toutes les Vertebres tiennent fermement ensemble par une matière en partie cartilagineuse, & en partie ligamenteuse, d'une structure très-particulière, assez ferme pour soutenir toute la rangée de la colonne vertébrale, & assez souple pour rendre cette colonne plus ou moins flexible ou pliante en différents sens. 4.^o Que les deux apophyses inférieures ou descendantes de chaque Vertebre s'articulent avec les apophyses supérieures ou ascendantes de la Vertebre suivante, & que pour cet effet chacune de ces apophyses a une facette encroûtée d'un cartilage très-poli, proportionnée à la facette cartilagineuse de l'apophyse qui s'articule avec elle; de sorte que ces facettes glissent très-aisément les unes sur les autres en différents sens, en même temps que les corps ne font que prêter, moyennant l'élasticité de leur symphyse cartilagineuse.

Il faut encore faire attention que dans la plupart des Vertebres du Col, les facettes des apophyses supérieures sont

tournées obliquement en haut & en arrière, & que celles des apophyses inférieures sont tournées obliquement en bas & en devant. Dans les Vertèbres du Dos les facettes des apophyses supérieures regardent presque directement en arrière, & celles des apophyses inférieures presque directement en devant. Ainsi dans le Col ces facettes se trouvent dans autant de plans distingués qu'il y a de Vertèbres; au lieu que dans les Vertèbres du Dos les facettes se trouvent pour la plupart à peu-près ou comme dans un même plan. Enfin dans les Lombes, les facettes des apophyses supérieures de chaque Vertèbre sont tournées les unes vers les autres, de manière qu'elles se regardent mutuellement, & embrassent les facettes inférieures de la Vertèbre voisine, qui sont proportionnellement tournées dans un sens opposé.

L'articulation de ces quatre apophyses ont en tout temps partagé les Anatomistes. Les uns l'ont regardée comme une espèce de ginglyme ou charnière, qu'ils ont appelée *imparfaite*; les autres l'ont rapportée à l'arthrodie ou articulation platte, & quelques-uns l'ont nommée *articulation en double genou*. Je crois avoir remarqué le premier là-dessus une circonstance qui est particulière à l'articulation de ces apophyses, & que je n'ai trouvée dans aucune des autres articulations de tout le Corps humain, soit que ces articulations soient en boule, ou, comme on dit, en genou, soit qu'elles soient en coulisse, soit qu'elles soient en charnière.

On sçait que pendant les douze années de mes Exercices publics au Jardin Royal, j'ai plusieurs fois fait sentir sur le Sujet même l'impossibilité de charnière dans cette articulation. Mais n'ayant pas encore assez examiné la particularité dont je viens de parler, je n'ai pas poussé ma démonstration plus loin. Il est vrai que Vésale, dans son grand Ouvrage, a simplement dit, que cette articulation n'est pas ginglyme, comme Galien l'a crû, mais l'a dit sans en avoir donné aucune preuve; & comme il l'a rapportée à l'arthrodie ordinaire, il fait assez voir qu'il n'a pas fait attention à la circonstance particulière dont il s'agit à présent, & dont voici l'exposé.

Dans toutes les autres articulations du Corps humain, l'un des os articulés est toujours poussé & appuyé contre l'autre os par la contraction des muscles, & cela dans tous les degrés de mouvement & dans toutes les attitudes. Outre cela dans la situation verticale des os articulés, les uns pèsent plus ou moins sur les autres, & les pressent indépendamment de l'impulsion faite par les muscles contractés. De plus on convient que quand on meut ou fait jouer l'articulation de deux os, le centre du mouvement se trouve toujours près de leur portion ou extrémité la plus voisine de cette articulation, & que ce centre est éloigné de leur portion ou extrémité opposée. Par exemple, dans l'articulation de l'Humerus avec l'Omoplate le centre du mouvement est près de la convexité de la tête de l'Humerus & de la concavité de la tête de l'Omoplate; il est en même temps éloigné de la poulie de l'Humerus & de la base de l'Omoplate. C'est sur ce fondement qu'on a regardé les os articulés comme des leviers, & leurs articulations comme des points d'appui.

Ce n'est pas ainsi dans les articulations de l'Épine du Dos; excepté celle de la première Vertèbre avec l'Os occipital, & en partie celle de la même Vertèbre avec la seconde. Les articulations des quatre apophyses, dont il est question, sont disposées de façon que dans plusieurs mouvements du Col, du Dos, & des Lombes, les apophyses d'une Vertèbre ne font que glisser très-légèrement sur les apophyses voisines d'une autre Vertèbre, sans s'entrepousser. Il y a même des mouvements dans lesquels non-seulement ces apophyses ne paroissent pas se toucher, mais elles paroissent encore s'écarter les unes des autres, ou tendre à cet écartement.

On comprend très-aisément ceci, en faisant attention que le centre du mouvement des Vertèbres n'est pas dans leurs apophyses articulaires, ni auprès, mais uniquement dans la symphyse élastique de leurs corps. On le comprendra encore mieux par la structure particulière de cette symphyse. Elle est principalement composée de plusieurs cerceaux cartilagineux, molaisses, minces & larges en manière de bandes;

placés les uns dans les autres, comme autour d'un centre commun, & posés de champ, de sorte que l'un de leur bord s'attache à la face supérieure d'un corps de Vertebres, & l'autre bord s'attache à la face inférieure d'un autre corps. Ces bandes ou cerceaux cartilagineux renferment dans leurs intervalles une matière très-visqueuse, comme une espece de mucilage, & elles sont entourées d'une bande ligamenteuse fort composée, dont les fibres se croisent obliquement, & sont fortement attachées aux bords du corps de chaque Vertebre voisine.

Les bandes cartilagineuses se plient facilement selon leur largeur, dans les différentes inflexions des Vertebres. Ce n'est pas par tout leur contour qu'elles se plient ainsi, ce n'est que par la portion la plus voisine de la cavité de chaque inflexion. Il paroît néanmoins qu'elles peuvent aussi plier également par tout leur contour, sous le poids de la Tête, du Thorax, & des extrémités supérieures, sur-tout quand ces parties sont chargées de quelque fardeau pesant, ou qu'elles soient exposées à quelque résistance considérable. Par-là on pourra encore expliquer comment le corps de l'Homme s'accourcit après avoir été long-temps debout ou en marche, & comment il recouvre sa longueur après avoir été ensuite couché pendant un temps proportionné. La bande ligamenteuse empêche le trop d'écartement, & la rupture des bandes cartilagineuses du côté de la convexité de l'inflexion des Vertebres; elle aide aussi à borner les mouvements de rotation d'une Vertebre sur l'autre.

Quand on examine avec attention, dans un Cadavre, le Col dépouillé de ses muscles, on verra qu'en le courbant en devant, les cartilages du corps des Vertebres deviennent saillants, & paroissent comme autant de bourlets du côté de l'inflexion; ensuite si on redresse le Col, on verra disparaître ces bourlets. Enfin, si on contourne de côté & d'autre, comme sur un pivot, les Vertebres qui sont au-dessous de la seconde, on verra que les portions ligamenteuses qui couvrent les cartilages, forment des rides obliques, & plus ou moins

352 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
croisées, selon qu'on employe plus ou moins d'effort à ces
mouvements réciproques.

On voit, par tout ce que je viens de dire, que quand on
s'incline en devant, alors les Vertebres, en approchant les
unes des autres par la portion antérieure de leurs corps,
font monter les deux apophyses inférieures d'une Vertebre
plus haut que les apophyses supérieures de la Vertebre sui-
vante, & en même temps s'en écarter. Au contraire quand
on renverse l'Épine du Dos, alors les Vertebres s'approchent
par la portion postérieure de leur corps, & font descendre en
même temps les apophyses inférieures d'une Vertebre plus
bas que les apophyses supérieures de l'autre Vertebre. Si l'on
fait des inflexions latérales, les corps des Vertebres s'appro-
cheront ensemble du côté de l'inflexion, & les apophyses
articulaires du même côté se croiseront, en s'avancant les
unes sur les autres, pendant que les apophyses articulaires de
l'autre côté s'éloigneront les unes des autres.

Ainsi il est démontré par le mouvement naturel des Ver-
tebres, que la connexion naturelle de leurs apophyses articu-
laires en général, ni est, ni peut aucunement être en char-
nière; car pour cet effet il faudroit que le point d'appui ou
le centre du mouvement fût aux apophyses articulaires, &
alors pour mettre les Vertebres en mouvement, il faudroit
que d'un côté les corps meurtrissent leurs cartilages, & que
d'un autre côté ces cartilages se séparassent de leurs corps, ce
qui ruineroit entièrement la symphyse des Vertebres.

Outre cette preuve tirée du mouvement naturel des Ver-
tebres, j'en trouve encore une autre qui me paroît aussi pouvoir
passer pour démonstration. Elle est fondée sur la seule con-
formation des apophyses articulaires, car pour peu qu'on
l'examine avec soin, on est convaincu, ce me semble, qu'elle
ne peut admettre ni assemblage en charnière, ni mouvement
en charnière, même imparfaitement. On sçait que le mou-
vement en charnière est celui qui ne se fait qu'en deux sens
opposés, comme autour d'un axe, & que dans le Corps hu-
main, les ligaments tiennent lieu de cheville. Par rapport

à l'assemblage, il est indifférent que chacune des deux piéces assemblées ait reciproquement des avances & des enfoncements, ou que l'une des deux ait seulement des avances & l'autre seulement des cavités; il suffit que leur conformation puisse permettre un assemblage convenable au mouvement en charnière, & permettre ce mouvement, sans déranger l'assemblage. Cela ne se trouve pas dans les apophyses articulaires des Vertebres. Elles sont, ou trop inclinées comme dans les Vertebres du Col, ou trop plates, comme dans celles du Dos, ou trop courbes, comme dans celles des Lombes. J'en excepte toujours les deux premières du Col; & à l'égard de la dernière du Dos, de même des premières des Lombes, dont les apophyses articulaires ont paru à quelques-uns avoir une conformation assés propre à charnière, j'en rendrai compte dans la suite.

Pour revenir aux directions de ces apophyses & à la différence de ces directions. Voici ce que j'ai crû avoir observé là-dessus dans les Vertebres du Col. Elles y sont très obliques, non-seulement par rapport au corps de chaque Vertebre, mais aussi par rapport à la rangée entière de toutes ces Vertebres. Il m'a paru que si la direction de toute la rangée vertebrale du Col étoit semblable à la direction de tout le Corps de l'Homme considéré comme étant étendu, cette obliquité particulière des apophyses, seroit un obstacle à quelques-uns des mouvements ordinaires du Col, & qu'elle en rendroit d'autres assés difficiles. Car alors on ne pourroit fléchir le Col sur le devant, sans trop écarter les apophyses articulaires d'une Vertebre des apophyses articulaires d'une autre, & sans forcer, ou peut-être rompre les ligaments qui les tiennent ensemble. On ne pourroit alors faire les inflexions latérales du Col, sans causer par-là le même inconvénient aux apophyses articulaires d'un côté, pendant que celles du côté opposé compriment trop, ou froissent les unes & les autres. Enfin dans une telle attitude ou direction droite de la rangée vertebrale du Corps, on ne pourroit pas faire les mouvements ordinaires en pivot; car alors les apophyses articulaires

de tout un côté du Col s'opposeroient les unes aux autres; & par-là empêcheroient le Col de se contourner vers l'autre côté. C'est ce que l'on peut expérimenter sur soi-même, en tenant le Col tout droit, roide & rengorgé, car on sentira que dans cette attitude contrainte, on ne peut pas tant tourner le Col, ni par conséquent la Tête comme dans l'attitude ordinaire.

Après avoir fait plusieurs recherches pour trouver le dénouement de cette difficulté, je crois l'avoir rencontré dans la seule direction de toute la rangée vertebrale du Col. Cette direction est naturellement très-oblique dans l'Homme vivant. Car quand on se tient droit, debout ou assis, on trouvera l'extrémité supérieure de cette rangée vertebrale beaucoup plus avancée sur le devant de la Poitrine, que l'on ne se l'imagineroit par l'inspection d'un Squelette suspendu ou redressé sur un piédestal. Mais pour m'assurer exactement du degré de cette obliquité dans l'Homme vivant, où on ne peut voir ni toucher la première ou la seconde Vertebre, j'ai cherché parmi les parties voisines exposées à la vûe & au toucher, ce qui pourroit en donner la marque certaine, & je l'ai trouvé dans les deux apophyses mastoïdes de la Tête, qui se font assés sentir, même dans les Sujets les plus gras. En examinant ces apophyses dans un Crâne, si on tire une ligne droite du bord antérieur de l'une jusqu'au bord antérieur de l'autre; on verra que la partie moyenne de l'un & de l'autre Condyle occipital se trouve dans la même ligne, & par conséquent que les cavités supérieures de la première Vertebre, qui sont articulées avec ces Condyles, se trouvent aussi dans cette même ligne. Ainsi en se tenant droit, debout ou assis, on n'a qu'à appliquer derrière le bas de l'oreille, où on sent le bord antérieur de l'apophyse mastoïde, le bout d'un fil dont l'autre bout soit chargé d'un plomb, ou y poser verticalement un petit bâton droit, & par-là on peut juger sûrement de l'obliquité naturelle de la rangée vertebrale du Col.

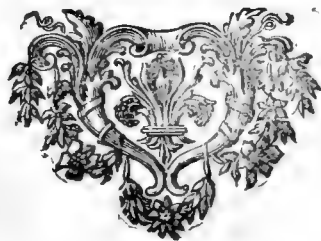
En examinant l'attitude particulière de chaque Vertebre selon cette obliquité générale de toute leur rangée, il m'a

paru, que dans plusieurs Vertebres les facettes de leurs apophyses articulaires sont situées presque horizontalement ou transversalement par rapport à la longueur du Corps de l'Homme, se tenant droit, debout ou assis, & que ces facettes sont placées les unes sur les autres dans des plans différents presque paralleles, à peu près comme les marches d'un escalier. Il m'a paru que cette attitude directe des apophyses obliques procurée par l'attitude oblique de la rangée vertebrale, facilite les mouvements de rotation du Col, en ce qu'elles ne font que glisser plus ou moins transversalement les unes sur les autres, sans s'entre-heurter. Il m'a encore paru que par cette attitude les apophyses articulaires se pourroient soutenir les unes les autres dans certains cas, comme quand on porte des fardeaux sur la Tête, & qu'elles pourroient ainsi en décharger un peu les corps des Vertebres.

J'ai observé que dans quelques Sujets la rangée des trois premières Vertebres est comme redressée, & par-là donne au Col osseux une certaine courbure, qui est assés connuë, mais qui n'a pas été assés déterminée par rapport aux Vertebres qui la forment particulièrement. La seconde & la troisième Vertebre du Col ainsi redressées, leurs apophyses articulaires se rapprochent plus de la verticale, & peuvent par-là, ce me semble, faciliter les inflexions latérales du Col, quand on panche la Tête vers l'une ou l'autre épaule. Il semble même que plus on tient la Tête droite ou tant soit peu levée en arriere, sans néanmoins rengorger le Col, plus ces inflexions sont aisées. Il ne s'agit point du tout ici de l'articulation de la première Vertebre avec l'Os occipital. A l'égard des deux dernières Vertebres du Col, la direction de leurs apophyses articulaires dégénèrent, pour ainsi dire, peu à peu en celle des apophyses articulaires des Vertebres dorsales. Vésale a très-clairement fait cette dernière remarque.

On a déjà observé que le peu de volume du corps des Vertebres du Col, joint à l'épaisseur & à la souplesse de leurs cartilages, donnent en général au Col la grande mobilité qu'il a au dessus des autres portions de toute la colonne vertebrale.

La conformation particulière de ces corps, en ce qu'ils sont échancrés en haut & saillants en bas, a été regardée comme une espece d'emboîtement propre à empêcher la luxation de ces Vertebres. Une telle idée satisferoit toujours ceux qui se bornent à l'inspection du Squélete, dont les Vertebres sont dépouillées de leur symphyse. Mais un seul coup d'œil jetté sur l'état naturel, dans lequel les corps de ces Vertebres sont éloignés les uns des autres par leur symphyse cartilagineuse, en fait voir évidemment la fausseté, parce qu'on n'y trouve pas un emboîtement osseux. Il me paroît plutôt que ces échancrures & ces saillies augmentent l'étendue de la connexion & de l'adhérence des cartilages avec les corps, & que sans cette augmentation de surface ils auroient été trop sujets à rupture ou à séparation par des efforts & des mouvements extraordinaires.



M A N I E R E
DE FAIRE LE SUBLIME CORROSIF
EN SIMPLIFIANT L'OPERATION.

Par M. BOULDU C.

LA préparation du Vif-argent, qu'on appelle souvent tout court, & comme par excellence, du *Sublimé*, & quelquefois par distinction, du *Sublimé corrosif*, par rapport aux effets rongeurs qu'il produit sur le corps, est devenue une drogue nécessaire dans la matière Médicinale, autant par rapport à elle-même, quand on l'employe seule ou dans quelques mélanges pour l'usage extérieur, que par rapport à quelques remèdes que l'on en prépare ensuite, comme sont le Mercure doux, la Panacée mercurielle & autres, dont on se sert tous les jours intérieurement : & les Mémoires de l'Académie ont déjà proposé plus de manières différentes de la faire, qu'aucun Livre de Chymie Latin ou François qui me soit connu.

6 Septembre
1730.

Cependant on a lieu de s'étonner, que parmi le grand nombre des Artistes, qui sont dans cette Ville & dans le reste du Royaume, il y en ait très-peu, & peut-être pas cinq ou six, qui veuillent se livrer à préparer cette drogue eux-mêmes ; les uns la prennent des Droguistes, les autres des colporteurs, & ces deux-ci s'en rapportent à la bonne foi des étrangers, dont ils la tirent. De quelque part pourtant qu'elle vienne, on fait, à mon avis, également mal de s'y fier, puisqu'il n'est que trop certain, qu'il se trouve des mains avides d'un gain criminel, qui la falsifient par le mélange de l'Arsenic, dont malheureusement nous n'avons point encore d'épreuve, qui pût d'avance nous faire distinguer sa présence ; on n'en devient certain que par les funestes effets, & c'est trop tard.

Pour éviter la tromperie, & des événements fâcheux, il

Y y üj

seroit à souhaiter, que tous ceux, que leur profession engage à débiter des remèdes au Public, n'en donnassent aucun de ceux qu'on tire du Sublimé ou par le Sublimé, à moins de les avoir faits de leurs propres mains. La sûreté des malades est inséparable de la bonté des remèdes bien conduits.

Malgré la certitude de cette conséquence, la répugnance pour l'opération, dont il s'agit, est grande & presque invincible chés la plupart des Artistes, & peut rouler sur différentes raisons : les uns aiment mieux acheter bon marché ce qui leur coûteroit davantage à faire chés eux ; d'autres craignent les vapeurs des Eaux fortes, qu'on respire avant & pendant l'opération ; & d'autres ont été révoltés par les inconvénients & les incommodités auxquelles la méthode la plus reçûe est encore sujette dans la sublimation. Cette méthode est, comme tout le monde le sçait, de mêler du Mercure, dissous par l'Eau forte & réduit en cristaux ou évaporé à siccité, avec du Vitriol calciné & du Sel commun décrépité ; de pousser ensuite ce mélange dans un Matras par un feu convenable.

Ayant fait cette opération tous les ans depuis ma jeunesse ; j'y ai aussi trouvé quelquefois à redire : l'Eau-forte, en dissolvant d'abord le Mercure, & en s'exhalant encore après du col du Matras, quand il est sur le feu, jette des vapeurs désagréables & nuisibles, qui se répandent par-tout, quelque grand que soit le Laboratoire ; elles ont chassé plus d'une fois les auditeurs de l'Amphithéâtre du Jardin du Roy ; outre cela, il arrive souvent, que nos Matras de verre crèvent ou au commencement ou vers la fin de l'opération, sur-tout, quand on veut faire plusieurs livres de Sublimé à la fois ; & par cet accident non seulement il se perd de la matière, mais aussi l'Artiste court risque d'être maltraité par les vapeurs qu'elle exhale ; & enfin les trois Sels, qu'on employe, faisant un gros volume, ne permettent guères au feu de les bien pénétrer ; ainsi il est rare, que la masse, qui reste au fond, comme un *caput mortuum*, soit entièrement épuisée de Mercure, & c'est apparemment ce qui a fait, qu'on a pris la coutume de la jeter comme inutile.

Ces inconvénients m'ont souvent fait souhaiter de trouver une méthode plus commode & plus succinète pour ce travail, & y étant parvenu, je l'ai pratiquée depuis quelques années en mon particulier & en Public : quand on voudra la comparer avec celle, qui est la plus en usage, on s'apercevra aisément de la différence, qu'il y a de l'une à l'autre & pour les vaisseaux & pour l'Artiste. Enfin, croyant de mon côté l'avoir assez examinée, je ne hésite plus de la communiquer avec quelques circonstances, que l'on y peut remarquer, afin que ceux, qui voudront l'imiter, partagent avec moi la facilité & les avantages que j'y ai trouvés, & abandonnent dans la suite la répugnance de faire le Sublimé eux-mêmes, en considération des raisons alléguées au commencement.

Je verse sur autant de livres de *Vif-argent*, que je veux employer à la fois, pareil nombre de livres de bonne & forte *Huile de Vitriol*, dont je retire par la Cornüe le phlegme & la portion d'acide, qui ne peut pas rester uni avec le Mercure : l'Huile de Vitriol à l'aide du feu dissout le Mercure, & tous les deux font à la fin une *masse très-blanche*, que je pousse jusqu'au sec : je mêle promptement cette masse retirée de la Cornüe avec parties égales de *Sel commun*, le plus blanc que je puisse avoir, non pas décrépit, mais simplement séché dans quelque endroit chaud, & je pousse ensuite ce mélange au feu, à la manière ordinaire, dans un Matras bien enterré dans le sable. Dans le commencement il monte un peu d'humidité en gouttes d'eau dans le col du Matras, après quoi le bouchon de papier prend une barbe de filets ou cristaux blancs ; alors j'augmente le feu, & j'ôte autour de la voûte du Matras le sable peu-à-peu & à mesure que je vois que le Sublimé s'y attache & s'augmente : quand je m'aperçois qu'il ne se sublime plus rien, j'ôte tout le sable d'alentour, & retire le vaisseau encore brûlant, afin qu'il crêvât par la fraîcheur de l'air ; & dans un temps chaud je facilite ces crêvasses par un linge mouillé, dont je l'enveloppe, pour n'avoir pas besoin de le casser à force de coups, qui feroient retomber du Sublimé sur la matière qui reste au fond.

Dès cette première opération j'ai un Sublimé bien blanc & crySTALLIN par-tout, qui aux parois du vaisseau est épais & compact, & au dedans parsemé de crySTaux formés en lames ou aiguilles applaties; & la masse du fond est une poudre friable, qu'on détache facilement du verre: Si le Sel, que j'ai employé, a été net, cette poudre est grisâtre, & s'il a été un peu sale, elle tire sur le roux.

Dans ce procédé il n'y a point d'*Eau-forte*, & le Sublimé ne se fait pas moins bien; de plus, on évite le *Fer*, qui dans le Vitriol calciné, quand on l'employe, fait la moitié de son poids, & embarasse les matières, qui doivent agir les unes sur les autres, de sorte que l'opération ne se peut faire que lentement; au lieu que les deux matières, dont je me sers, se touchent immédiatement, & qu'étant plus aisément pénétrées par le feu, elles agissent sans obstacle & avec plus de facilité les unes sur les autres; aussi l'opération est-elle achevée en une fois moins de temps, que suivant le procédé ordinaire.

L'*Huile de Vitriol*, qu'il faut employer, n'est pas toujours également forte: si elle est bonne, elle dissout son poids de Mercure; ainsi, si elle est foible, on en mettra davantage, ou, ce qui vaut mieux, on la déphlegmera auparavant.

Quelque forte ou déphlegmée que soit cette Huile, elle est sans odeur; aussi la liqueur, qu'on retire dans le temps qu'elle dissout le Mercure, a-t-elle toujours passé pour un phlegme ou un esprit foible: & en effet elle est très-foible au goût, légèrement aigrelette & âpre, mais en récompense elle est d'une odeur de Soufre allumé si vive, que je n'en ai pas senti de pareille; c'est un *Esprit de Vitriol des plus volatils*: & quoiqu'il paroisse presque impossible, que les Auteurs, qui ont proposé la dissolution du Mercure par cette distillation, pour en faire du Turbith minéral, n'ayent apperçu cette odeur, il n'y en a pourtant pas un, que je sçache, qui en fasse mention, quoiqu'à mon avis, cette production soit la plus forte preuve, que le Mercure est chargé de matière inflammable, qui est en état de changer l'acide vitriolique, fixe
&

& sans odeur, en un esprit des plus vifs & volatils.

Si on ne veut pas employer cette liqueur dans des Remedes, où les Auteurs demandent ces sortes d'esprits, par la crainte qu'elle ne soit chargée de Mercure, on peut la garder pour pareille opération. Il est vrai qu'au bout de quelque temps elle perd entièrement sa volatilité & vivacité, & rentre dans un état de fixité; mais dans quelque état qu'on la prenne, elle peut encore dissoudre, à l'aide du feu, la moitié de son poids de Mercure.

Pour ce qui est de la *masse blanche*, qu'on retire de la Cornüe, il est bon de l'employer d'abord, ou du moins de la conserver bien sèche par rapport à l'acide vitriolique, qui s'y trouve des plus concentré, car pour peu qu'elle reste à l'air, cet acide en attire l'humidité, la masse devient molle, & même avec le temps, toute fluide, ce qui rend son mélange avec le Sel commun difficile à manier, outre qu'elle en fait promptement élever des vapeurs incommodes d'Esprit de Sel, qui peut-être entraînent déjà avec elles des parcelles de Mercure.

Pour peu qu'on fasse réflexion sur ce qui a formé cette *masse blanche*, on s'étonnera du sentiment erronné de *Van Helmont*, qui soutient dans plusieurs endroits de ses ouvrages, qu'une livre de Mercure peut changer un grand nombre de livres d'Esprit ou d'Huile de Vitriol (plusieurs milliers, dit-il) en vrai *Alun*, & bien aisément, *solo contactu*, il faut seulement que le Mercure les touche pour en faire de l'*Alun*. Mais outre que le Mercure resteroit à jamais dans l'Huile de Vitriol sans un effet réciproque, si la chaleur du feu n'aideroit cet acide à le pénétrer, & à réduire les deux en une consistance saline; nous avons des moyens aisés de dissoudre de nouveau leur union, & d'en revivifier le Mercure, soit par le Sel de Tartre, par la limaille de Fer, ou par le régule d'Antimoine, &c. & l'opération, que je propose, est encore une preuve convaincante de leur combinaison: On voit là, que l'acide vitriolique, qui étoit concentré dans la masse blanche, abandonnant le Mercure, saisit l'alkali du Sel commun, &

en dégage l'Esprit, lequel trouvant le Mercure abandonné; bien divisé, & comme préparé exprès pour lui, le saisit à son tour; les deux premiers s'arrêtent au fond, & les deux autres s'élèvent, bien unis, en Sublimé corrosif, qu'on ne fera jamais avec de l'Alun & du Sel, & il y a de l'apparence que la seule blancheur de nôtre Vitriol mercuriel a ébloüi le Philosophe au point, qu'il l'a pris pour de l'Alun.

A l'égard du *Sel commun*, qui est indispensablement nécessaire pour nôtre opération, je ne le fais point décrépiter, mais seulement bien sécher. La décrépitation lui fait perdre de son acide, & met par-là une portion de sa terre alcaline à nud, qui absorbe alors de l'acide vitriolique, uni au Mercure, dont une portion devient ainsi libre & se revivifie.

Si le Sel commun n'est pas bien sec, on peut mettre une once à deux de plus pour chaque livre, qu'on en emploie.

Enfin le *Résidu*, qu'on trouve après la sublimation comme une poudre friable au fond, contient un Sel, qui ne mérite pas d'être jetté : on peut dissoudre cette poudre, & filtrer l'eau; il reste peu de terre en arrière; & la dissolution exposée à se crySTALLISER fournit un aussi bon Sel & en aussi beaux crySTaux, que si on l'avoit fait immédiatement & exprès par l'Huile de Vitriol & le Sel commun.

Il est pourtant de la prudence de l'Artiste de bien pourvoir à la pureté de ce Résidu; c'est, *qu'il soit bien épuisé de Mercure*. Pour s'en assurer, on peut voir, si l'Huile de Tartre par défaillance précipite quelque chose de jaune de sa dissolution, ou si une lame de cuivre, trempée dedans, en blanchit, ou, pour accourir, si un peu de ce Résidu sec, frotté sur un morceau de cuivre poli & mouillé, lui imprime de la blancheur? En ce cas on ne sçauoit mieux faire que de calciner le tout un peu vivement sous une cheminée, ou plutôt dans une place ouverte pour en dissiper ce qui y peut rester de Mercure; après quoi on n'a rien à craindre pour le Sel, qu'on en retire.



EXAMEN DES LIGNES DU QUATRIEME ORDRE.

SECONDE PARTIE DE LA SECTION I.

*Dans laquelle on traite en général des Lignes du 4^{me} ordre
qui ont des points doubles.*

Par M. L'Abbé DE BRAGELONGNE.

ON a vû dans la première Partie de cette Section, que les Lignes Algébriques sont susceptibles de différentes especes de points simples & de différentes especes de points multiples, selon qu'elles sont d'un ordre plus ou moins élevé; J'ai tâché d'y développer une Méthode générale, pour discerner si un point donné sur une Ligne algébrique quelconque est simple ou multiple, & de quelle espece de multiplicité il est. Il s'agit maintenant de faire l'application de cette Méthode aux Lignes du 4^{me} ordre, dont les unes peuvent avoir des points doubles de toutes les especes, comme on l'a démontré dans les art. 37 & 56, les autres un point triple formé par l'intersection commune de trois branches de la même Courbe, ou par le rebroussement de deux branches par lequel il en passe une troisième, ou enfin par l'adhésion d'une Ovale infiniment petite sur une des branches de la Courbe, cas singulier dont j'ai fait voir la possibilité dans les art. 59 & 60 du Mémoire précédent. Nous ne parlerons dans celui-ci que des points doubles, & nous renverrons à une troisième Partie tout ce qui concerne les points triples des Lignes du 4^{me} ordre, le champ étant trop vaste pour pouvoir être parcouru avec quelque exactitude dans un seul Mémoire.

Il faut se souvenir qu'on a donné dans l'art. 31 du premier Mémoire une Equation générale pour toutes les Lignes du 4^{me} ordre, soit qu'elles s'étendent à l'infini, soit qu'elles

rentrent en elles-mêmes ; celles que l'on va donner ici , la première pour les Lignes du 4^{me} ordre, qui ont un point double à l'origine de leur axe, la seconde pour celles qui ont deux points doubles sur leur axe, & la troisième pour celles qui ont trois points doubles, conviennent aussi aux Lignes de cet ordre, qui s'étendent à l'infini, & à celles qui rentrent en elles-mêmes, & l'on en fait l'application aux unes & aux autres par des exemples choisis parmi le grand nombre de Lignes dont le 4^{me} ordre est composé.

Enfin les Lignes du 4^{me} ordre étant susceptibles des trois especes de points doubles d'intersection, comme on l'a démontré dans l'art. 37, après avoir donné des regles pour reconnoître le point d'intersection d'avec le point de rebroussement & le point conjugué, il a fallu en donner, pour reconnoître parmi les points d'intersection des Lignes du 4^{me} ordre, ceux qui étoient de la 1^{re}, 2^{de} ou 3^{me} espece ; c'est ce qu'on a exécuté à la fin de cette seconde Partie, que l'on termine enfin par démontrer qu'une Courbe du 4^{me} ordre ne sauroit jamais avoir plus de trois points doubles.

J'aurois pû commencer mon Mémoire par cette dernière Proposition, & donner en même temps plusieurs nouveaux Théoremes sur les Lignes algébriques des ordres supérieurs au quatrième : Théoremes qui font voir une analogie parfaite entre les Lignes algébriques & les points multiples dont elles sont susceptibles ; par exemple, on auroit pû démontrer ici, 1.^o Qu'une Ligne du 6^{me} ordre ne sauroit jamais avoir plus de trois points triples ; Qu'une Ligne du 8^{me} ordre ne sauroit avoir plus de trois points quatriples ; Qu'une Ligne du 10^{me} ordre ne sauroit avoir plus de trois points quintuples ; Enfin qu'une Ligne d'un ordre pair, exprimé par n , ne sauroit avoir plus de trois points multiples, dont la multiplicité soit exprimée par $\frac{n}{2}$.

2.^o On auroit pû démontrer ici, à l'égard des Lignes d'un ordre impair, que celles du 3^{me} ordre, qui ont un point double, ne sauroient avoir d'autres points multiples. Que

celles du 5^{me} ordre, qui ont un point triple, ne peuvent avoir plus de trois points doubles. Que celles du 7^{me} ordre, qui ont un point quadruple, ne peuvent avoir plus de trois points triples. Que celles du 9^{me} ordre, qui ont un point quintuple, ne sçauroient avoir plus de trois points quadruples, & ainsi des autres Lignes d'un ordre impair à l'infini. Mais la démonstration de ces Théoremes m'auroit trop écarté de mon sujet, je me réserve de la donner dans quelque Écrit détaché : continuons donc l'examen des Lignes du 4^{me} ordre, sans pousser plus loin la Théorie générale des Lignes algébriques d'un ordre supérieur. C'est ce que l'on trouvera dans ce second Mémoire, dont les articles doivent suivre le même ordre que ceux du Mémoire précédent, puisqu'il n'en est que la suite.

PROPOSITION III.

THEOREME.

LXI. Toutes les Lignes du 4^{me} ordre, telles que MGDG mZEV*, ou MGmZEV*, ou MDmZEV*, dont la nature est exprimée par l'équation générale marquée ici par (10), dans laquelle l'indéterminée (z) exprime les abscisses GQ, & les indéterminées (u), les ordonnées QM, ont un point double à l'origine G de leur axe. * Fig. 41.
* Fig. 42.
* Fig. 43.

$$(10) \dots \Delta u^4 + Qz + A \times u^3 + Bzz + Cz + D \times uu + Ez^3 + Fzz + Gz \times u + Kz^4 + Lz^3 + Mzz = 0.$$

DÉMONSTRATION.

Lorsque le point Q tombe en G, alors z étant = 0, l'égalité marquée par (L) dans l'art. 49, est telle qu'on la voit ici.

$$(L) \dots \Delta u^4 + Au^3 + Du^2 = 0.$$

Cette égalité ayant deux racines égales & de même signe, qui sont $u=0$ & $u=0$, il est visible qu'il y a au point G deux ordonnées égales & de mêmes signes. Mais quand l'ordonnée QM(u) est = 0, l'égalité marquée par (A) dans l'art. 49, qui donne les valeurs des abscisses GQ(z), lorsque

Zz iij

les ordonnées $QM(u)$ sont $= 0$, est telle qu'on la voit ici.

$$(A) \dots Kz^4 + Lz^3 + Mz^2 = 0.$$

Cette seconde égalité ayant encore deux racines égales & de mêmes signes, sçavoir $z = 0$ & $z = 0$, il est visible qu'il y a au point G , non seulement deux ordonnées égales & de mêmes signes, comme on vient de le voir, mais encore deux abscisses égales & de mêmes signes, qui sont $z = 0$ & $z = 0$; donc* il doit y avoir en G un point double de la courbe $MGDmZEV$, ou $MGmZEV$, ou $MDmZEV$, dont la nature est exprimée par l'équation marquée par (10).

* Art. 51.

Mais les coefficients $\Delta, Q, A, B, C, D, E, F, G, K, L, M$, de l'équation (10) étant des coefficients indéterminés, quoique constants, qui portent avec eux leurs signes $+$ & $-$, il est évident que l'équation marquée par (10) exprime la nature de plusieurs lignes du 4^{me} ordre; & comme les différentes valeurs de ces coefficients ne changent rien à la présente démonstration, il est visible que cette démonstration convient à toutes les Courbes, dont la nature peut être exprimée par l'équation (10), & par conséquent que toutes ces courbes ont un point double à l'origine G de leur axe. *Ce qu'il falloit démontrer.*

C O R O L L A I R E.

LXII. Donc toutes les lignes du 4^{me} ordre, dont la nature est exprimée par l'équation marquée ici par (20) ont un point double à l'origine G de leur axe.

$$(20) \dots \Delta u^4 + Qz + A \times u^3 + Bz^2 + Cz + D \times u^2, \\ + Ez^3 + \frac{E\sqrt{M}}{\sqrt{K}}zz + \frac{G\sqrt{K}}{\sqrt{M}}zz + Gz \times u + Kz^4, \\ + 2\sqrt{MK}z^3 + Mz^2 = 0.$$

Car l'abscisse (z) étant $= 0$, on aura toujours l'égalité $\Delta u^4 + Au^3 + Du^2 = 0$, & l'indéterminée (u) étant $= 0$, on aura toujours l'égalité $Kz^4 + 2z^3\sqrt{KM} + Mz^2 = 0$; d'où il suit qu'au point G , ou $z = 0$, on aura, comme dans

l'article précédent, deux valeurs de l'indéterminée (u) réelles, & l'une & l'autre $= 0$, & deux valeurs de l'indéterminée (z) réelles, & l'une & l'autre $= 0$; ainsi le point G sera, comme dans l'article précédent, un point double auquel l'axe GQ & l'ordonnée principale GL seront sécantes. Donc, &c.

PROPOSITION IV.

PROBLEME.

LXIII. Toutes choses demeurant les mêmes comme dans la Proposition précédente, déterminer si le point double G de la courbe $MGDmZEV$ dont la nature est exprimée par l'équation (10), déterminer si ce point double G est fait par l'interfection de deux branches de la courbe*, ou s'il est un point de rebroussement*, ou * Fig. 41.
 enfin s'il est un point double invisible sur le plan, c'est-à-dire, une * Fig. 42.
 ovale infiniment petite conjuguée*. * Fig. 43.

SOLUTION.

On cherchera d'abord quel est le rapport du (du) au (dz) dans tous les points doubles de la courbe $MGDmZEV$, en différenciant deux fois* son équation marquée par (10) * Art. 46, (dans l'exposé de la Proposition précédente); cette double différenciation donnera l'équation irrationnelle que l'on voit ici marquée par Σ .

$$\Sigma \dots \left\{ \begin{array}{l} +6\Delta u^2 \\ +3Qzu \\ +3Au \\ +8z^2 \\ +Cz \\ +D \end{array} \right\} du^2 + \left\{ \begin{array}{l} +3Qu^2 \\ +4Bzu \\ +2Cu \\ +3Ez^2 \\ +2Fz \\ +G \end{array} \right\} dz du + \left\{ \begin{array}{l} +Bu^2 \\ +3Euz \\ +Fu \\ +6Kz^2 \\ +3Lz \\ +M \end{array} \right\} dz^2 = 0.$$

On rendra cette équation différentielle propre au point double G , en y substituant, au lieu des indéterminées (z) & (u), leurs valeurs en ce point double G , qui sont * $z = 0$ & * Art. 61,
 $u = 0$, ainsi l'équation Σ deviendra $Ddu^2 + Gdz du +$
 $+ Mdz^2 = 0$, d'où l'on tirera par le calcul ordinaire $\frac{du}{dz}$
 $= -\frac{G}{2D} \pm \frac{1}{2D} \sqrt{GG - 4DM}.$

Cela posé, je dis que ces deux valeurs $\frac{du}{dz} = -\frac{G}{2D}$

$$+ \frac{1}{2D} \sqrt{GG - 4DM}, \text{ \& } -\frac{du}{dz} = \frac{G}{2D} + \frac{1}{2D}$$

$\sqrt{GG - 4DM}$, feront connoître si le point double G

* Fig. 41.

* Fig. 42.

* Fig. 43.

$MGDGmZEV^*$, ou s'il est un point de rebroussement

de la courbe $MGmZEV^*$, ou bien s'il est un point double

invisible de la courbe $MDmZEV^*$. Car si l'on prend sur

l'axe GQ le point Π , tel que $G\Pi = 2D$, & sur l'ordonnée

principale GL le point Λ , tel que $G\Lambda = G$: si sur cette

même ordonnée principale GL , de part & d'autre du point Λ ,

on prend les parties $\Lambda\theta$ & $\Lambda\Phi$ égales l'une & l'autre à

$\sqrt{GG - 4DM}$: si l'on joint les points Π & θ , Π & Φ ,

par les droites $\Pi\theta$, $\Pi\Phi$; & enfin si par le point double G ,

on tire les droites GT , Gt , parallèles à $\Pi\theta$, $\Pi\Phi$, il est

évident, par la doctrine des tangentes, que ces droites GT ,

Gt , seront les tangentes de la courbe au point double G .

Or il est visible qu'il peut arriver trois différents cas: car

1.° si les deux valeurs $-\frac{G}{2D} + \frac{1}{2D} \sqrt{GG - 4DM}$

& $\frac{G}{2D} + \frac{1}{2D} \sqrt{GG - 4DM}$, sont des grandeurs réelles

& inégales, ou bien réelles & égales, mais de différents signes;

il est clair que les deux tangentes GT , Gt , seront réelles &

distinctes l'une de l'autre. 2.° Si les deux valeurs $-\frac{G}{2D}$

$+ \frac{1}{2D} \sqrt{GG - 4DM}$ & $\frac{G}{2D} + \frac{1}{2D} \sqrt{GG - 4DM}$,

sont réelles, égales & de mêmes signes, les deux droites $G\theta$,

$G\Phi$, se confondront, & par conséquent les deux tangentes

GT , Gt , tomberont l'une sur l'autre, & ne seront plus qu'une

même tangente. 3.° Si les deux valeurs $-\frac{G}{2D} + \frac{1}{2D}$

$\sqrt{GG - 4DM}$ & $\frac{G}{2D} + \frac{1}{2D} \sqrt{GG - 4DM}$ sont

imaginaires, les deux droites $G\theta$, $G\Phi$, seront imaginaires,

&

& par conséquent les deux tangentes GT , Gt . Mais dans le premier cas, y ayant deux tangentes * qui se coupent au point G , il doit y avoir deux branches de la courbe qui passent en G ; donc le point double G sera un point d'inter-

* Art. 52.

section, lorsque les deux valeurs $-\frac{G}{2D} \pm \frac{1}{2D} \sqrt{GG - 4DM}$

& $\frac{G}{2D} \pm \frac{1}{2D} \sqrt{GG - 4DM}$ sont des grandeurs réelles

& inégales, ou des grandeurs réelles & égales, mais de différents signes; Dans le second cas, les deux tangentes se confondant en une, le point double G sera un point de rebroussement *, ou une osculation, ou bien une Lemniscate

* Art. id.
Voyez ce qui est
dit en suite sur les
Osculations &
les Lemniscates
infinim. petites.

infiniment petite conjuguée; Enfin dans le troisième cas, les deux tangentes GT , Gt , étant imaginaires, le point double G , quoique réel, & faisant partie de la courbe, n'aura point de tangente, & sera par conséquent un point double

* Art. 52.

invisible sur le plan *, c'est-à-dire, une ovale infiniment petite

Art. 59.

conjuguée. Donc par le moyen de l'équation $\frac{du}{d\zeta} = -\frac{G}{2D}$

$\pm \frac{1}{2D} \sqrt{GG - 4DM}$, on déterminera la nature du point double G , dont on connoît l'existence & la position par la proposition précédente. *Ce qu'il falloit trouver.*

COROLLAIRE.

LXIV. Donc 1.^o lorsque dans l'équation (10) * les coefficients D & M sont affectés de signes contraires, le point double G est un point d'intersection de deux branches finies ou infinies de la courbe $MGDGMZEV$; car il est visible

* Art. 61.

que l'expression $\pm \sqrt{GG - 4DM}$ marque alors des grandeurs réelles & de différents signes. 2.^o Lorsque dans la

même équation marquée par (10) * les coefficients D & M sont affectés du même signe, si $GG > 4DM$, le point double G est encore un point d'intersection: mais si $GG = 4DM$, ce point double G est un point de rebroussement,

* Art. id.

ou une osculation, ou bien une Lemniscate infiniment petite conjuguée : & si $GG < 4DM$, le point double G est un point conjugué, c'est-à-dire, un point double invisible sur le plan ;

car dans le premier cas les expressions $\pm \sqrt{GG - 4DM}$ marquent des grandeurs réelles & de différents signes : dans le second cas, ces expressions sont égales à zéro, & par conséquent l'on a $\frac{du}{dz} = -\frac{G}{2D} \pm 0$: dans le troisième cas, les expressions $\pm \sqrt{GG - 4DM}$ sont l'une & l'autre imaginaires.

E X E M P L E I.

* Fig. 41. LXV. Soit un triangle* quelconque $G\Pi\Lambda$, dont les trois côtés $G\Pi$ (b), $G\Lambda$ (c) & $\Pi\Lambda$ (a), sont donnés ; si l'on prolonge indéfiniment de part & d'autre du point G les deux côtés $G\Pi$, $G\Lambda$, de ce triangle, & que l'on prenne la droite $G\Pi$ pour l'axe, & la droite $G\Lambda$ pour l'ordonnée principale d'une courbe $MGDGmZEV$, dans laquelle le rapport des ordonnées $QM(u)$ aux abscisses $GQ(z)$ soit exprimé par l'équation $b^4u^2 + 2cb^3zu - \frac{1}{4}a^2z^4 - \frac{1}{3}afbz^3 - \frac{1}{3}agbz^3 - \frac{1}{2}gfb^2zz + c^2b^2z^2 = 0$, dans laquelle on suppose $f > 2g$; il est visible, par la troisième Proposition* ; que cette courbe a un point double à l'origine G de son axe GQ & de son ordonnée principale GL ; car quand $GQ(z)$

$= 0$, on a $\overline{QM}^2(u) = 0$: de plus $QM(u)$ étant $= 0$, il vient $\frac{1}{4}a^2z^4 + \frac{1}{3}afbz^3 + \frac{1}{3}agbz^3 + \frac{1}{2}gfb^2z^2 - c^2b^2z^2 = 0$, d'où l'on tire $zz = 0$, & $\frac{1}{4}a^2zz + \frac{1}{3}afbz + \frac{1}{3}agbz + \frac{1}{2}gfbz - c^2bz = 0$: or les deux premières égalités font connoître* que les droites GQ , GL , sont l'une & l'autre sécantes de la courbe $MGDGmZEV$ en un point double G .

* Art. 61.

* Art. 62. Mais, par la quatrième Proposition* & le Corollaire qui la suit, il est clair que ce point double G est un point d'intersection de deux branches de la courbe $MGDGmZEV$, qui se coupent en G : car en comparant les coefficients de l'équation générale marquée par (10) dans l'art. 61, avec ceux de

l'équation particulière $b^4 u^2 + 2cb^3 zu - \frac{1}{4}a^2 z^4 - \frac{1}{3}afb z^3 - \frac{1}{3}agb z^3 - \frac{1}{2}gfb^2 z z + c^2 b^2 z^2 = 0$, on a $\Delta = 0$, $Q = 0$, $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = b^4$, $E = 0$, $F = 0$, $G = 2cb^3$, $K = -\frac{1}{4}a^2$, $L = -\frac{1}{3}ab \times f + g$, $M = \frac{2ccb - gfb}{2}$, en sorte qu'au point double G le rapport de (du) à dz , c'est-à-dire, $\frac{du}{dz} (-\frac{G}{2D} \pm \frac{1}{2D} \sqrt{GG - 4DM}) = -\frac{c}{b} \pm \frac{1}{2b^2} \sqrt{4c^2 b^6 - 4c^2 b^6 + 2b^6 gf} = -\frac{c}{b} \pm \frac{1}{2b} \sqrt{2gf}$; or ces deux valeurs $-\frac{2c + \sqrt{2gf}}{2b}$ & $-\frac{2c - \sqrt{2gf}}{2b}$ étant réelles & inégales, font connoître * que * *Art. 62.*

le point double G est un point d'intersection de deux branches MGD , mGD . Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.

C O R O L L A I R E.

LXVI. Ainsi en prenant sur l'axe la partie $G\Pi = b$, sur l'ordonnée principale GL la partie $G\Lambda = c$, & sur cette même ordonnée principale, de part & d'autre du point Λ , les portions $\Lambda\theta$, $\Lambda\Phi$, égales l'une & l'autre à $\frac{\sqrt{gf}}{\sqrt{2}}$, les droites $\theta\Pi$, $\Phi\Pi$, seront paralleles aux deux tangentes de la courbe au point double G .

E X E M P L E I I.

LXVII. Les mêmes choses étant supposées comme dans l'Exemple précédent, soient encore pris les côtés $G\Pi$, $G\Lambda$, du triangle $G\Pi\Lambda$, prolongés autant qu'il sera nécessaire, le premier pour l'axe des (z) , le second pour l'axe des (u) , c'est-à-dire, pour l'ordonnée principale d'une courbe $MGMZEV^*$, dont la nature est exprimée par l'équation $b^4 u^2 + 2cb^3 zu - \frac{1}{4}a^2 z^4 - \frac{1}{3}afb z^3 + c^2 b^2 z^2 = 0$, il est visible, par la troisième Proposition *, que cette courbe a * *Fig. 42.*
un point double à l'origine G de son axe GQ & de son or-

donnée principale GL . Car quand $GQ(z) = 0$, on a $QM(uu) = 0$, & la valeur de $u = 0$, étant substituée dans l'équation, il vient $\frac{1}{4}a^2z^4 + \frac{1}{3}afb^3z^3 - c^2b^2z^2 = 0$, d'où l'on tire $zz = 0$ & $\frac{1}{4}aaz^2 + \frac{1}{3}afb^3z - c^2b^2 = 0$; or les deux premières égalités $uu = 0$ & $zz = 0$ font connoître qu'il y a au point G deux ordonnées égales & deux abscisses égales, & par conséquent que les droites GL , GQ , sont l'une & l'autre sécantes de la courbe $MGMZEV$ en un point double G . Mais, par la quatrième Proposition & les Corollaires qui la suivent, il est évident que ce point double G est ici un point de rebroussement: car comparant chaque terme de l'équation donnée, dans cet exemple, avec celui qui lui correspond dans l'équation générale de l'art. 61, on a $\Delta = 0$, $Q = 0$, $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = b^4$, $E = 0$, $F = 0$, $G = 2cb^3$, $K = -\frac{1}{4}a^2$, $L = -\frac{1}{3}afb$, $M = ccbb$, enforte qu'au point double G le rapport de (du) à dz , c'est-à-dire, $\frac{du}{dz} \left(-\frac{G}{2D} \pm \frac{1}{2D} \sqrt{GG - 4DM} \right)$ est $= -\frac{c}{b} \pm \frac{1}{2b^4} \sqrt{4ccb^6 - 4ccb^6} = -\frac{c}{b} \pm 0$; ce qui fait voir que les deux valeurs $-\frac{G}{2D} + \frac{1}{2D} \sqrt{GG - 4DM}$ & $-\frac{G}{2D} - \frac{1}{2D} \sqrt{GG - 4DM}$, sont deux racines réelles, égales & de mêmes signes, & par conséquent * que le point double G est un point de rebroussement. Donc avant de supposer la courbe tracée sur le plan; on connoît par son équation $b^4u^2 + 2cb^3zu - \frac{1}{4}a^2z^4 - \frac{1}{3}afb^3z^3 + c^2b^2z^2 = 0$, que cette courbe a un point de rebroussement à l'origine G de son axe. *Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.*

C O R O L L A I R E.

LXVIII. Donc en prenant sur l'axe GQ la partie $G\Pi = b$, & sur l'ordonnée principale la partie $G\Lambda = c$, si l'on joint les points Π & Λ , & que par le point G on tire la droite GP parallèle à $\Lambda\Pi$, cette droite GP sera tangente de la courbe $MGMZEV$ au point de rebroussement G .

* Art. 63.

EXEMPLE III.

LXIX. Les mêmes choses étant supposées comme dans le premier Exemple *, à l'exception de ce qu'il y a ici de * *Art. 65.* particulier, soit une courbe $MDmZEV$ *, dont le rapport * *Fig. 43.* des abscisses GQ (z) aux ordonnées QM (u) est exprimé par l'équation $b^4 u^2 + 2cb^3 zu - \frac{1}{4}a^2 z^4 - \frac{1}{3}afb z^3 + \frac{1}{3}agb z^3 + \frac{1}{2}fgb^2 z^2 + c^2 b^2 zz = 0$, dans laquelle $f > g$; il est visible, par la troisième Proposition *, que cette courbe a un point * *Art. 61.* double à l'origine G de ses abscisses & de ses ordonnées. Car quand GQ (z) $= 0$, on a $uu = 0$, & cette valeur ($u = 0$) étant substituée dans l'équation donnée, on a $\frac{1}{4}a^2 z^4 - \frac{1}{3}afb z^3 - \frac{1}{3}agb z^3 - \frac{1}{2}fgb^2 zz - ccb b zz = 0$, d'où l'on tire $zz = 0$ & $\frac{1}{4}a^2 zz + \frac{1}{3}afb z - \frac{1}{3}agb z - \frac{1}{2}fgbb - ccb b = 0$; or les deux premières équations $uu = 0$ & $zz = 0$ font connoître qu'il y a en G , origine de l'axe, deux abscisses égales & deux ordonnées égales entre elles, & par conséquent que l'axe GQ & l'ordonnée principale GL sont l'une & l'autre sécantes de la courbe, en deux points, à leur origine G ; donc cette origine G est un point double de la courbe $MDmZEV$, dont la nature est exprimée par l'équation $b^4 u^2 + 2cb^3 zu - \frac{1}{4}a^2 z^4 - \frac{1}{3}afb z^3 + \frac{1}{3}agb z^3 + \frac{1}{2}fgb^2 zz + c^2 b^2 zz = 0$. Mais par la quatrième Proposition * & les Corollaires qui la suivent, il est évident que * *Art. 62.* ce point double G est ici un point double invisible sur le plan, c'est-à-dire, une ovale infiniment petite; car les coefficients de l'équation marquée (10)* étant ici $\Delta = 0$, $Q = 0$, * *Art. 61.* $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = b^4$, $E = 0$, $F = 0$, $G = 2cb^3$, $K = -\frac{1}{4}a^2$, $L = \frac{agb - afb}{3}$, $M = \frac{fgbb + 2ccb b}{2}$, on voit que les coefficients D & M sont affectés des mêmes signes, & que GG ($4c^2 b^6$) $< 4DM$ ($2fgbb^6 + 4c^2 b^6$), en sorte que $\pm \sqrt{GG - 4DM} = \pm \sqrt{-2fgb^6} = \pm b^3 \sqrt{-2fg}$ sont des expressions imaginaires; d'où il suit que les deux racines $\frac{du}{dz} = (-\frac{G}{2D} \pm \frac{1}{2D} \sqrt{GG - 4DM})$

$= -\frac{c}{b} \pm \frac{1}{b} \sqrt{-2fg}$ sont imaginaires, & par conséquent que le rapport du (du) au (dz) , au point double G , est un rapport imaginaire. Donc quoique ce point double G soit un point de la courbe (puisque le rapport des coordonnées (z) & (u) y est réel) elle n'y a pas de tangente. Donc * ce point double G est un point double invisible, ou, ce qui est la même chose, une ovale infiniment petite conjuguée. *Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.*

REMARQUES.

LXX. N'ayant pas établi tous les principes généraux qui servent à la connoissance des lignes du 4^{me} ordre, ce n'est pas encore ici le lieu de faire connoître les différentes propriétés des trois courbes dont nous venons de parler dans les Exemples précédents; cependant il ne sera pas hors de propos de faire remarquer en passant, 1.^o Que ces trois courbes* sont composées de quatre branches infinies, dont il y en a deux qui s'étendent du côté des (z) positifs, & deux autres qui s'étendent du côté des (z) négatifs. 2.^o Qu'en tirant par le point G la droite GP , parallèle au troisième côté ΠA du triangle $G\Pi A$, & prolongée indéfiniment de part & d'autre du point G , cette droite GP coupe en deux portions égales toutes les droites, comme Mm , menées parallèlement à l'ordonnée principale GL , & terminées de part & d'autre par la courbe, en sorte que cette droite GP est le diamètre de la courbe.

* Fig. 41. A l'égard du premier Exemple*, on peut remarquer; 1.^o Qu'en prenant sur le diamètre GP , du côté où les (z) sont négatifs, le point B , tel que GB soit $= \frac{2}{3} \times \overline{g-f}$, & sur ce même diamètre, de part & d'autre du point B , les parties BD , BE , égales l'une & l'autre à $\frac{1}{3} \sqrt{4gg-10fg+4ff}$, les points D & E seront les points de la courbe $MGDGMZEV$ auxquels les tangentes sont parallèles à l'ordonnée principale GL .

2.^o Que toutes les droites, comme BC , menées parallèlement

lement à cette même ordonnée principale GL entre les points D & E , ne rencontreront la courbe en aucun point. Mais que toutes les droites, comme Mm & ZV , menées parallèlement à cette même ordonnée principale [les premières au de-là du point D du côté des (z) positifs, les autres au de-là du point E du côté des (z) négatifs] rencontreront la courbe en deux points, à quelques distances qu'elles soient du point G , enforte que les deux portions $MGD Gm$, ZEV , de cette courbe seront séparées l'une de l'autre de la distance DE

$$= \frac{2}{3} \sqrt{4gg - 10fg + 4ff}.$$

3.° Si l'on prend sur le diametre GP , du côté où les (z) sont négatifs, le point F , tel que GF soit $=g$; si par ce point F on tire la droite IFK parallèle à l'ordonnée principale GL , & si l'on prend sur cette droite IFK , de part & d'autre du point F , les portions FI , FK , égales l'une & l'autre

à $\frac{g\sqrt{fg-gg}}{2a\sqrt{3}}$, les points I & K seront les points de la courbe auxquels les tangentes I_2 , K_3 , sont parallèles au diametre GP , enforte que FI & FK sont les *maxima* du *folium* $GIDKG$.

4.° Toutes les droites menées parallèlement au diametre GP , entre les tangentes I_2 , K_3 , rencontreront la courbe en quatre points, dont il y en aura toujours deux entre les droites BC , GL , un au de-là de GL , & le quatrième au de-là de BC ; Mais les droites, comme Mz , menées parallèlement à ce diametre GP au dessus de la droite K_3 , ou au dessous de la droite I_2 , telles que mv , ne rencontreront la courbe qu'en deux points, l'un desquels sera au de-là de la droite GL , du côté des (z) positifs, & l'autre au de-là de la droite BC , du côté des (z) négatifs.

5.° Si l'on prend sur le diametre GP , du côté où les (z) sont négatifs, le point H , tel que GH soit double de GB ; si par le point H on tire parallèlement à l'ordonnée principale GL une droite HZ prolongée de part & d'autre du point H jusqu'à ce qu'elle aille rencontrer en Z & en V les tangentes GT , Gt , du point double G , prolongées autant

qu'il sera nécessaire, je dis que ces points Z & V seront les points où ces tangentes GT , Gt , rencontreront la portion de courbe $ZZEuV$, enforte que le *folium* $GIDKG$ se trouvera tout entier dans le triangle GZV .

* Fig. 42.

A l'égard du second Exemple *, on peut remarquer, 1.^o Qu'en prenant sur le diamètre GP , du côté où les (z) sont négatifs, le point E , tel que GE soit $= \frac{4}{3}f$, ce point E sera le point de la courbe $MGMZEV$ auquel la tangente est parallèle à l'ordonnée principale GL .

2.^o Que toutes les droites, comme BC , menées parallèlement à l'ordonnée principale GL , entre les points E & G , ne rencontreront la courbe en aucun point ; mais que toutes les droites, comme Mm , ZV , menées parallèlement à cette même ordonnée principale GL [les premières au de-là du point G , du côté des (z) positifs, les autres au de-là du point E , du côté des (z) négatifs] rencontreront la courbe en deux points, à quelque distance qu'elles soient du point G , enforte que les deux portions infinies MGM & ZEV de cette courbe seront séparées l'une & l'autre de la distance $GE = \frac{4}{3}f$.

3.^o Que toutes les droites, comme MZ , menées parallèlement au diamètre GP , & de part & d'autre de ce diamètre, ne rencontreront la courbe qu'en deux points, l'un desquels sera au de-là de la droite GL , du côté des (z) positifs, l'autre au de-là de la droite BC , du côté des (z) négatifs.

* Fig. 43.

A l'égard du troisième Exemple *, on peut remarquer, 1.^o Qu'en prenant sur le diamètre GP , du côté où les (z) sont négatifs, le point B , tel que GB soit $= \frac{2}{3} \times f - g$, & sur ce même diamètre, de part & d'autre du point B , les portions BD , DE , égales l'une & l'autre à $\frac{1}{3} \sqrt{4gg + 10fg + 4ff}$, ces points D & E seront les points de la courbe $MDmZEV$ où les tangentes seront parallèles à l'ordonnée principale GL .

2.^o Que toutes les droites, comme BC , menées parallèlement à l'ordonnée principale GL , entre les points D & E ,
ne

ne rencontreront la courbe en aucun point, excepté la droite GL , qui passera par le point double invifible, ou ovale infiniment petite G ; mais que toutes les droites, comme Mm , ZV , menées parallèlement à cette même ordonnée principale GL , les premières au de-là du point D , du côté des (z) positifs, les secondes au de-là du point E , du côté des (z) négatifs, rencontreront toujours la courbe en deux points, à quelque distance qu'elles soient du point G , enforte que les deux portions infinies MDm , $ZE V$, de cette troisième courbe seront séparées & distantes l'une de l'autre de la grandeur $DE = \frac{2}{3} \sqrt{4gg + 10fg + 4ff}$.

3.° Que toutes les droites, comme MZ , menées parallèlement au diamètre GP , & de part & d'autre de ce diamètre, ne rencontreront la courbe qu'en deux points, l'un desquels, comme M , sera au de-là de la droite GL , du côté des (z) positifs, l'autre au de-là de la droite BC , du côté des (z) négatifs.

PROPOSITION V.

THEOREME.

LXXI. Si les indéterminées (z) & (u) de l'équation marquée ici par (20) représentent la première les abscisses GQ , la seconde les ordonnées QM d'une ligne du 4^{me} ordre $MGDGA RCRm^*$, dont la nature soit exprimée par l'équation (20) (qui ne diffère de celle de l'art. 61, marquée par (10), qu'en ce que les coefficients indéterminés F & L sont ici déterminés à

* Fig. 44.
45. 46.
& 47.

être l'un $F = \frac{E\sqrt{M}}{\sqrt{K}} + \frac{G\sqrt{K}}{\sqrt{M}}$, l'autre $L = 2\sqrt{KM}$);

je dis que cette ligne a deux points doubles sur son axe, l'un à l'origine G des abscisses, l'autre en un point R distant du point G

de la grandeur $GR = -\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{K}}$.

$$(20) \dots \Delta u^4 + Qz + A \times u^3 + Bzz + Cz + D \times u^2$$

Mem. 1730. , Bbb

$$+ Ez^3 + \frac{E\sqrt{M}}{\sqrt{K}}zz + \frac{G\sqrt{K}}{\sqrt{M}}zz + Gz \times u + Kz^4 \\ + 2\sqrt{KM} \times z^3 + Mz^2 = 0.$$

D É M O N S T R A T I O N.

* Art. 62. On a déjà vu* que toutes ces courbes ont un point double à l'origine G de leur axe, ainsi il reste à prouver qu'elles en ont un autre en R , ce qui est très-aisé : car, quand $u = 0$,

l'équation (20) devient $Kz^4 + 2\sqrt{KM} \times z^3 + Mz^2 = 0$, égalité du 4^{me} degré, dont les quatre racines sont $z = 0$,

$z = 0$, $z = -\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{K}}$, $z = -\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{K}}$; les deux premières

appartiennent visiblement au point double G , origine des indéterminées, & les deux dernières à un point R pris sur

l'axe, & distant de G de la grandeur $GR = -\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{K}}$. Donc

au point R il y a deux abscisses qui se confondent en une. Mais, en ce même point R , deux des ordonnées qui y correspondent, sont égales entr'elles : car en substituant dans l'équation (20) au lieu de (z) la valeur de cette indéterminée au point R , c'est-à-dire $-\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{K}}$, au lieu de (z) il

vient l'égalité marquée ici par (L)

$$(L) \dots \Delta u^4 + Au^3 - \frac{Q\sqrt{M}}{\sqrt{K}}u^3 + \frac{PM}{K}u^2 - \frac{C\sqrt{M}}{\sqrt{K}}u^2 + Du^2 = 0;$$

dont les quatre racines donnent les valeurs des quatre ordonnées correspondantes au point R de l'axe GQ : or dans cette égalité il y en a deux réelles & égales entr'elles, qui sont $u = 0$ & $u = 0$; donc au point R il y a non seulement deux abscisses qui se confondent en une, mais encore deux ordonnées égales entr'elles & à zero; donc la courbe

* Art. 51. passe deux fois par ce même point R^* , donc ce point R est

un point double de la courbe $MGDGARCRm$, aussi-bien que le point G ; donc toutes les courbes, dont la nature est exprimée par l'équation marquée par (20), ont deux points doubles sur leur axe. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION VI.

PROBLEME.

LXXII. *Toutes choses demeurant les mêmes comme dans le Théor. précédent, déterminer la nature du second point double R, c'est-à-dire, connoître si ce second point double est un point d'intersection de deux branches, ou s'il est un point de rebroussement, ou enfin s'il est une ovale infiniment petite conjuguée. La nature du point double G étant déjà déterminée par la quatrième Proposition, on ne la détermine pas ici.*

SOLUTION.

La Solution de ce Probleme ne differe presque pas de celle de l'art. 63. En effet on cherchera d'abord * quel est le rapport du (dz) au (du) dans tous les points doubles de la courbe, en différenciant deux fois son équation, marquée par (20), dans l'exposé de la Proposition précédente; cette double différenciation donnera l'équation différentielle, marquée ici par 2Σ.

$$2\Sigma... \left\{ \begin{array}{l} + 6\Delta u^2 \\ + 3Qzu \\ + 3Au \\ + Bz\zeta \\ + C\zeta \\ + D \end{array} \right\} du^2 \left\{ \begin{array}{l} + 3Qu^2 \\ + 4Bz\zeta u \\ + 2Cu \\ + 3Ez\zeta \\ + \frac{2E\sqrt{M}}{\sqrt{K}}\zeta \\ + \frac{2G\sqrt{K}}{\sqrt{M}}\zeta \\ + G \end{array} \right\} dz du \left\{ \begin{array}{l} + Buu \\ + 3Euz \\ + \frac{E\sqrt{M}}{\sqrt{K}}u \\ + \frac{G\sqrt{K}}{\sqrt{M}} \\ + 6Kz\zeta \\ + 6z\sqrt{KM} \\ + M \end{array} \right\} dz^2 = 0.$$

On rendra ensuite cette équation différentielle propre au point double R , dont on connoît l'existence & la position par l'équation rationnelle, marquée (20)*, en substituant * *Art. 71.* dans l'équation différentielle, au lieu des indéterminées (z)

* Art. 71. & $\langle u \rangle$, leurs valeurs au point R , qui sont $^* \zeta = - \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{K}}$

& $u = 0$, & cette équation différentielle 2Σ deviendra

$$\frac{BM}{K} - \frac{C\sqrt{M}}{\sqrt{K}} + D \times du^2 + \frac{EM}{K} - G \times d\zeta du + Md\zeta^2 = 0, \text{ \& ensuite } \frac{d\zeta}{du} = \frac{KG - EM}{2KM} \pm \frac{1}{2KM}$$

$\sqrt{EM - KG^2 + 4KM \times C\sqrt{KM} - BM - KD}$, égalité qui exprime les deux rapports de $\langle d\zeta \rangle$ à $\langle du \rangle$ au point double R ; or il est visible qu'il peut arriver trois différents cas, car la grandeur $EM - KG^2 + 4KM \times C\sqrt{KM} - BM - KD$, qui est sous le signe radical, peut être ou une grandeur positive, ou une grandeur négative, ou bien être $= 0$, selon que le carré $EM - KG^2$ est plus grand, ou plus petit, ou égal à $4KM \times KD + BM - C\sqrt{KM}$.

Dans le 1^{er} cas les deux rapports $\frac{d\zeta}{du} = \frac{KG - EM}{2KM} \pm \frac{1}{2KM}$

$\sqrt{EM - KG^2 + 4KM \times C\sqrt{KM} - BM - KD}$ sont réels; d'où il suit qu'il y a au point double R deux tangentes, & par conséquent* que ce point double R est un point d'intersection de deux branches ARC, CRM , de la courbe $MGDGARCRm$.

* Art. 52.

Dans le second cas, les deux rapports précédents sont imaginaires; d'où il suit qu'il n'y a point de tangente au point double R , & par conséquent* que ce point double est invisible, c'est-à-dire, qu'il y a en ce point R une ovale infiniment petite qu'on peut nommer le point conjugué de la courbe $MDACm$.*

* Art. id.

* Fig. 46.

Dans le troisième cas, les deux rapports précédents sont

l'un & l'autre égaux à $\frac{KG-EM}{2KM} \pm 0$; d'où il suit que les deux tangentes au point double se confondent en une, & par conséquent que ce point double R est ou un point de rebroussement* de la courbe $MGDGARm$, ou une osculation, ou bien une Lemniscale infiniment petite conjuguée.

* Art. 52;

Voyez ce qui est dit dans la suite de ce Traité sur les Osculations & les Lemniscates infiniment petites conjuguées.

Donc l'équation différentielle, marquée ci-dessus par 2Σ , fera toujours connoître la nature du point double R : & avant même de supposer la courbe décrite sur le plan, on connoîtra si ce point double R est ou une intersection, ou un point conjugué, ou un rebroussement, en se servant de l'égalité $\frac{dz}{du} = \frac{KG-EM}{2KM} \pm \frac{1}{2KM}$

$$\sqrt{EM-KG^2 + 4KM \times C\sqrt{KM-BM-KD}}.$$

Ce qu'il falloit trouver.

EXEMPLE I.

LXXIII. Soit la courbe $MGDGARCRm$ * dans laquelle le rapport des abscisses $GQ(z)$ aux ordonnées $QM(u)$ est exprimé par l'équation suivante

* Fig. 44

$$z = -\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{aa + 4u\sqrt{4au + aa}}.$$

Je dis 1.^o que cette courbe a deux points doubles sur son axe, l'un à l'origine G de ses abscisses & de ses ordonnées, l'autre en un point R distant de G de la grandeur $GR = -a$; 2.^o Que ces deux points doubles sont des points d'intersection de différentes branches. Car en faisant évanouir les signes radicaux de l'équation donnée, on a l'équation $au^3 + \frac{1}{4}a^2u^2 = \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{2}az^3 + \frac{1}{4}aaz^2$, qui est visiblement un cas particulier de l'équation générale marquée par (20) dans l'art. 71. En effet il est visible par la cinquième proposition, que cette courbe a deux points doubles sur son axe GQ ; car quand $uu=0$, on a $az=0$ & $zz + 2az + aa=0$, les deux premières égalités $uu=0$, $zz=0$, font connoître que les droites GQ, GL , sont l'une & l'autre sécantes de la courbe en un point double G qui

est à l'origine des abscisses & des ordonnées ; & la première & la troisième égalité $uu=0$ & $zz+2az+aa=0$, font connoître que l'axe GQ & une droite RC parallele aux ordonnées QM , & distante de G de la grandeur $GR=-a$, sont l'une & l'autre sécantes de la même courbe $MGDGA RCRm$ en un autre point double R distant de G de la grandeur $GR=-a$. Mais par les quatrième & cinquième Propositions il est évident que les points G & R sont l'un & l'autre des points d'intersection de la courbe $MGDGARCRm$: car en comparant l'équation donnée $au^3+\frac{1}{4}a^2u^2=\frac{1}{4}z^4+\frac{1}{2}az^3+\frac{1}{4}aaaz$ avec les équations générales marquées par (10) & par (20) dans les art. 62 & 71, on trouve $\Delta=0, Q=0, A=a, B=0, C=0, D=\frac{1}{4}aa, E=0$;

$$F\left(\frac{E\sqrt{M}}{\sqrt{K}}+\frac{G\sqrt{K}}{\sqrt{M}}\right)=0, G=0, K=-\frac{1}{4};$$

$$L(2\sqrt{KM})=-\frac{1}{2}a \text{ \& } M=-\frac{1}{4}aa, \text{ en sorte}$$

1.° Qu'au point double G , le rapport de (du) à (dz) c'est-
 * Art. 63. à-dire $\frac{du}{dz}\left(-\frac{G}{2D}\pm\frac{1}{2D}\sqrt{GG-4DM}\right)=\pm 1$;

2.° Qu'au point double R , le rapport de (du) à (dz) , ou ;
 ce qui revient au même, $\frac{dz}{du}\left(\frac{KG-EM}{2KM}\pm\frac{1}{2KM}\right)$

$$\begin{aligned} & \sqrt{EM-KG+4KM\times C\sqrt{KM-BM-KD}}* \\ & =\frac{0\times 8}{aa}\pm\frac{8}{aa}\sqrt{0+\frac{1}{4}aa\times 0-0+\frac{1}{16}aa}=\pm 1. \end{aligned}$$

Or puisqu'au point double G , $\frac{du}{dz}=\pm 1$, il s'ensuit qu'il y a deux tangentes en ce point double, & par conséquent une intersection de deux branches finies ou infinies de la courbe $MGDGARCRm$; De même, puisqu'au point double R , $\frac{dz}{du}=\pm 1$, il s'ensuit qu'il y a aussi deux tangentes en ce point double, & par conséquent deux branches finies ou infinies, de la courbe $MGDGARCRm$, qui y passent. Donc il est évident, par les Propositions quatrième

& fixième, que les deux points doubles G & R de la courbe $MGDGARCRm$, dont la nature est exprimée par

l'équation $z = -\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{aa+4u}\sqrt{4au+aa}$, sont des points d'intersection. *Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.*

COROLLAIRE.

LXXIV. Donc * 1.° si, de part & d'autre du point * Fig. 44. double G , on prend sur l'axe GQ les parties $G\Pi$, $G\Lambda$, $=1$; si des points Π & Λ on mene du côté où les (u) sont négatifs les droites ΠT , Λt , parallèles aux ordonnées, & l'une & l'autre aussi $=1$, les droites GT , Gt , seront visiblement les deux tangentes de la courbe au point double G . 2.° Si, de part & d'autre du point R , on prend sur l'axe GQ les parties Rq , Rf , l'une & l'autre $=1$, & si des points q & f on mene du côté où les (u) sont négatifs les droites qT , ft , parallèles aux ordonnées, & l'une & l'autre $=1$, les droites RT , Rt , seront les deux tangentes de la courbe au point double R .

EXEMPLE II.

LXXV. Soit la courbe $MGARm$ *, dans laquelle le * Fig. 45. rapport des abscisses $GQ(z)$ aux ordonnées $QM(u)$ est

exprimé par l'équation $z = -\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{aa+8u}\sqrt{au}$; je dis que cette courbe a deux points de rebroussement sur son axe GQ , l'un à l'origine G de ses abscisses, l'autre au point R , distant de l'origine G de la grandeur $GR = -a$; car l'équation donnée étant délivrée des signes radicaux, devient $au^3 = \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{2}az^3 + \frac{1}{4}aaz^2$, & sous cette forme elle se rapporte aux équations générales marquées par (10) & par (20) dans les art. 62 & 71. En effet dans cet Exemple les coefficients indéterminés Δ , Q , A , B , C , D , E , &c. des art. 62 & 71, sont $\Delta=0$, $Q=0$, $A=a$, $B=0$, $C=0$, $D=0$, $E=0$, $F(\frac{E\sqrt{M}}{\sqrt{K}} + \frac{G\sqrt{K}}{\sqrt{M}})$,

$= 0$, $G = 0$, $K = -\frac{1}{4}$, $L(2\sqrt{KM}) = -\frac{1}{2}a$;
 $M = -\frac{1}{4}aa$. Or le coefficient $L(-\frac{1}{2}a)$ étant $=$
 $2\sqrt{KM}$, & le coefficient $F(0)$ étant $= \frac{E\sqrt{M}}{\sqrt{K}} + \frac{C\sqrt{K}}{\sqrt{M}}$;

* Art. 71. il s'enfuit * que la courbe $MGARm$ a deux points doubles
 sur son axe, l'un à l'origine G des abscisses & des ordonnées,
 l'autre en un point R distant de G de la grandeur $GR =$
 $-a = -\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{K}}$. Mais le rapport de (dz) à (du) au
 point double G étant toujours exprimé par $\frac{du}{dz} (-\frac{G}{2D} \pm$

* Art. 63. $\frac{1}{2D} \sqrt{GG - 4DM}) * = 0 \pm \frac{a}{0}$, il s'enfuit que les
 deux tangentes de la courbe au point double G se confon-
 dent avec l'ordonnée principale GL , & par conséquent que
 ce point double G est un point de rebroussement auquel
 l'ordonnée principale GL est tangente : de même le rap-
 port de (du) à (dz) au point double R , étant exprimé
 par $\frac{dz}{du} (\frac{KG - EM}{2KM} \pm \frac{1}{2KM})$

* Art. 72. $\sqrt{EM - KG + 4KM \times C\sqrt{KM} - BM - KD}) * =$
 $= \frac{0 \times 8}{aa} \pm \frac{8}{aa} \sqrt{0 + \frac{1}{4}aa \times 0} = 0 \pm \frac{4 \times 0}{a} = \pm \frac{0}{a}$, il

* Art. 63. s'enfuit * que les deux tangentes au point double R se
 confondent en une & avec une droite RC menée par le
 point double R parallèlement aux ordonnées, & par consé-
 quent que ce point double R est encore un point de
 rebroussement, auquel la droite RC parallèle aux ordonnées
 QM est tangente. Donc avant de supposer la courbe $MGARm$
 décrite sur le plan, on connoît par son équation $z = -\frac{1}{2}a$
 $\pm \frac{1}{2}\sqrt{aa + 8u\sqrt{au}}$ non seulement que cette courbe
 a deux points doubles sur son axe GQ , mais encore le lieu
 où ces deux points doubles sont situés, & quelle est leur
 nature. Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.

EXEMPLE

EXEMPLE III.

LXXVI. Soit la courbe $MDACm^*$ dans laquelle le * Fig. 46.
rapport des abscisses $GQ(z)$ aux ordonnées $QM(u)$ est
exprimé par l'équation

$$z = -\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{aa \pm 4u\sqrt{4au - aa}}$$

on trouvera que cette courbe a sur son axe GQ deux
points doubles invisibles : ou , ce qui revient au même ,
deux ovales infiniment petites, qu'on peut nommer, avec
M. Newton, *deux points conjugués*, l'un à l'origine G des ab-
scisses, l'autre en un point R distant de G de la grandeur
 $GR = -a$. Car, par l'évanouissement des incommen-
surables, cette équation devient $au^3 - \frac{1}{4}a^2u^2 = \frac{1}{4}z^4$
 $+\frac{1}{2}az^3 + \frac{1}{4}aaaz$, & sous cette forme elle se rapporte
évidemment aux équations (10) & (20) des art. 61 & 71.
En effet, dans cet Exemple, les coefficients des équations
(10) & (20) sont $\Delta = 0$, $Q = 0$, $A = a$, $B = 0$,

$$C = 0, D = -\frac{1}{4}aa, E = 0, F\left(\frac{E\sqrt{M}}{\sqrt{K}} + \frac{G\sqrt{K}}{\sqrt{M}}\right) = 0;$$

$$G = 0, K = -\frac{1}{4}, L = -\frac{1}{2}a = -2\sqrt{KM}, M =$$

$$-\frac{1}{4}aa. \text{ Or le coefficient } F = 0 \text{ étant aussi égal à } \frac{E\sqrt{M}}{\sqrt{K}}$$

$$+ \frac{G\sqrt{K}}{\sqrt{M}}, \text{ \& le coefficient } L = -\frac{1}{2}a \text{ étant aussi égal}$$

à $-2\sqrt{KM}$, il s'en suit * que la courbe $MDACm$ a deux * Art. 71.
points doubles sur son axe GQ , l'un à l'origine G de cet axe,
l'autre en un point R distant de G de la grandeur $GR =$
 $-\frac{L}{2K}$, qui est ici $= -a$.

Mais ces deux points doubles G & R sont des points
conjugués : car 1.° au point double G le rapport de dz à du
étant toujours exprimé par cette fraction $\frac{du}{dz} = -\frac{G}{2D} \pm \frac{1}{2D}$

$\sqrt{GG-4DM}$, & les coëfficients G & D étant ici égaux; l'un à zero, l'autre à une grandeur négative, on a $\frac{du}{dz} = 0$

$\mp \sqrt{-1}$. Or ces deux grandeurs $\mp \sqrt{-1}$ étant l'une & l'autre des grandeurs imaginaires, il s'enfuit que les deux tangentes de la courbe au point double G sont imaginaires, tandis que le rapport de l'abscisse à l'ordonnée correspondante y est réel; donc * le point double G est un point conjugué. 2.° Au point double R le rapport de dz à du

* Art. 63.

étant toujours exprimé par $\frac{dz}{du} = \frac{KG-EM}{2KM} \pm \frac{1}{2KM}$

$$\sqrt{EM-KG^2+4KM \times C\sqrt{KM}-BM-KD},$$

& ces grandeurs étant ici $= \mp \sqrt{-1}$, qui sont des imaginaires, il s'enfuit que les deux tangentes au point double R sont imaginaires, & par conséquent * que ce point double R est un point conjugué aussi-bien que le point double G . Donc avant de supposer la courbe décrite, soit par un mouvement continu, soit par plusieurs points, on connoît par son équation non seulement qu'elle a deux points conjugués sur son axe, mais encore la situation de ces points. *Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.*

* Art. 72.

R E M A R Q U E S.

LXXVII. Il n'est peut-être pas hors de propos de faire remarquer ici, 1.° Que les trois courbes dont on a parlé dans les trois derniers Exemples, sont composées chacune de deux branches qui s'étendent à l'infini de part & d'autre de l'ordonnée principale GL , mais du même côté par rapport à l'axe GQ . 2.° Qu'après avoir partagé GR en deux parties égales au point B , si par ce même point B on mène une droite BAI parallèle à l'ordonnée principale GL , cette droite coupera en deux parties égales toutes les droites, comme Mm , menées parallèlement à l'axe GQ , & terminées de part & d'autre par la courbe, en sorte que cette droite BI fera le

diametre de la courbe. Voilà ce que ces trois courbes ont de commun ; voici maintenant ce qu'elles ont de propre.

Dans le premier Exemple *, si l'on prend 1.° sur le diametre BI , du côté où les (u) sont négatifs, le point E , tel que BE soit $= \frac{1}{6}a$; si par ce point E on mene la droite EH parallele à l'axe GQ , & qu'on prenne sur cette droite EH , de part & d'autre du point E , les parties EH , EF , égales

* Fig. 44.

à $\frac{a}{2} \sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{27}}}$, & les parties EK , EO , égales à

$\frac{a}{2} \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{27}}}$, les points H^* , F , K , O , seront les points

de la courbe qui ont des tangentes Hf , Ff , Kf , Of , paralleles aux ordonnées QM .

2.° Si on prend sur l'ordonnée principale GL & sur sa parallele RI , du côté où les (u) sont négatifs, les points D & C , tels que GD & RC soient l'une & l'autre $= \frac{1}{4}a$, les points D & C seront deux des points de la courbe $MGD GARC RM$ auxquels les tangentes DT , CT , sont paralleles à l'axe.

3.° Si on prend sur le diametre BI , du côté où les (u) sont positifs, le point A , tel que BA soit égal à la racine réelle de cette égalité $u^3 + \frac{1}{4}auu - \frac{1}{64}a^3 = 0$, on aura le point où ce diametre est coupé par la courbe parallelement à l'axe, enforte que la tangente AT en ce point est parallele à l'axe GQ ; Sur quoi il faut remarquer que cette égalité $u^3 + \frac{1}{4}auu = \frac{1}{64}a^3$ ne peut avoir qu'une seule racine réelle : D'où il suit que le diametre BI ne rencontre la courbe qu'en un seul point A .

4.° Toutes les droites, comme EH , menées parallelement à l'axe GQ , entre les points A & D , coupent la courbe en quatre points ; Toutes les droites, comme Mm , menées parallelement au même axe GQ au dessus du point A , par rapport au point B , couperont toujours la courbe en deux points, à quelque distance que le point I soit du point A ; Enfin toutes les droites menées parallelement à l'axe au

deffous du point D par rapport au point G , ne couperont la courbe en aucun point; D'où il suit que cette courbe $MG DGARCRm$ s'étend à l'infini du côté des (u) positifs, & ne s'étend pas au de-là des points D & C du côté des (u) négatifs.

5.^o Toutes les droites menées parallèlement à l'ordonnée principale GL entre les droites Hf , Kf , & entre les droites Ff , Of , coupent la courbe en trois points: mais celles qui sont menées parallèlement à la même ordonnée principale GL , entre les droites Hf , Ff , ne la coupent qu'en un seul point, de même que les droites menées parallèlement à l'ordonnée principale au de-là des droites Kf , Of , par rapport au point G .

Enforte qu'il est aisé de s'appercevoir, 1.^o Que la courbe $MG DGARCRm$ est composée de deux branches infinies GM , Rm , de deux folium $GHDKG$, $ROCFR$, & d'une sinuosité GAR , ce qui pourroit lui faire donner le nom de, *Bisfolium-Parabolique*. 2.^o Que ces quatre parties principales de la courbe $MG DGARCRm$ sont continües, le folium $GHDKG$ n'étant qu'une prolongation de la branche infinie GM : la sinuosité GAR , une prolongation du demi-folium DKG : le folium $ROCFR$, une prolongation de la sinuosité GAR , & enfin la branche infinie Rm , une prolongation du folium $ROCFR$.

* Fig. 45.

A l'égard du second Exemple*, 1.^o si l'on prend sur le diamètre BI , du côté où les (u) sont positifs, la droite $BA = \frac{1}{4}a$, on aura le point A où la courbe $MGARm$ coupe le diamètre, & où la tangente AT est parallèle à l'axe.

2.^o Toutes les droites menées parallèlement à l'axe GQ , entre cet axe & la tangente AT , couperont la courbe en quatre points, au lieu que toutes les droites, comme MIm , menées parallèlement à ce même axe GQ au de-là du point A , par rapport au point B , ne la couperont qu'en deux points, à quelque distance que le point I soit du point G : enfin toutes les droites menées parallèlement à ce même axe GQ au de-là du point B , par rapport au point A , ne rencontre-

ront la courbe en aucun point, enforte que cette courbe est toute entière du côté des (u) positifs, & n'a par conséquent que des ordonnées positives.

3.^o Toutes les droites, comme QM , menées parallèlement à l'ordonnée principale GL , ne rencontrent la courbe qu'en un seul point, soit que le point Q soit situé entre les points doubles rebrouffants G & R , ou au de-là de ces points doubles par rapport au point B , & à quelque distance qu'ils soient de ces points doubles G & R .

Enforte qu'il est aisé de voir que cette courbe n'a que deux branches infinies AGM , ARM , qui font, pour ainsi dire, deux cornes aux points rebrouffants G & R , ce qui pourroit lui faire donner le nom de *Parabole-Diceratoïde*.

Pour ce qui est maintenant du troisième Exemple*, on * Fig. 46: remarquera, 1.^o Qu'en prenant sur l'ordonnée principale GL & sur sa parallèle RI , du côté où les (u) sont positifs, les droites GD , RC , l'une & l'autre $= \frac{1}{4}a$, on aura les points D & C de la courbe $MDACm$ où les tangentes DT , CT , sont parallèles à l'axe GQ .

2.^o Si on prend sur le diamètre BI , du côté où les (u) sont positifs, la droite BA égale à la racine réelle de cette égalité $u^3 - \frac{1}{4}auu - \frac{1}{64}a^3 = 0$, le point A sera celui où le diamètre BI est coupé parallèlement à l'axe par la courbe $MDACm$, enforte que la tangente AT au point A sera parallèle à l'axe GQ .

3.^o Toutes les droites menées parallèlement à l'axe GQ , entre les points G & D , ne rencontreront pas la courbe, non plus que leurs parallèles menées de l'autre côté du point G par rapport au point D .

4.^o Mais toutes les droites menées parallèlement à l'axe GQ , entre les tangentes DT , AT , rencontreront la courbe en quatre points, tandis que leurs parallèles MIm , menées au de-là du point A , par rapport au point B , ne la rencontreront qu'en deux points, à quelque distance que le point I soit du point A .

5.^o Que toutes les droites, comme QM , menées paral-

ielement à l'ordonnée principale GL , entre les points doubles G & R , ou au de-là de ces points doubles par rapport au point B , ne rencontreront la courbe qu'en un seul point M , à quelque distance qu'elles soient de ces points doubles G & R .

Ensorte qu'il est aisé de concevoir, 1.^o Que la courbe $MDACm$, dont la nature est exprimée par l'équation

$z + \frac{1}{2}a = \pm \frac{1}{2} \sqrt{aa \pm 4u \sqrt{4au - aa}}$, n'a que deux branches ADM , ACm (lesquelles étant, pour ainsi dire, réfléchies aux points D & C par sinuosité, parallèlement à l'axe GQ , s'étendent à l'infini de part & d'autre du diametre BAP) & deux points conjugués, ou, ce qui est la même chose, deux ovales infiniment petites G & R , distantes de la courbe de la grandeur DG , ou $CR = \frac{1}{4}a$, & séparées l'une de l'autre par la droite $GR = a$, ce qui peut faire donner à cette courbe le nom de *Parabole-Biponctuée*.

EXEMPLE I V.

* Fig. 47.

LXXVIII. Soit la courbe $GaRMDLGA R\Phi CHG^*$, dont GQ est l'axe, & GL l'ordonnée principale, faisant entr'elles un angle quelconque LGQ , & dans laquelle le rapport des abscisses $GQ(z)$ aux ordonnées $QM(u)$ est

exprimé par l'équat. $z = \frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2} \sqrt{bb \pm 4u \sqrt{\frac{1}{2}aa - uu}}$, où l'on suppose $b < a$; je dis que cette courbe a deux points doubles sur son axe, l'un en G , origine des abscisses $GQ(z)$ l'autre en un point R , distant de G de la grandeur $GR = b$, & que ces deux points doubles sont deux points d'intersection de différentes branches. Car en faisant évanouir les signes radicaux de l'équation donnée, on a cette équation $\frac{1}{2}a^2u^2 - u^4 = z^4 - 2bz^3 + bbz^2$, qui est un cas particulier de l'équation marquée par (20) dans l'art. 71. En effet, en comparant ces deux équations, on trouve que les coefficients $\Delta, Q, A, B, C, D, K, L, M$, de l'équation marquée par (20) sont ici $\Delta = -1$, $Q = 0$, $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = \frac{1}{2}aa$, $E = 0$, $G = 0$, $F = 0$, $K = -1$, $L =$

$\pm 2b$, $M = -bb$; or le coefficient $L(2b) = 2\sqrt{KM}$
& $F = \frac{EM+GK}{\sqrt{KM}} = 0$. Donc * la courbe a deux points * *Art. 71.*

doubles sur son axe, l'un à l'origine G de ses abscisses;
l'autre en un point R , distant de G de la grandeur $GR =$

$$-\frac{L}{2K} = -\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{K}} = -\frac{2b}{2} = b. \text{ Ce qu'il falloit prouver.}$$

en premier lieu.

Mais ces deux points doubles G & R font ici des points
d'intersection : car 1.^o au point double G on a $\frac{dz}{dz} =$

$$\left(-\frac{G}{2D} \pm \frac{1}{2D} \sqrt{GG-4DM}\right) = \pm \frac{b\sqrt{2}}{a}; \text{ or les}$$

deux rapports $+\frac{b\sqrt{2}}{a}$ & $-\frac{b\sqrt{2}}{a}$, étant des grandeurs diffé-
rentes l'une de l'autre à cause des différents signes $+$ & $-$
dont ils sont affectés, il suit qu'il y a deux tangentes au
point double G , & par conséquent que ce point double est
un point d'intersection de deux branches. 2.^o Au point

$$\text{double } R, \text{ on a } \frac{dz}{du} = \frac{KG-EM}{2KM} \pm \frac{1}{2KM}$$

$$\sqrt{EM-KG^2 + 4KM} \times C\sqrt{KM} - BM - KD$$

$$= 0 \pm \frac{1}{2bb} \sqrt{2bbaa} = \pm \frac{a}{b\sqrt{2}}; \text{ or ces deux valeurs}$$

$+\frac{a}{b\sqrt{2}}$ & $-\frac{a}{b\sqrt{2}}$, étant différentes l'une de l'autre à cause
des signes $+$ & $-$ dont elles sont affectées, il s'ensuit qu'il
y a encore deux tangentes au point double R , & par consé-
quent que ce point est une intersection de deux branches
de la courbe $GARM DLGAR \Phi CHG$. Ainsi avant de
supposer la courbe décrite sur le plan, on connoît non seu-
lement qu'elle a deux points doubles sur son axe, & le lieu
où ils sont situés, mais encore la nature de ces deux points
doubles, qui est d'être des points d'intersection. *Ce qu'il*
falloit faire voir par cet Exemple.

COROLLAIRE.

LXXIX. Donc si l'on prend sur l'axe GQ les points q & λ (le premier du côté où les z sont positifs, & le second du côté où les z sont négatifs) tels que les parties de l'axe $Rq, G\lambda$, soient l'une & l'autre $= \frac{a}{\sqrt{2}}$: si par les points q & λ on mene parallèlement à l'ordonnée principale GL ; les droites $qT, \lambda T$, prolongées de part & d'autre de l'axe jusqu'en θ , enforte que $qT, q\theta, \lambda T, \lambda\theta$, soient égales à (b) : si des points R & G on tire les droites $RT, R\theta, GT, G\theta$, il est visible que les deux premières $RT, R\theta$, feront les deux tangentes de la courbe au point double R , & que les deux dernières $GT, G\theta$, feront les deux tangentes de la courbe au point double G .

REMARQUES.

LXXX. On peut remarquer ici, 1.^o Que toutes les droites, comme MN , menées en dedans de la courbe $GaRMDLGARNcG$ parallèlement à l'ordonnée principale GL , rencontrent cette courbe en quatre points M, μ, ν, N , & l'axe en un point Q , de telle façon néanmoins que $QM = QN$, & $Q\mu = Q\nu$; Car l'équation $\frac{1}{2}aa\mu u - u^4 = z^4 - 2bz^3 + b bz z$ donne $\pm u =$

$\frac{1}{2}\sqrt{aa \pm \sqrt{a^4 - 16z^4 + 32z^3 - 16bbzz}}$, ainsi en prenant GQ pour l'indéterminée (z) , on aura $QM(+u)$

ou $QN(-u) = \frac{1}{2}\sqrt{aa + \sqrt{a^4 - 16z^4 + 32z^3 - 16bbzz}}$
& $Q\mu(+u)$ ou bien $Q\nu(-u) =$

$\frac{1}{2}\sqrt{aa - \sqrt{a^4 - 16z^4 + 32z^3 - 16bbzz}}$: d'où il suit que l'axe GQ est un des diametres de la courbe.

2.^o Après avoir partagé GR en deux parties égales au point B , si par ce même point B on mene une droite DBC parallele à l'ordonnée principale GL , cette droite coupera en deux parties égales toutes les droites, comme Mm , menées
parallèlement

parallement à l'axe GQ , & terminées de part & d'autre par la courbe; Ensorte que cette droite BD sera l'autre diametre de la courbe $GaRMDLGARNCDG$.

3.° Si l'on prend sur le diametre BD , de part & d'autre du point B , les points A & a , tels que BA & Ba soient

l'une & l'autre $= \frac{1}{2} \sqrt{aa - \sqrt{a^4 - b^4}}$, & ensuite les points D & C , tels que BD & BC soient l'une & l'autre

$= \frac{1}{2} \sqrt{aa + \sqrt{a^4 - b^4}}$: les points A , a , & les points D & C , seront ceux où le diametre BD , prolongé de part & d'autre du point B , sera coupé par la courbe $GaRMDLGARNCDG$ parallement à son axe GQ ; Ensorte que les tangentes aux points A , a , D , C , seront paralleles à l'axe GQ .

4.° Si on prend sur l'ordonnée principale GL , de part & d'autre du point G , les parties GL , GH , l'une & l'autre $= \frac{a}{\sqrt{2}}$, & sur la droite Rf , qui est parallele à GL , aussi de part & d'autre du point R , les parties Rf , RF , l'une & l'autre $= \frac{a}{\sqrt{2}}$: les points L & H seront ceux où la courbe coupe l'ordonnée principale parallement à l'axe GQ , & les points f & F seront ceux où cette même courbe coupe Rf parallement à l'axe; Ensorte que les tangentes aux points L , H , f , F , sont toujours paralleles à l'axe GQ .

5.° Si on prend sur le diametre BD , de part & d'autre du point B , les parties Be , BE , l'une & l'autre $= \frac{1}{2}a$: si par les points e & E on mene parallement à l'axe GQ les droites $Ce\gamma$, $\phi E\delta$, sur lesquelles on prenne, de part & d'autre des points e & E , les parties eC , $e\gamma$, $E\phi$, $E\delta$; chacune égales à $\frac{1}{2} \sqrt{bb + aa}$, les points C , γ , seront ceux où la droite $Ce\gamma$ est coupée par la courbe $GaRMDLGARNCDG$ parallement à l'ordonnée principale GL , & les points ϕ & δ ceux où la droite $\phi E\delta$ est coupée par la même courbe $GaRMD$, &c. parallement à la même

ordonnée principale GL , enforte que les tangentes aux points \mathcal{C} , γ , ϕ , δ , sont paralleles à l'ordonnée principale GL .

6.° Toutes les droites menées parallelement aux ordonnées QM , au de-là des tangentes $\mathcal{C}T$, γt , par rapport au point e , ne rencontreront jamais la courbe $GaRMDLGARN\mathcal{C}\delta G$: mais comme $BR(\frac{1}{2}b)$ est toujours moindre que $E\phi$ ou $e\mathcal{C}(\frac{1}{2}\sqrt{bb+aa})$ il suit de tout ce qu'on a remarqué, que $\phi\delta$ ou son égale $\mathcal{C}\gamma = \sqrt{bb+aa}$ sont les *maxima* de la courbe par rapport à son axe.

7.° Toutes les droites menées parallelement à l'axe GQ , au de-là des points L & H , ne rencontreront jamais la courbe $GaRMDLGARN\mathcal{C}\delta G$, enforte que les points L & H seront les limites de la courbe par rapport à son ordonnée principale GL .

8.° Il suit des deux dernières remarques, que la courbe $GaRMDLGARN\mathcal{C}\delta G$ rentre en elle-même.

9.° Il est aisé de s'appercevoir que BD ou son égale $BC(\frac{1}{2}\sqrt{aa+\sqrt{a^4-b^4}})$ est toujours plus petit que RF ou $GL = \frac{a}{\sqrt{2}}$, & que Rf ou $GH = \frac{a}{\sqrt{2}}$; Ainsi la courbe, en allant de F en D , ou de f en C , s'est rapprochée de son axe, & en allant de D en L , ou de C en H , elle s'en est éloignée; De même on voit que la courbe, en allant de A en R , & de R en ϕ , s'éloigne toujours de son diametre DC , parce que $BR(\frac{1}{2}b) < E\phi(\frac{1}{2}\sqrt{bb+aa})$; mais que cette même courbe, en allant de ϕ en C , se rapproche toujours de ce même diametre DC , & ensuite s'en éloigne, en allant de C en δ , puis s'en rapproche, en allant de δ en G & en A : ce que je dis ici de la portion $AR\phi\mathcal{C}\delta GA$, doit s'entendre aussi de la portion $aR\mathcal{C}D\gamma Ga$.

10.° Enfin de tout ce qu'on a dit dans cet article, il est visible que la courbe $GaRMDLGARN\mathcal{C}\delta G$ forme deux especes de cœurs, $AR\phi\mathcal{C}\delta GA$ & $aR\mathcal{C}D\gamma Ga$, qui se noient ensemble aux points G & R . Ce qui m'engage à lui donner le nom de *Dicardie*.

AVERTISSEMENT.

Il y auroit encore bien des choses à remarquer au sujet de cette Dicardie ; mais comme ce n'est pas ici le lieu de traiter des différentes propriétés des Courbes qui composent le quatrième ordre , puisqu'il ne s'agit encore que des points doubles , je vais continuer les principes généraux.

SCHOLIE I.

LXXXI. Soit l'équation générale pour toutes les lignes du 4^{me} ordre, dont on a parlé dans l'art. 31 du premier Mémoire, dans laquelle z exprime les abscisses, & u les ordonnées de toutes ces courbes.

$$(4D) \dots \Delta u^4 + qz + A \times u^3 + \overline{Cz^2 + \gamma z + \delta \times u^2} + \overline{\epsilon z^3 + \eta z^2 + \lambda z + \mu \times u + \nu z^4 + \rho z^3 + \phi z^2 + \pi z + \sigma} = 0.$$

Si cette équation est telle, 1.^o Que les quatre racines du dernier membre égalé à zero ($\nu z^4 + \rho z^3 + \phi z^2 + \pi z + \sigma = 0$) étant réelles, deux de ces racines soient égales entre elles, & les deux autres aussi égales entre elles. 2.^o Si le pénultième membre est nul : ou bien, si les trois racines de ce pénultième membre, aussi égalé à zero ($\epsilon z^3 + \eta z^2 + \lambda z + \mu = 0$) étant réelles, deux de ces racines sont des diviseurs exacts du dernier membre ; Toutes les courbes, dont la nature sera exprimée par une telle équation, auront deux points doubles sur leur axe. Telles sont, par exemple, toutes les courbes dont la nature peut être exprimée par l'équation suivante,

$$\Delta u^4 + qz + A \times u^3 + \overline{Cz^2 + \gamma z + \delta \times u^2} + \overline{z^3 + 7Bz^2 + 14BBz + 8B^3 \times u} + \overline{z^4 + 6Bz^3 + 13B^2z^2 + 12B^3z + 4B^4} = 0;$$

parce que 1.^o le dernier membre égalé à zero ($z^4 + 6Bz^3 + 13B^2z^2 + 12B^3z + 4B^4 = 0$) a quatre racines réelles, $z = -B$, $z = -B$, $z = -2B$ & $z = -2B$, dont les deux premières sont égales entre elles & de mêmes

signes, & les deux dernières sont aussi égales entre elles & de mêmes signes. 2.^o Parce que dans cette même équation le pénultième membre ($z^3 + 7Bz^2 + 14B^2z + 8B^3 = 0$) aussi égalé à zero, a trois racines réelles, $z = -B$, $z = -2B$ & $z = -4B$, dont les deux premières sont des diviseurs exacts du dernier membre ($z^4 + 6Bz^3 + 13B^2z^2 + 12B^3z + 4B^4$). Ceci n'étant qu'une suite nécessaire de ce qui a été démontré dans les articles précédents, il est inutile de s'y arrêter davantage.*

* Voyez l'art.
51 du premier
Mémoire.

S C H O L I E I I.

* Art. précéd.

LXXXII. Si l'équation générale marquée ($4D$) * a toutes les conditions requises par l'article précédent, & outre cela si les coefficients δ , μ & π de cette équation sont tels que (g étant une grandeur positive ou négative déterminée par l'équation) l'on ait $\delta = 2Ag - 3\Delta g^2$

$$+ \frac{\sigma}{gg}, \mu = Agg - 2\Delta g^3 + \frac{2\sigma}{g} \text{ \& } \pi = \lambda g - \gamma g^2 + qg^3;$$

* Art. précéd.

par l'équation marquée par ($4D$) *, auront trois points doubles : sçavoir, deux sur leur axe, à cause des conditions de l'article précédent, & un troisième sur leur ordonnée principale en un point B , distant de l'origine G des indéterminées de la grandeur $GB = -g$. Ceci n'est encore qu'une suite évidente des principes qu'on a établis jusqu'ici.*

* Art. 51 du
prem. Mémoire.

C O R O L L A I R E.

LXXXIII. Donc les lignes du 4^{me} ordre peuvent avoir trois points doubles, & il est aisé, en suivant les regles qui ont été données dans les art. 63 & 72, de connoître la nature de ce troisième point double : c'est-à-dire, de connoître s'il est ou un point d'intersection de deux branches, ou un point de rebroussement, ou une ovale infiniment petite conjuguée.

E X E M P L E I.

* Fig. 48.

LXXXIV. Soit la courbe $MRBKEVCR \phi BV_m$ * telle que le rapport des abscisses GQ (z) aux ordonnées QM (u) soit exprimé par l'équation suivante :

$$2bu^3 + 3b^2u^2 - z^4 + 2b^2z^2 - b^4 = 0;$$

Puisque le dernier membre égalé à zero ($z^4 - 2b^2z^2 + b^4 = 0$) a quatre racines réelles, $z = -b$, $z = -b$, $z = b$ & $z = b$, dont les deux premières sont égales entre elles & de mêmes signes, & les deux dernières aussi égales entre elles & de mêmes signes : puisque le pénultième membre ($\varepsilon z^3 + \eta z^2 + \lambda z + \mu$) est nul, il est clair * que cette * *Art. 81.* courbe a deux points doubles sur son axe GQ , dont le 1^{er} est distant de G , origine des abscisses & des ordonnées de la grandeur $GR = b$, & le 2^d distant de G de la grandeur $GV = -b$. *Ce qu'il falloit faire voir en premier lien par cet Exemple.*

Mais outre cela cette courbe (par l'art. 82.) a un 3^{me} point double sur son ordonnée principale en un point B distant de G (origine des indéterminées) de la grandeur $GB = -g = -b$. Car après avoir comparé les termes de cette équation particulière avec ceux de l'équation générale marquée (4 D) dans l'art. 81, on a $\Delta = 0$, $q = 0$, $A = 2b$, $C = 0$, $\gamma = 0$, $\varepsilon = 0$, $\eta = 0$, $\lambda = 0$, $\nu = -1$, $\rho = 0$, $\phi = 2bb$, $\sigma = -b^4$; & ensuite $\delta = 3bb$, $\mu = 0$, & $\pi = 0$. D'où il suit que les coefficients δ , μ & π sont tels qu'il est requis par l'art. 82, c'est-à-dire, qu'ils sont $\pi = \lambda g - \gamma g^2 + qg^3$, $\mu = Agg - 2\Delta g^3 + \frac{2\sigma}{g}$, & $\delta = 2Ag - 3\Delta g^2 + \frac{\sigma}{gg}$: car 1.^o il est visible que $\pi = \lambda g - \gamma g^2 + qg^3$, puisque la comparaison des termes a donné $\lambda = 0$, $\gamma = 0$, & $q = 0$; 2.^o puisque cette même comparaison des termes a donné $\mu = 0$, il est visible que la supposition de μ égal à $Agg - 2\Delta g^3 + \frac{2\sigma}{g}$, donne $Agg - 2\Delta g^3 + \frac{2\sigma}{g} = 0$, & qu'en substituant dans cette formule, au lieu de A , Δ & σ , leurs valeurs déjà trouvées, il vient $2bg^2 - \frac{2b^4}{g} = 0$, d'où l'on tire $g = b$. 3.^o Il n'est pas moins évident, qu'en substituant dans la formule $(2Ag - 3\Delta g^2 + \frac{\sigma}{gg})$, ou, ce qui est la même chose, dans la formule $(4bg - \frac{b^4}{gg})$ au lieu de l'inconnue (g) sa valeur (b) qui vient d'être trouvée : il est, dis-je, évident que cette grandeur devient

$= 3bb$, qui est précisément la valeur qu'on a trouvée par la comparaison des termes pour le coefficient δ , enforte que ce coefficient δ est, dans cet exemple, $= 2Ag - 3\Delta g^2 + \frac{\sigma}{gg}$.

Donc les trois coefficients δ , μ & π , ont dans l'équation $2bu^3 + 3bbu^2 - z^4 + 2b^2z^2 - b^4 = 0$, les conditions requises par l'art. 82. Donc cette équation exprime la nature d'une courbe, qui (outre les deux points doubles qu'elle a sur son axe par l'art. 81) en a encore un troisième sur son ordonnée principale GL en un point B distant de G , origine des indéterminées, de la grandeur $GB = -g = -b$. *Ce qu'il falloit faire voir en second lieu par cet Exemple.*

Maintenant pour connoître la nature de ces trois points doubles, on différenciera deux fois son équation, & l'on aura, après la seconde différenciation, $\frac{du}{dz} = \pm \sqrt{\frac{6z^2 - 2b^2}{6bu + 3b^2}}$.

* Par la première partie de cet article.

Donc au point double R , où $*z = b$, & $u = 0$, on a $\frac{du}{dz} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$. Donc ce point double R est une intersection

* Idem.

* Art. 63. & $u = 0$, on a $\frac{du}{dz} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$. D'où il suit * que ce point

* Par la seconde part. de cet art.

* Art. 63.

double est encore une intersection de deux branches. Enfin au troisième point double B , où $*z = 0$, & $u = -b$, on a $\frac{du}{dz} = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Donc * ce troisième point double est encore une intersection de deux branches. Ainsi avant de supposer la courbe décrite sur le plan, on connoît, par le moyen de son équation, non-seulement qu'elle a trois points doubles, mais encore que ces trois points doubles sont trois points d'intersection. *Ce qu'il falloit faire voir en troisième lieu par cet Exemple.*

R E M A R Q U E S.

LXXXV. On remarquera 1.^o que l'ordonnée principale GL est toujours le diametre de la courbe, puisque l'on a

$$z = \pm \sqrt{bb \pm u \sqrt{2bu + 3bb}}.$$

2.^o Si l'on prend sur cette ordonnée principale, du côté

où les (u) sont positifs, le point C , tel que GC soit $= \frac{1}{2}b$, le point C sera celui où la courbe rencontrera l'ordonnée principale parallèlement à l'axe GQ .

3.^o Si par le point double B on tire parallèlement à l'axe une droite EBF , & si l'on prend sur cette droite, de part & d'autre du point B , les points E & F , tels que BE ou BF soient l'une & l'autre $= b\sqrt{2}$: ces points E & F seront les points de la courbe où les tangentes deviennent parallèles à l'ordonnée principale GL .

4.^o En prenant sur l'ordonnée principale GL , du côté où les (u) sont négatifs, le point A , tel que BA soit $= \frac{1}{2}b$: si par ce point A , on mène parallèlement à l'axe une droite $KA\phi$, & si l'on prend sur cette droite, de part & d'autre du point A , les points K & ϕ , tels que KA & $A\phi$ soient l'une & l'autre $= b$: les points K & ϕ sont ceux où cette droite $KA\phi$ touche la courbe $MRBKEVC\phi BVm$.

5.^o Toutes les droites, menées parallèlement à l'ordonnée principale entre les points E & F , rencontrent la courbe en trois points. Mais celles qui sont menées, parallèlement à l'ordonnée principale, au de-là des points E & F , par rapport au point B , ne rencontrent la courbe qu'en un point. D'où il suit 1.^o Que cette courbe a deux branches qui s'étendent à l'infini du même côté par rapport à l'axe, & de part & d'autre de l'ordonnée principale GL . 2.^o Que les portions de cette courbe qui se noient avec les branches infinies, aux points doubles R, B, V , ne s'étendent pas au de-là des points E & F le long de l'axe GQ .

6.^o Toutes les droites, menées parallèlement à l'axe GQ entre les points C & A , rencontrent la courbe en quatre points. Mais celles qui sont menées parallèlement à l'axe au de-là du point C , par rapport au point G , ne rencontrent la courbe qu'en deux points, & celles qui sont menées parallèlement à l'axe au de-là du point A , par rapport au point G , ne rencontrent pas la courbe. D'où il suit, 1.^o que cette courbe ne s'étend pas au de-là du point A , du côté où les (u) sont négatifs, & que les points K & ϕ sont les limites de ce côté-là : 2.^o Que

les portions de cette courbe, qui se noient avec les branches infinies aux points doubles R, B, V , ne s'étendent pas au de-là du point C le long de l'ordonnée principale GL .

7.^o De tout ce qui vient d'être dit, il est aisé de voir que la courbe $MRBKEVCR \phi BVm$ est composée de deux branches infinies qui se noient aux trois points R, B, V en formant une espece de Las-d'amour, ce qui pourroit lui faire donner le nom de *Parabole Lemniscerotique*.

E X E M P L E I I.

* Fig. 49.

LXXXVI. Soit la courbe $ERB\mu fVAe\xi BVF\phi H\pi E^*$, dont la nature est exprimée par $u^4 - \frac{4}{3}bu^3 - 4b^2u^2 + z^4 - \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}b^2z^2 + \frac{5}{3}b^4 = 0$. Je dis que cette courbe a trois

* Art. 81.

points doubles, R, V, B , qui sont trois points d'intersections. 1.^o Il est visible* qu'elle a deux points doubles sur son axe, puisque le dernier membre de cette équation égalé à zero ($z^4 - \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}b^2z^2 + \frac{5}{3}b^4 = 0$) a quatre racines réelles;

$$z = \frac{b\sqrt{\sqrt{5}}}{\sqrt{\sqrt{3}}}, z = \frac{b\sqrt{\sqrt{5}}}{\sqrt{\sqrt{3}}}, z = -\frac{b\sqrt{\sqrt{5}}}{\sqrt{\sqrt{3}}} \text{ \& } z = -\frac{b\sqrt{\sqrt{5}}}{\sqrt{\sqrt{3}}};$$

dont les deux premières sont égales & de mêmes signes, & les deux dernières aussi égales entre elles & de mêmes signes, &

enfin parce que le pénult. membre ($\epsilon z^3 + \eta z^2 + \lambda z + \mu \times u$) est nul. *Ce qu'il falloit faire voir en premier lieu par cet Exemple.*

* Art. 82.

2.^o Il est visible* qu'elle a un troisième point double sur son ordonnée principale GL en un point B distant de G (origine des indéterminées) de la grandeur $GB = -g = -b$. Car en comparant l'équation particulière de cette courbe avec l'équation générale marquée par (4D) dans l'art. 81; on a $\Delta = 1, q = 0, A = -\frac{4}{3}b, C = 0, \gamma = 0, \delta = -4bb, \epsilon = 0, \eta = 0, \lambda = 0, \mu = 0, \nu = 1, \rho = 0, \phi = -\frac{2b^2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}, \pi = 0$ & $\sigma = \frac{5}{3}b^4$, ce qui donne 1.^o $\lambda g - \gamma g^2 + qg^3 = 0 = \tau$: & c'est une des trois conditions requises par l'art. 82: 2.^o L'on a aussi ($Agg - 2\Delta g^3 + \frac{2\sigma}{g}$), ou, ce qui est

est la même chose, $-\frac{4}{3}bgg - 2g^3 + \frac{10b^4}{3g} = \mu = 0$,
 (puisque $\mu = 0$), & cette seconde condition donne $g = b$;
 3.^o enfin cette valeur de g étant substituée dans la formule
 $2Ag - 3\Delta g^2 + \frac{\sigma}{gg}$, ou, ce qui est la même chose, dans
 son égale $-\frac{8}{3}bg - 3g^2 + \frac{5b^4}{3gg}$, il vient $(-4bb)$ qui est
 précisément la valeur trouvée, par la comparaison des termes,
 pour le coefficient Δ : d'où il suit que ce coefficient Δ est,
 dans cet exemple, $= 2Ag - 2\Delta g^2 + \frac{\sigma}{gg}$. Donc les trois
 coefficients Δ , μ & π , ont, dans l'équation $u^4 - \frac{4}{3}bu^3$
 $- 4b^2u^2 + z^4 - \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}bbz^2 + \frac{5}{3}b^4 = 0$, toutes les
 conditions requises par l'article 82. Donc la courbe ERB
 $\mu fVAe\xi BVF\phi H\pi E$, dont la nature est exprimée par
 cette équation, a trois points doubles R , V , B , les deux
 premiers sur son axe GQ en des points R & V distants de G
 (origine des indéterminées) des grandeurs $GR = b\sqrt[4]{\frac{5}{3}}$ &
 $GV = -b\sqrt[4]{\frac{5}{3}}$, & le troisième sur son ordonnée princi-
 pale GL , en un point B , distant du point G de la grandeur
 $GB = -b$. *Ce qu'il falloit faire voir en second lieu par cet*
Exemple.

Pour connoître la nature de ces trois points doubles, il
 faut * différencier deux fois l'équation $u^4 - \frac{4}{3}bu^3 - 4b^2u^2$ * *Art. 52.*
 $+ z^4 - \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}bbz^2 + \frac{5}{3}b^4 = 0$, & la seconde diffé-

rentiation donnera $\frac{du}{dz} = \pm \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}b^2 - 3z^2}}{\sqrt{3uu - 2b\pi - 2bb}}$. Ensorte

qu'au point double R , où * $u = 0$ & $z = b\sqrt[4]{\frac{5}{3}}$, on a $\frac{du}{dz}$ * *Prem. partie*
 $= \pm \sqrt[4]{\frac{5}{3}}$; d'où il suit * que ce point double est un point * *Art. 63.*
 d'intersection de deux branches. De même au point double V ,
 où * $u = 0$ & $z = -b\sqrt[4]{\frac{5}{3}}$, on a $\frac{du}{dz} = \pm \sqrt[4]{\frac{5}{3}}$; d'où il * *Prem. partie*
 suit que ce point double V * est encore une intersection de * *Art. 63.*
Mem. 1730. . Eee

* *Seconde part. de cet article.* deux branches. Enfin au point double B , où $* z = 0$ &

* *Art. 63.* $u = -b$, on a $\frac{du}{dz} = \pm \frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[3]{3} \sqrt[3]{3}}$, ce qui fait voir * que ce

point double B est une troisième intersection. Donc avant de supposer la courbe décrite sur le plan, on est assuré non seulement qu'elle a trois points doubles, mais encore que ces trois points doubles sont trois points d'intersection, & l'on connoît leurs positions, par rapport à l'axe & à l'ordonnée principale. *Ce qu'il falloit faire voir en 3^{me} lieu par cet Exemple.*

REMARQUES.

* *Fig. 49.* LXXXVII. Je ne m'arrête point ici à construire les tangentes de la courbe * $ERB\mu fVAe\xi BVF$ aux points doubles B, R, V , parce qu'il n'y a rien de si facile, dès le moment qu'on a les rapports, des ordonnées de la courbe, en ces points, aux soutangentes qui leur correspondent. Mais pour donner quelque idée de cette courbe, je remarquerai,

1.^o Que l'ordonnée principale GL est son diamètre, puisque

l'on a toujours $z = \pm \sqrt{\frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[3]{3}}} bb \pm u \sqrt{4b^2 + \frac{4}{3}bu - uu}$.

2.^o Qu'en prenant sur l'ordonnée principale GL , du côté où les (u) sont positifs, les points A & H , tels que GA soit $= \frac{5}{3}b - \frac{1}{3}b\sqrt{10}$, & $GH = \frac{5}{3}b + \frac{1}{3}b\sqrt{10}$, on aura les points où la courbe coupe son ordonnée principale parallèlement à son axe.

3.^o En prenant sur l'ordonnée principale GL la partie $GC = \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}b\sqrt{10}$, & $GD = \frac{2}{3}b - \frac{2}{3}b\sqrt{10}$, si par les points C & D ainsi trouvés, on tire les droites $\phi C\pi$; $\mu D\xi$, parallèles à l'axe GQ , sur lesquelles on prenne, de part & d'autre des points C & D , les parties $C\phi$, $C\pi$, & $D\mu$, $D\xi$; les unes & les autres $= b\sqrt[4]{\frac{5}{3}}$: les points ϕ , π , μ & ξ seront les quatre points, de la courbe, où les tangentes sont parallèles à l'axe.

4.° Si par le point double B on mène, parallèlement à l'axe GQ , une droite fBe , sur laquelle on prenne, de part & d'autre du point B , les parties Bf , Be , l'une & l'autre

$$= \frac{b\sqrt{2\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} : \text{les points } f \text{ \& } e \text{ seront ceux où la courbe a}$$

des tangentes parallèles à l'ordonnée principale GL .

5.° Après avoir pris sur l'ordonnée principale GL , du côté où les (u) sont positifs, le point I , tel que GI soit $= 2b$: si l'on mène, par ce même point I , une droite EIF parallèle à l'axe GQ , sur laquelle on prenne, de part & d'autre du

$$\text{point } I, \text{ les portions } IE, IF, \text{ l'une \& l'autre } = \frac{b\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{32}}}{\sqrt{3}} :$$

les points E & F seront deux autres points, de la courbe, où les tangentes sont parallèles à l'ordonnée principale GL .

6.° Toutes les droites menées, parallèlement à l'axe, au de-là des points C & D , par rapport au point G , ne rencontrent la courbe en aucun point ; De même toutes les droites menées, parallèlement à l'ordonnée principale, au de-là des points E & F , par rapport à cette ordonnée principale GL , ne rencontrent pas la courbe. D'où il suit que cette courbe ne s'étend pas au de-là des points ϕ & π , ni au de-là des points μ & ξ , le long de son ordonnée principale : & que, par rapport à son axe, elle ne s'étend pas au de-là des points E & F ; Enforte qu'elle est rentrante en elle-même.

7.° De-là il est aisé de conclure, que les droites $\phi\mu$, $\pi\xi$, (l'une & l'autre, $= \frac{2}{3}b\sqrt{10}$) sont les *maxima* parallèles à l'ordonnée principale, & la droite $EF = \frac{2b\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{32}}}{\sqrt{3}}$, son *maximum* parallèle à l'axe.

8.° On remarquera encore, que toutes les droites menées parallèlement à l'axe, entre les points A & D , rencontrent la courbe en quatre points, aussi-bien que toutes les droites menées, parallèlement à l'axe, entre les points H & C ; Mais celles qui seroient menées, parallèlement à ce même

axe GQ , entre les points A & H , ne rencontreroient la courbe qu'en deux points.

9.° On remarquera aussi, que toutes les droites menées, parallèlement à l'ordonnée principale GL , entre les points f & e , rencontrent toujours la courbe en quatre points : en comptant chaque point double R , B , V , pour deux points simples.

10.° De tout ce qui vient d'être dit, & de ce que GH ($\frac{5}{3}b + \frac{1}{3}b\sqrt{10}$) < GC ($\frac{2}{3}b + \frac{2}{3}b\sqrt{10}$), il est aisé de voir, 1.° Que la courbe en question représente, du côté où les (u) sont positifs, la figure d'un cœur $BE\pi H\phi FB$, dont la pointe est en B & le sommet du milieu en H ; 2.° Que la distance, du sommet H aux sommets ϕ & π , des oreillettes $H\phi F$, $H\pi E$, est $HC = \frac{1}{3}b\sqrt{10} - b$, & $C\phi$ ou $C\pi = \pm \frac{b\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$.

11.° De ce que $GB(b) < GD(-\frac{2}{3}b + \frac{2}{3}b\sqrt{10})$ il est aisé de voir, 1.° Que cette même courbe forme une autre espèce de cœur $Af\mu B\xi eA$, dont la base est en A , & le sommet en B ; 2.° Que la distance de ce sommet B aux sommets μ & ξ , des oreillettes $B\mu f$, $B\xi e$, est $BD = \frac{2}{3}b\sqrt{10} - \frac{5}{3}b$, & $D\mu$ ou $D\xi = \pm b\sqrt{\frac{5}{3}}$.

12.° Enforte que cette courbe est composée de deux cœurs $BRE\pi H\phi FVB$, & $AReB\mu fVA$, qui s'unissent au point double B , & se coupent, par leurs parties latérales, aux points R & V , ce qui lui procure les trois points doubles qui m'ont engagé de la donner ici pour exemple. On peut lui appliquer le nom de *Dicardie*, à cause des deux cœurs qu'elle représente : mais, pour la distinguer de celle dont il est parlé dans l'art. 78, il est à propos de la nommer *seconde Dicardie*.

E X E M P L E I I I.

➤ Fig. 50.

LXXXVIII. Soit la courbe $MERAVFmNRBV_n^*$, dans laquelle le rapport des abscisses GQ (z) aux ordonnées QM (u) est exprimé par l'équation suivante

$$u^4 - \frac{8b}{\sqrt{3}\sqrt{3}}u^3 + 2bbu^2\sqrt{3} - z^4 + 2b^2z^2 - b^4 = 0.$$

Il est visible, 1.^o que cette courbe a deux points doubles sur son axe GQ en des points R & V , distans de G , origine des abscisses & des ordonnées, des grandeurs $GR = b$, & $GV = -b$. Car outre, que le dernier membre de cette équation égalé à zero ($z^4 - 2b^2z^2 + b^4 = 0$) a quatre racines réelles $z = b$, $z = b$, $z = -b$ & $z = -b$, dont les deux premières sont égales & de mêmes signes, & les deux dernières aussi égales & de mêmes signes, il est clair que le penultième membre ($\epsilon z^3 + \eta z^2 + \lambda z + \mu$) est nul : donc * *Art. 81.* cette courbe doit avoir deux points doubles sur son axe GQ .
Ce qu'il falloit faire voir en premier lieu.

2.^o Il n'est pas moins évident * qu'elle a un troisième * *Art. 82.* point double B sur son ordonnée principale GL . Car la comparaison des termes de l'équation donnée, avec ceux de l'équation générale marquée par (4 D) dans l'art. 81, donne

$$\Delta = 1, q = 0, A = -\frac{8b}{\sqrt{3}\sqrt{3}}, C = 0, \gamma = 0, \delta = 2bb\sqrt{3},$$

$$\epsilon = 0, \eta = 0, \lambda = 0, \mu = 0, \nu = -1, \rho = 0, \Phi = 2bb, \pi = 0, \text{ \& } \sigma = -b^4. \text{ Cela posé, il est visible, 1.^o Que } \lambda g - \gamma g^2 + qg^3 = \pi = 0, \text{ ce qui est déjà une des conditions de l'art. 82 ; 2.^o Outre cela } Agg - 2\Delta g^3 + \frac{2\sigma}{g}, \text{ ou, ce qui est la}$$

$$\text{même chose } \left(-\frac{8bg^2}{\sqrt{3}\sqrt{3}} - 2g^3 - \frac{2b^4}{g} \right) \text{ étant égalé à } \mu, \text{ on}$$

$$\text{a } \frac{8bg^2}{\sqrt{3}\sqrt{3}} + 2g^3 + \frac{2b^4}{g} = 0, \text{ ou } g^4 + \frac{4bg^3}{\sqrt{3}\sqrt{3}} + b^4 = 0,$$

$$\text{d'où l'on tire } g = -b\sqrt[4]{3} : 3.^o Cette valeur de g étant substituée, dans la formule $(2Ag - 3\Delta g^2 + \frac{\sigma}{gg})$, ou, ce$$

$$\text{qui est la même chose, dans son égale } \left(-\frac{16b}{\sqrt{3}\sqrt{3}}g - 3g^2 - \frac{b^4}{gg} \right)$$

il vient $(2bb\sqrt{3})$ qui est précisément la valeur trouvée, par la comparaison des termes, pour le coefficient δ : D'où il suit

$$\text{que l'équation donnée } u^4 - \frac{8b}{\sqrt{3}\sqrt{3}}u^3 + 2bbu^2\sqrt{3} - z^4$$

$+2b^2z^2 - b^4 = 0$, a toutes les conditions requises, par l'art. 82, pour exprimer la nature d'une ligne du 4^{me} ordre qui ait trois points doubles, deux sur son axe en des points R & V , distants de G (origine des abscisses) de la grandeur $GR=b$ & $GV=-b$, & un troisième sur son ordonnée principale GL , en un point B , distant de G de la grandeur $GB=-g=b\sqrt[4]{3}$. *Ce qu'il falloit faire voir en second lieu.*

3.^o Pour connoître la nature des trois points doubles de
* Art. 52. cette courbe, il faut * différentier deux fois son équation ; la

$$2^{\text{de}} \text{différentiation donnera } \frac{du}{dz} = \pm \frac{\sqrt{bb-3zz}}{\sqrt[4]{4bu\sqrt[4]{3}-3u^2-bb\sqrt[4]{3}}}$$

Ensorte qu'au point double R , ou (par la première partie de cet article) $u=0$, & $z=b$, on a $\frac{du}{dz} = \pm \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{3}}$: ce qui

* Art. 63. fait voir * que ce point double R est un point d'intersection. De même au point double V , ou (par la première partie de cet article) $u=0$ & $z=-b$, on a $\frac{du}{dz} = \pm \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{3}}$: ce

* Art. id. qui fait voir * que ce point double V est encore un point d'intersection. Enfin au point double B , ou (par la seconde partie de cet article) $z=0$ & $u=b\sqrt[4]{3}$, on a $\frac{du}{dz} =$

* Art. id. $\pm \frac{b}{0} = \frac{b}{0}$: ce qui fait voir * que les deux tangentes au point double B se confondent en une & avec l'ordonnée principale GL , & par conséquent que ce point double B est un point de rebroussement auquel l'ordonnée principale GL est tangente. Donc avant de supposer la courbe décrite sur le plan, on connoît non-seulement qu'elle a trois points doubles, mais encore quelle est la nature de ces trois points doubles. *Ce qu'il falloit faire voir en 3^{me} lieu par cet Exemple.*

REMARQUES.

LXXXIX. On peut remarquer ici, 1.^o Que l'ordonnée principale GL est le diamètre de la courbe

M E R A V F m N R B V n, puisque l'on a toujours

$$z = \pm \sqrt{bb \pm u \sqrt{uu - \frac{8b}{\sqrt{3}\sqrt{3}}u + 2bb\sqrt{3}}}.$$

2.° Si l'on prend sur l'ordonnée principale *GL*, du côté où les (*u*) sont négatifs, le point *A*, tel que *GA* soit $= \frac{b}{\sqrt{3}\sqrt{3}}$, ce point *A* sera le point de la courbe où la tangente devient parallèle à l'axe.

3.° Si, par le point de rebroussement *B*, on mène, parallèlement à l'axe *GQ*, une droite *EBF*: si l'on prend sur cette droite, de part & d'autre du point *B*, les parties *BE*, *BF*, l'une & l'autre $= b\sqrt{2}$: les points *E* & *F* seront deux points d'inflexion de la courbe, dont les tangentes seront parallèles à l'ordonnée principale *GL*.

4.° Toutes les droites menées, parallèlement à l'axe, entre les points *A* & *B*, rencontrent la courbe en quatre points; Mais les droites menées, parallèlement à ce même axe *GQ*, au de-là des points *A* & *B*, par rapport au point *G*, ne rencontrent la courbe qu'en deux points, & la rencontrent toujours en deux points, à quelque distance qu'elles soient des points *A* & *B*, soit du côté des (*u*) négatifs, soit du côté des (*u*) positifs.

5.° Toutes les droites, menées parallèlement à l'ordonnée principale *GL*, entre les points *B* & *E*, ou entre les points *B* & *F*, ou au de-là des points *E* & *F*, par rapport au point *B*, ne rencontrent jamais la courbe qu'en deux points *M* & *N*, dont il y en a toujours un du côté des (*u*) positifs, & un du côté des (*u*) négatifs.

6.° De tout ce qu'on a remarqué jusqu'ici, il est aisé de comprendre, 1.° Que la courbe *M E R A V F m N R B V n* est composée de quatre branches infinies *AREM*, *AVFm*, *BRN*, *BVn*, dont les deux premières *AREM*, *AVFm*, s'étendent à l'infini au-dessus de l'axe *GQ*, c'est-à-dire, du côté où les (*u*) sont positifs, & les deux dernières au-dessous de cet axe, du côté où les (*u*) sont négatifs. 2.° Que les deux

408 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 premières branches $AREM$, $AVFm$ s'unissent en A , som-
 met d'une sinuosité dont la tangente est parallèle à l'axe. 3.°
 Que les deux dernières branches NRB , nVB s'unissent en B
 par un point de rebroussement, dont la tangente se confond
 avec l'ordonnée principale. 4.° Que la première & troisième
 branche $ARFM$, NRB , se coupent, sur l'axe GQ , en un
 point R , où elles forment par conséquent un point d'inter-
 section. 5.° Que la seconde branche $AVFm$ coupe la qua-
 trième branche nVB , sur l'axe GQ , en un point V , où il se
 trouve par conséquent un second point d'intersection. 6.° Que
 les deux premières branches $AREM$, $AVFm$, ont cha-
 cune un point d'inflexion, l'une en E , l'autre en F ; D'où il
 suit, que ces deux branches, après avoir été concaves vers
 leur ordonnée principale GL , de A en E , & de A en F ,
 deviennent ensuite, l'une & l'autre, convexes vers cette même
 ordonnée principale GL . 7.° Enfin il est aisé de comprendre
 que les deux dernières branches BRN , BVn , sont toujours
 convexes vers leur ordonnée principale GL .

PROPOSITION VII.

PROBLEME.

XC. Une ligne du 4^{me} ordre étant donnée, trouver si elle a
 des points doubles; Ou, ce qui est la même chose, l'Équation
 algébrique d'une ligne du 4^{me} ordre étant donnée, connoître si
 cette équation exprime la nature d'une courbe qui ait des points
 doubles, & trouver les valeurs des abscisses & des ordonnées, de
 la courbe en question, correspondantes à ces points doubles.

SOLUTION.

Soit donnée l'équation générale pour toutes les lignes du
 4^{me} ordre, dont on a parlé dans le premier Mémoire & dans
 l'art. 81 de celui-ci. Elle est désignée ici par $(4D)$.

$$(4D) \dots \Delta u^4 \left. \begin{array}{c} + 2\gamma z \\ + a \end{array} \right\} u^3 \left. \begin{array}{c} + 6\gamma z^2 \\ + 2\gamma z \\ + d \end{array} \right\} u^2 \left. \begin{array}{c} + 2\gamma z^3 \\ + 4\gamma z^2 \\ + \lambda \gamma z \\ + \mu \end{array} \right\} u \left. \begin{array}{c} + \gamma z^4 \\ + \rho \gamma z^3 \\ + \phi \gamma z^2 \\ + \pi \gamma z \\ + \sigma \end{array} \right\} = 0.$$

Après

Après avoir différencié cette équation, on aura le rapport des (dz) aux (du) exprimé par la fraction marquée ici par (F)

$$(F) \dots \frac{du}{dz} = \frac{-qu^3 - [2\epsilon z + \gamma \times u^2 - [3\epsilon z^2 + 2\eta z + \lambda \times u - 4\nu z^2 - 3\rho z^2 - 2\varphi z - \pi]}{4\Delta u^3 + 3qz + 3a \times u^2 + 2\epsilon z^2 + 2\gamma z + 2\delta \times u + \epsilon z^2 + \eta z^2 + \lambda z + \mu}$$

dont le numérateur & le dénominateur s'évanouissent par tout où il y a des points doubles.

Soient de plus les équations suivantes marquées par (A) & par (B) , qui ne diffèrent, la première du numérateur de la fraction (F) égalé à zero, la seconde du dénominateur de la même fraction, aussi égalé à zero, qu'en ce que l'indéterminée (y) s'y trouve au lieu de l'indéterminée (u) . Ces deux équations se rapportent à deux courbes, que je nomme *Auxiliaires*.

$$(A) \dots \dots qy^3 \begin{matrix} + 2\epsilon z \\ + \gamma \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} + 2\epsilon z \\ + \gamma \end{matrix}} \right\} y^2 \begin{matrix} + 3\epsilon z^2 \\ + 2\eta z \\ + \lambda \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} + 3\epsilon z^2 \\ + 2\eta z \\ + \lambda \end{matrix}} \right\} y \begin{matrix} + 4\nu z^2 \\ + 3\rho z^2 \\ + 2\varphi z \\ + \pi \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} + 4\nu z^2 \\ + 3\rho z^2 \\ + 2\varphi z \\ + \pi \end{matrix}} \right\} = 0.$$

$$(B) \dots 4\Delta y^3 \begin{matrix} + 3qz \\ + 3a \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} + 3qz \\ + 3a \end{matrix}} \right\} y^2 \begin{matrix} + 2\epsilon z^2 \\ + 2\gamma z \\ + 2\delta \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} + 2\epsilon z^2 \\ + 2\gamma z \\ + 2\delta \end{matrix}} \right\} y \begin{matrix} + \epsilon z^2 \\ + \eta z^2 \\ + \lambda z \\ + \mu \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} + \epsilon z^2 \\ + \eta z^2 \\ + \lambda z \\ + \mu \end{matrix}} \right\} = 0.$$

L'équation marquée par (A) exprime la nature d'une ligne qui n'excede jamais le 3^{me} ordre, mais qui peut être au dessous, dont l'axe est celui de la courbe désignée par l'équation $(4D)$ & dont les abscisses sont communes à l'une & à l'autre courbe. L'équation marquée par (B) exprime aussi la nature d'une ligne qui n'excede jamais le 3^{me} ordre, dont l'axe est celui des courbes désignées par les équations (A) & $(4D)$, & dont les abscisses sont communes aux trois courbes.

Cela posé, il est constant 1.^o que les courbes auxiliaires, désignées par les équations (A) & (B) peuvent se rencontrer en différents points, & qu'aux points de rencontre, les ordonnées qui y aboutissent, sont communes & à la courbe désignée par l'équation (A) & à la courbe désignée par l'équation (B) .

2.^o Il n'est pas moins évident, qu'en substituant dans l'équation (A) , au lieu de l'indéterminée (y) , sa valeur (en z & en constante) prise de l'équation (B) , on aura une égalité dans laquelle il n'y aura plus d'autre indéterminée que (z) , dont les racines réelles donneront les valeurs des abscisses, (communes à l'une & à l'autre courbe auxiliaire) correspondantes aux points de rencontre des deux courbes.

* n.^o 2 de
cet article.

3.^o En substituant ensuite dans l'équation (B) , au lieu de l'indéterminée (z) , les valeurs (en constantes) prises des racines réelles de l'égalité dont on vient de parler*, il est visible qu'on aura de nouvelles égalités, dans lesquelles il n'y aura d'autre indéterminée que (y) , dont les racines réelles exprimeront les valeurs des ordonnées communes aux deux courbes auxiliaires, c'est-à-dire, les valeurs des ordonnées correspondantes aux points de rencontre de ces deux courbes.

Ainsi, on aura les valeurs des abscisses & des ordonnées, des courbes auxiliaires, aux points où ces deux courbes se rencontrent : ou, ce qui est la même chose, on aura les points de rencontre de ces deux courbes.

4.^o Maintenant, si un ou plusieurs points de rencontre, des courbes désignées par les équations (A) & (B) , tombent sur la ligne du 4^{me} ordre désignée par l'équation $(4 D)$, je dis que les endroits de la ligne du 4^{me} ordre où tomberont les points de rencontre des courbes auxiliaires, seront autant de points doubles de cette ligne du 4^{me} ordre. Car ces points étant alors communs aux trois lignes désignées par les équations (A) , (B) , $(4 D)$, les ordonnées qui y correspondent seront communes aux trois courbes : Donc, dans ces cas, l'indéterminée (y) , qui dans les équations (A) & (B) désigne les ordonnées des deux courbes auxiliaires, sera égale à l'indéterminée (u) de l'équation $(4 D)$, ou, ce qui est la même chose, à l'indéterminée (u) de la fraction marquée par (F) . Or comme les équations (A) & (B) s'évanouissent, lorsqu'on y substitue, au lieu de (z) & de (y) , leurs valeurs trouvées pour les points de rencontre des courbes auxiliaires (ce qui est évident par les premiers principes de l'Algebre) : il est visible que

les numérateur & dénominateur de la fraction (F) s'évanouissent dans tous les cas où u est $= y$; Et par conséquent que les points de rencontre des courbes auxiliaires, qui tombent sur la ligne du 4^{me} ordre, y désignent autant de points doubles.

Donc, après avoir trouvé, de la manière qu'on l'a expliquée ci-dessus*, les valeurs des abscisses & des ordonnées, des courbes auxiliaires désignées par les équations (A) & (B) , aux points où ces deux courbes se rencontrent : on substituera successivement dans l'équation $(4D)$, au lieu de l'indéterminée (u) , les différentes valeurs de l'indéterminée (y) , & en même temps la valeur correspondante de l'indéterminée (z) : si une ou plusieurs des substitutions font évanouir tous les termes de l'équation $(4D)$, la ligne du 4^{me} ordre, dont cette équation exprime la nature, aura un ou plusieurs points doubles, & les valeurs des (y) & des (z) correspondants, qui, ayant été substituées, auront fait évanouir tous les termes de l'équation $(4D)$, désigneront les ordonnées & les abscisses, de la ligne du 4^{me} ordre, correspondantes aux points doubles de cette ligne. Ainsi on sera certain, non-seulement que la ligne donnée a des points doubles, mais encore on aura les valeurs des abscisses & des ordonnées qui correspondent à ces points doubles. *Ce qu'il falloit trouver en 1^{er} lieu.*

* n.º 2 *de cet article.*

Après avoir substitué successivement, dans l'équation $(4D)$, au lieu de l'indéterminée (u) , les valeurs trouvées, de l'indéterminée (y) , aux points de rencontre des deux courbes auxiliaires, & en même temps les valeurs correspondantes de l'indéterminée (z) , si aucune des substitutions n'a fait évanouir tous les termes de l'équation $(4D)$: ou bien, si les deux courbes auxiliaires ne se rencontrent pas, ce qui peut arriver, c'est-à-dire, si la combinaison des équations (A) & (B) ne donne que des racines imaginaires : la ligne du 4^{me} ordre, dont la nature sera exprimée par l'équation $(4D)$, n'aura aucun point double. *Ce qu'il falloit trouver en second lieu.*

EXEMPLE I.

XCI. On demande si la courbe, dont la nature est
F f f ij

412 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 exprimée par l'équation suivante marquée (4 D) a des points

$$(4 D) \dots aau^2 + az^2 + 3a^2z + 4a^3 \times u = z^4 + 6az^3 \\ + 12a^2z^2 + 9a^3z + a^4$$

doubles. Après avoir différentié cette équation, on a la fraction marquée ici par (F), d'où l'on tire les équations marquées par

$$(F) \dots \frac{du}{dz} = \frac{-[2az + 3aa \times u + 4z^3 + 18az^2 + 24a^2z + 9a^3]}{2a^2u + az^2 + 3a^2z + 4a^3}$$

(A) & par (B) qui sont ici les équations des courbes auxiliaires:

$$(A) \dots ay = 2z^2 + 6az + 3a^2$$

$$(B) \dots 2ay + z^2 + 3az + 4a^2 = 0$$

Ces deux équations combinées ensemble donnent l'égalité $z^2 + 3az + 2a^2 = 0$, qui étant du 2^d degré, fait connoître que les courbes auxiliaires (qui sont ici deux paraboles coniques) se rencontrent en deux points, auxquels correspondent les deux abscisses $z = -a$, & $z = -2a$, qui sont les deux racines de l'égalité $zz + 3az + 2aa = 0$: or à l'abscisse $z = -a$ correspond une ordonnée commune aux deux courbes auxiliaires, qui est $y = -a$; & à l'abscisse $z = -2a$ correspond une autre ordonnée commune aux deux courbes auxiliaires, qui est aussi $y = -a$.

Maintenant si l'on substitue, 1.^o dans l'équation donnée (4 D), au lieu des indéterminées (z) & (u), les valeurs des (z) & des (y) du premier point de rencontre des deux courbes auxiliaires, c'est-à-dire ($-a$) au lieu de (z), & ($-a$) au lieu de (u), tous les termes de l'équation (4 D) s'évanouissent: ce qui fait voir * que le premier point d'intersection des paraboles auxiliaires tombe sur la ligne du 4^{me} ordre, dont la nature est exprimée par l'équation (4 D), & par conséquent qu'elle a un point double, auquel l'abscisse & l'ordonnée sont l'une & l'autre $= -a$.

2.^o Si l'on substitue dans cette même équation donnée (4 D), au lieu des indéterminées (z) & (u) les valeurs des (z) & des (y) du second point de rencontre des deux courbes auxiliaires, c'est-à-dire ($-2a$) au lieu de (z) & ($-a$) au lieu de (u), tous les termes de l'équation (4 D) s'évanouissent;

*Art. précéd.

ce qui fait voir * que la courbe proposée a un second point double, & qu'à ce second point double l'abscisse est $= -2a$ & l'ordonnée $= -a$.

Ainsi avant de supposer la courbe décrite, on connoît par son équation, non-seulement qu'elle a deux points doubles, mais encore les lieux où ces deux points doubles sont situés par rapport à l'origine de ses abscisses & de ses ordonnées. *Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.*

E X E M P L E I I.

XCII. On demande si la courbe $A\phi GEBFG\pi A^*$, * Fig. 53. dont on suppose ne connoître encore que l'équation marquée ici par $(4D)$, a un ou plusieurs points doubles.

$$(4D) \dots u^4 - 4bu^3 \left\{ \begin{array}{l} + 22z \\ - 4bz \\ + 9bb \end{array} \right\} u^2 - 4bz^2 \left\{ \begin{array}{l} + 8b^2z \\ - 10b^3 \end{array} \right\} u + 7b^2z^2 \left\{ \begin{array}{l} + 4z^4 \\ - 4bz^3 \\ - 6b^2z^2 \\ + 4b^4 \end{array} \right\} = 0.$$

On trouve d'abord le rapport de (du) à (dz) exprimé par la fraction (F) .

$$(F) \dots \frac{du}{dz} = - \frac{\begin{array}{l} + 4z \left\{ \begin{array}{l} - 8bz \\ + 8bb \end{array} \right\} u^2 + 4z^3 \left\{ \begin{array}{l} + 14bbz \\ - 6b^3 \end{array} \right\} \end{array}}{\begin{array}{l} 4u^3 - 12bu^2 - 8bz \left\{ \begin{array}{l} + 4z^2 \\ + 8b^2z \\ + 18b^3 \end{array} \right\} u + 8b^2z^2 \left\{ \begin{array}{l} - 4bz^2 \\ - 10b^3 \end{array} \right\} \end{array}}.$$

D'où il suit que les deux équations auxiliaires sont telles qu'on les voit représentées ici en (A) & en (B) .

$$(A) \dots \left\{ \begin{array}{l} + 4z \\ - 4b \end{array} \right\} y^2 - 8bz \left\{ \begin{array}{l} + 4z^3 \\ - 12bz^2 \\ + 14b^2z \\ - 6b^3 \end{array} \right\} y = 0.$$

$$(B) \dots 4y^3 - 12by^2 - 8bz \left\{ \begin{array}{l} + 4z^2 \\ - 8bz \\ + 18b^2 \end{array} \right\} y - 4bz^2 \left\{ \begin{array}{l} - 4bz^2 \\ - 10b^3 \end{array} \right\} = 0.$$

Ces deux équations sont divisibles, la première par $(4yy - 8by + 4zz - 8bz + 6bb)$, la seconde par

$(4yy - 8by + 4zz - 8bz + 10bb)$: Ainsi elles se réduisent, l'une à l'équation $(2A)$, l'autre à l'équation $(2B)$.

$$(2A) \dots z - b = 0, \quad (2B) \dots y - b = 0,$$

La première des deux nouvelles équations désigne une ligne droite parallèle à l'ordonnée principale, & distante de l'origine des (z) de la grandeur (b) : la seconde désigne aussi une ligne droite parallèle à l'axe, & distante de cet axe de la grandeur (b) ; D'où il suit que les deux courbes auxiliaires, désignées par les équations (A) & (B) , qui se sont réduites à de simples lignes droites, se coupent en un point, distant de l'axe de la grandeur (b) & de l'origine de cet axe d'une grandeur aussi $= b$: ce qui fait voir déjà que la courbe donnée peut avoir un point double.

Maintenant, si l'on substitue, dans l'équation $(4D)$, au lieu de (z) & de (u) , les valeurs (b) & (b) des indéterminées (z) & (y) au point de rencontre des deux lignes auxiliaires : cette substitution fera évanouir tous les termes de l'équation $(4D)$; D'où il suit que ce point de rencontre des lignes auxiliaires, tombe sur la courbe donnée $A\phi GEBFG\pi A$ en un point G distant de l'origine O de l'axe OP de la grandeur $OP(z) = b$, & de l'axe OP de la grandeur $PG(u) = b$, & par conséquent * qu'il y a là un point double.

* Art. 90.

Donc, avant de supposer la courbe décrite, on connoît non-seulement qu'elle a un point double en G , mais encore qu'elle ne sçauroit en avoir d'autres. *Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.*

R E M A R Q U E.

XCIII. Il est bon de remarquer que la Solution du Probleme précédent est, dans de certains cas particuliers, beaucoup plus courte & moins sujette à de longs calculs, qu'elle ne l'est dans le général. Quelquefois on n'a pas besoin d'avoir recours aux intersections des deux courbes auxiliaires, désignées par les équations (A) & (B) ; c'est ce qui arrive lorsqu'il n'y a aucun mélange de variable, ni dans le numérateur, ni dans le dénominateur de la fraction marquée par

(F) ; car alors la seule extraction des racines des deux égalités formées, l'une par le numérateur égalé à zero, l'autre par le dénominateur aussi égalé à zero, donne les valeurs des (z) & des (u), qui étant successivement substituées dans l'équation de la courbe, font connoître si la courbe a ou n'a pas de points doubles. Par exemple, on demande si la courbe, dont la nature est exprimée par l'équation $u^4 - 2b^2u^2 - 2bz^3 + 3bbz^2 = 0$, a des points doubles. Après avoir différencié l'équation, on a $\frac{du}{dz} = \frac{3bz^2 - 3bbz}{2u^3 - 2bbu}$: d'où l'on tire les deux égalités suivantes $z^2 - bz = 0$, & $u^3 - b^2u = 0$; Les racines de la première égalité sont $z = 0$ & $z = b$, auxquelles correspondent les racines $u = 0$ & $u = \pm b$ de la 2^{de} égalité.

Or, 1.^o $z = 0$ & $u = 0$ étant substitués dans l'équation proposée $u^4 - 2b^2u^2 - 2bz^3 + 3bbz^2 = 0$, tous les termes s'évanoüissent : ce qui fait voir que la courbe proposée a un point double à l'origine de son axe. 2.^o Si l'on substitue dans cette même équation, au lieu de (z) & de (u), les valeurs $z = b$ & $u = \pm b$, tous les termes s'évanoüissent encore ; D'où il suit que cette courbe a deux autres points doubles, de part & d'autre de son axe, distants de cet axe de la grandeur $u = \pm b$, & cela sur une ligne droite parallèle aux ordonnées, distante de l'origine des abscisses de la grandeur $z = b$.

PROPOSITION VIII.

PROBLEME.

XCIV. Les points d'intersection d'une ligne du 4^{me} ordre, dont on a l'équation, étant donnés, déterminer si ce point d'intersection est un point double de la première, de la seconde, ou de la troisième espece.

SOLUTION.

Soit la courbe $MGDGARCRm^*$, dont EP est l'axe; * Fig. 44+. Le rapport des abscisses EP aux ordonnées PM étant donné par une équation algébrique quelconque du quatrième degré,

soit G un des points doubles de cette courbe, trouvé par le moyen de l'art. 90. Soit $G\Omega$ une droite parallèle aux ordonnées PM , menée du point double G sur l'axe EP ; Soit supposé de plus qu'on a découvert, par l'art. 63, que ce point double G est un point d'intersection. On demande si ce point d'intersection est de la première, seconde, ou troisième espèce.*

* Art. 15.

Puisque le point double G est donné de position, les droites $E\Omega$ & $G\Omega$ sont données, ainsi on peut transporter l'origine des indéterminées de E en G , & par conséquent prendre GQ pour l'abscisse, & QM pour l'ordonnée. D'où il suit qu'en nommant $GQ (z)$ & $QM (u)$, le rapport de $GQ (z)$ à $QM (u)$ sera exprimé par une équation algébrique qu'on pourra toujours rapporter à l'équation générale de l'art. 61, marquée ici par (10).

$$(10) \dots \Delta u^4 + qz + au^3 + \overline{Ez^2 + \gamma z + \delta \times uu} \\ + \varepsilon z^3 + \eta z^2 + \lambda z \times u + \nu z^3 + \rho z^3 + \phi z^2 = 0.$$

Cela posé, par l'art. 63, on menera les droites GT , Gt , tangentes de la courbe au point double G . Si l'une & l'autre de ces tangentes (*Fig. 44.*) rencontre la courbe chacune en un autre point N & n , le point double G n'est qu'un point double de la première espèce*. Si l'une de ces tangentes GT peut rencontrer la courbe en un autre point N , tandis que l'autre tangente Gt ne sauroit la rencontrer en d'autre point qu'en G (*Fig. 59.*) alors le point double G est un point double de la seconde espèce*. Enfin si la courbe n'est rencontrée, ni par la tangente Gt , ni par la tangente GT en d'autre point qu'au point double G , alors* ce point double G est de la troisième espèce.

* Art. 40.
n.º 2.

* Art. 41.
n.º 1.

* Art. id.

Maintenant le rapport de (dz) à (du) au point double

* Art. 63. G étant* exprimé par $\frac{du}{dz} = -\frac{\lambda}{2\delta} \pm \frac{1}{2\delta} \sqrt{\lambda\lambda - 4\delta\phi}$, il est visible que les ordonnées $Q\theta$ des tangentes tGn , TGN , sont $= -\frac{\lambda z}{2\delta} \pm \frac{z}{2\delta} \sqrt{\lambda\lambda - 4\delta\phi}$. D'où il suit qu'aux points

points n & N où les tangentes tGn , TGN coupent la courbe

$MGDGARCRm$, on a $u = -\frac{\lambda z}{2\delta} \pm \frac{z}{2\delta} \sqrt{\lambda\lambda - 4\delta\phi}$,

& cette double valeur de l'indéterminée (u) étant substituée dans l'équation marquée par (10), il doit en résulter deux égalités du quatrième degré. Les racines de la première égalité donneront les points d'intersection de la tangente Gt & de la courbe $MGDGARCRm$, c'est-à-dire, les points G & n . Les racines de la seconde égalité donneront les points d'intersection de la tangente GT & de la même courbe $MGDGARCRm$, c'est-à-dire, les points G & N . Mais puisque les droites Gt , GT , sont tangentes de la courbe au point double G , origine des indéterminées (z), il est évident qu'il doit y avoir dans chaque égalité au moins trois racines égales à zero : puisqu'en ce même point G il y a* une abscisse * Art. 19. $GQ(z) = 0$, trois fois commune à la droite GT & à la même courbe $MGDGARCRm$.

En effet, la substitution de $-\frac{\lambda z}{2\delta} \pm \frac{z}{2\delta} \sqrt{\lambda\lambda - 4\delta\phi}$, au lieu de son égal (u) dans l'équation marquée par (10), donne les deux égalités qu'on voit ici marquées, l'une par (H) l'autre par ($2H$), dans chacune desquelles il y a trois racines

$$(H) \dots \left\{ \begin{array}{l} \Delta\lambda^4 - 4\Delta\lambda^2\delta\phi - q\lambda^3\delta \\ 3q\lambda\delta^2\phi + 6\lambda^2\delta^2 - \epsilon\lambda\delta^3 \\ 2\Delta\delta^2\phi^2 - 2\epsilon\phi\delta^3 + 2v\delta^4 \\ 2\Delta\lambda\delta\phi - \Delta\lambda^3 \\ q\lambda^2\delta - q\delta^2\phi \\ \epsilon\delta^3 - \epsilon\lambda\delta^2 \end{array} \right\} \sqrt{\lambda\lambda - 4\delta\phi} \left\{ \begin{array}{l} \alpha\lambda^3\delta - 3\alpha\lambda\delta^2\phi \\ \eta\lambda\delta^3 - \gamma\lambda^2\delta^2 \\ 2\gamma\phi\delta^3 - 2\rho\delta^4 \\ -\alpha\lambda^2\delta \\ +\alpha\delta^2\phi \\ +\gamma\delta^2\lambda \\ -\eta\delta^3 \end{array} \right\} z^4 - \left\{ \begin{array}{l} \alpha\lambda^3\delta - 3\alpha\lambda\delta^2\phi \\ \eta\lambda\delta^3 - \gamma\lambda^2\delta^2 \\ 2\gamma\phi\delta^3 - 2\rho\delta^4 \\ -\alpha\lambda^2\delta \\ +\alpha\delta^2\phi \\ +\gamma\delta^2\lambda \\ -\eta\delta^3 \end{array} \right\} z^3 = 0.$$

$$(2H) \dots \left\{ \begin{array}{l} \Delta\lambda^4 - 4\Delta\lambda^2\delta\phi - q\lambda^3\delta \\ 3q\lambda\delta^2\phi + 6\lambda^2\delta^2 - \epsilon\lambda\delta^3 \\ 2\Delta\delta^2\phi^2 - 2\epsilon\phi\delta^3 + 2v\delta^4 \\ \Delta\lambda^3 - 2\Delta\lambda\delta\phi \\ q\delta^2\phi - q\lambda^2\delta \\ \epsilon\lambda\delta^2 - \epsilon\delta^3 \end{array} \right\} \sqrt{\lambda\lambda - 4\delta\phi} \left\{ \begin{array}{l} \alpha\lambda^3\delta - 3\alpha\lambda\delta^2\phi \\ \eta\lambda\delta^3 - \gamma\lambda\lambda\delta^2 \\ 2\gamma\phi\delta^3 - 2\rho\delta^4 \\ +\alpha\lambda^2\delta \\ -\alpha\delta^2\phi \\ -\gamma\delta^2\lambda \\ +\eta\delta^3 \end{array} \right\} z^4 - \left\{ \begin{array}{l} \alpha\lambda^3\delta - 3\alpha\lambda\delta^2\phi \\ \eta\lambda\delta^3 - \gamma\lambda\lambda\delta^2 \\ 2\gamma\phi\delta^3 - 2\rho\delta^4 \\ +\alpha\lambda^2\delta \\ -\alpha\delta^2\phi \\ -\gamma\delta^2\lambda \\ +\eta\delta^3 \end{array} \right\} z^3 = 0.$$

égales à zero, qui sont pour le point G trois fois commun à

Mem. 1730.

. G g g

chacune des droites Gt , GT , & à la courbe $MGDGARCRm$, & une quatrième, qui est pour les points simples n & N , où les tangentes Gt , GT , coupent la courbe $MGDGARCRm$.

Cela étant ainfi, il est visible que si la 4^{me} racine de l'égalité (H) , & la 4^{me} racine de l'égalité marquée par $(2H)$ sont autres que zero (soit qu'elles soient positives, soit qu'elles soient négatives) : il est visible, dis-je, que les tangentes Gt , GT au point double G seront l'une & l'autre sécantes de la courbe en des points comme n & N , & par conséquent que le point double G ne sera qu'un point double de la première espèce.

Mais si la 4^{me} racine d'une des égalités comme (H) est égale à zero, tandis que la 4^{me} racine de l'autre égalité $(2H)$ est autre que zero (soit qu'elle soit positive, soit qu'elle soit négative) : il est visible que le point n se confond avec le point double G , tandis que le point N ne s'y confond pas. Ensorte que la branche $DGMn$ a une inflexion en G , pendant que la branche DGA n'en a point en cet endroit, ce qui fait en G un point double de la seconde espèce*.

* Art. 15.
 & 21. n.º 2.

Enfin si les quatrième racines des deux égalités (H) & $(2H)$ sont égales à zero, il est visible que non-seulement le point n , mais encore le point N se confond avec le point double G , ensorte que la branche DGA a une inflexion en G , aussi-bien que la branche $DGMn$, ce qui fait en G un point double* de la troisième espèce.

* Art. id.

Donc par le moyen des deux égalités précédentes, marquées par (H) & $(2H)$ on déterminera toujours si le point double G est de la première, seconde ou troisième espèce. Ce qu'il falloit trouver.

E X E M P L E I.

* Fig. 51.

XCV. Soit la courbe* $MGDGARCRm$, dans laquelle le rapport des abscisses GQ (z) aux ordonnées QM (u) est exprimé par $b u^3 + b^2 u^2 - z^4 - 2 b z^3 \sqrt{2} - 2 b b z z = 0$, il est visible (par les art. 61 & 63) que cette courbe a un point d'intersection à l'origine G de ses abscisses GQ ,

puisque'on y a $zz=0$ & $uu=0$, & qu'en ce même point

G , on a $\frac{du}{dz} = \pm\sqrt{2}$. Mais il n'est pas moins évident, par

l'art. 94, que ce point d'interfection est un point double

de la seconde espece ; Car, si l'on compare l'équation donnée

$bu^3 + b^2u^2 - z^4 - 2bz^3\sqrt{2} - 2bbz^2z = 0$, avec l'équa-

tion générale marquée par (10) dans l'art. 94, on voit que

les coefficients indéterminés de l'équation (10) sont ici

$\Delta=0$, $q=0$, $a=b$, $C=0$, $\gamma=0$, $\delta=bb$, $\varepsilon=0$,

$\eta=0$, $\lambda=0$, $\nu=-1$, $\rho=-2b\sqrt{2}$, & $\phi=-2bb$.

Or, en substituant ces valeurs dans les égalités marquées par

(H) & par (2H) dans le même art. 94, on trouve que la

première de ces égalités (H) devient $z^4=0$, & que la se-

conde (2H) devient $z^4 + 4bz^3\sqrt{2} = 0$, ensorte que la

4^{me} racine de l'une de ces égalités est égale à zero, tandis

que la 4^{me} racine de la seconde égalité est autre que zero.

Donc* des deux tangentes tG , TG , de la courbe au point

* Art. 94.

double G , il y en a une qui est tangente d'une branche

DGM , qui a une inflexion en ce même point d'intersec-

tion G , tandis que l'autre TG est tangente d'une branche

DGA qui n'a point d'inflexion au point d'attouchement G .

Donc* le point double G n'est que de la seconde espece.

* Art. 15.

COROLLAIRE I.

XCVI. Puisque la racine de l'égalité (2H) est $z=-4b\sqrt{2}$,

il est évident qu'après avoir pris sur l'axe GQ , du côté où

les (z) sont négatifs, le point q , tel que Gq soit $=4b\sqrt{2}$,

si par ce point, on mene une droite qN parallele aux or-

données QM , le point N où cette droite rencontrera la tan-

gente TG , prolongée autant qu'il sera nécessaire, sera celui

où cette même tangente TG rencontre la courbe MGD

$ARCRm$, après l'avoir touchée au point double G .

COROLLAIRE II.

XCVII. Il est clair, par les art. 71-& 72, qu'en prenant

sur l'axe GQ , du côté où les (z) sont négatifs, le point R ,

G g g ij

tel que GR soit $= b\sqrt{2}$: il est clair, dis-je, que ce point R est encore un point d'intersection ou un second nœud de la courbe $MGDGARCRm$. D'où il suit que si l'on transporte l'origine des abscisses de G en R , en faisant RQ ($z + b\sqrt{2}$) $= x$, on aura l'équation $bu^3 + bbuu - x^4 + 2bx^3\sqrt{2} - 2b^2x^2 = 0$, qui exprime le rapport des abscisses RQ aux ordonnées QM . Cela posé, il est évident que ce second point double R est encore un point double de la seconde espece, ce qui se prouve en comparant cette nouvelle équation avec l'équation générale, marquée par (10) dans l'art. 94, de même que par la comparaison de l'équation $bu^3 + bbuu - z^4 - 2bz^3\sqrt{2} - 2bbzz = 0$, on a trouvé *

* Art. 95.

que le point double G étoit un point double de la seconde espece.

REMARQUES.

XCVIII. On peut remarquer, 1.^o qu'en prenant sur la droite GL & sur la droite RL , (l'une & l'autre paralleles aux ordonnées QM .) en prenant, dis-je, du côté où les (u) sont négatifs, les points D & C , tels que GD & RC , soient l'une & l'autre $= b$: Les points D & C seront ceux où la courbe $MGDGARCRm$ coupe les deux droites GL , RL parallelement à l'axe GQ .

2.^o Si sur l'axe GQ on prend, du côté où les abscisses GQ sont négatives, le point B , tel que GB soit $= \frac{b}{\sqrt{2}}$, si par ce point B , on élève la droite BA parallele à GL , sur laquelle on prenne la partie BA égale à la racine réelle de cette égalité $u^3 + buu - \frac{1}{4}b^3 = 0$, le point A est celui où cette droite BA est coupée par la courbe $MGDGARCRm$ parallelement à son axe GQ .

3.^o On peut remarquer encore que cette droite BA prolongée à l'infini est le diametre de la courbe $MGDGARCRm$; Que cette courbe a deux branches $AGDGM$, $ARCRm$, qui s'étendent à l'infini de part & d'autre de ce diametre; Que chaque branche se noie, l'une au point G , en formant le folium $G DG$, l'autre au point R , en formant le folium

RCR. Enfin que ces deux branches infinies sont unies ensemble par l'arc *GAR* qui fait une espece de sinuosité, dont le sommet est en *A*. Propriétés qui se déduisent si aisément de son équation $bu^3 + bbuu - z^4 - 2bz^3\sqrt{2} - 2b^2z^2 = 0$, qu'il suffit de les indiquer.

4.^o Enfin il faut remarquer que cette courbe, qui est un *Bifolium parabolique*, ne differe du *Bifolium MGHDKGA ROCFR^m* de l'art. 73, qu'en ce que les deux points * *Fig. 44^o* doubles de celui qu'on examine ici * sont de la seconde espece, * *Fig. 51.* au lieu que ceux du *Bifolium* de l'art. 73 sont de la première espece : ce qui suffit pour faire deux différentes especes de courbe.*

EXEMPLE IV.

XCIX. Soit la courbe *AGDGMEHFNRCRA** dans * *Fig. 52.* laquelle le rapport des ordonnées *BQ* (*x*) aux abscisses *QM* (*u*) est exprimé par l'équation $u^4 - 4bu^3 - 8bbuu + 4x^4 - 8bbxx\sqrt{2} + 8b^4 = 0$: après avoir prouvé, par les Propositions précédentes *, que cette courbe a deux * *Art. 82.* points doubles sur son axe *GQ*, l'un en *G*, l'autre en *R*, tels que $BG = b\sqrt{2}$ & $BR = -b\sqrt{2}$, & que ces deux points doubles sont des points d'intersection *, puisqu'on y a * *Art. 63.* *Art. 72.* toujours $\frac{du}{dx} = \pm \sqrt{2\sqrt{2}}$: on demande si ces deux points d'intersection sont de la première, seconde ou troisième espece.

On transportera l'origine des abscisses de *B* en *G*, en prenant $z = x - b\sqrt{2}$, ou bien en faisant $x = z + b\sqrt{2}$; & en substituant cette valeur de (*x*) dans l'équation donnée, on aura l'équat. $u^4 - 4bu^3 - 8bbuu + 4z^4 + 16bz^3\sqrt{2} + 16bbz\sqrt{2} = 0$ qui exprime le rapport des abscisses *GQ* aux ordonnées *QM*. Cela fait, on comparera cette nouvelle équation avec celle de l'art. 94, & l'on aura $\Delta = 1$, $g = 0$, $\alpha = -4b$, $\epsilon = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = -8bb$, $\varepsilon = 0$, $\eta = 0$, $\lambda = 0$, $\nu = 4$, $\rho = 16b\sqrt{2}$, $\phi = 16bb\sqrt{2}$; ensuite substituant les valeurs de ces coefficients, ainsi trou-

vées, dans les égalités marquées par (H) & par $(2H)$ dans le même art. 94, la première égalité (H) deviendra $3z^4$

$+ 8bz^3\sqrt{V_2} = 0$, tandis que la seconde $(2H)$ se réduit à $z^4 = 0$: enforte que la quatrième racine de l'une de ces égalités étant autre que zero, pendant que la quatrième racine

* Art. 94. de l'autre égalité est $= 0$, il est visible* que des deux tangentes GT, Gt , de la courbe au point double G , il y en a une qui est tangente d'une branche DGA , qui n'a point d'inflexion en G , tandis que l'autre est tangente d'une branche

* Art. 15. DGM qui a une inflexion en G ; D'où il suit* que le point double G est de la seconde espece.

COROLLAIRE I.

C. Puisque la quatrième racine de l'égalité (H) $3z^4 + 8bz^3\sqrt{V_2} = 0$ est $z = -\frac{8}{3}b\sqrt{V_2}$, ce qui donne $x = -\frac{5}{3}b\sqrt{V_2} = BR + \frac{2}{3}BR$, il est clair qu'en prenant sur l'axe BQ , au de-là du point R , par rapport au point B , le point q , tel que $Rq = \frac{2}{3}BR$, il est clair, dis-je, que si l'on mene par ce point q une droite qN parallele aux ordonnées QM , le point N , où cette parallele rencontrera la tangente TG , sera celui où cette même tangente rencontre la courbe $AGDGMEHFNCRA$, après l'avoir touchée au point double G .

COROLLAIRE II.

CI. Par la même voye on prouvera que le point d'intersection R de la même courbe $AGDGMEHFNCRA$ est un point double de la seconde espece, & l'on trouvera de même le point où l'une des tangentes de la courbe, au point double R , coupe la portion de la courbe $AGDGMEH$.

REMARQUES.

CII. Il n'est pas hors de propos de remarquer ici en passant, 1.° Qu'en prenant sur l'ordonnée principale BL les points A & H , tels que BA soit égale à la moindre des ra-

cines réelles de l'égalité $u^4 - 4bu^3 - 8bbuu + 8b^4 = 0$, & BH égal à la plus grande des racines réelles de la même égalité, les points A & H seront ceux où la courbe $AGD GMEHFNRCRA$ coupe l'ordonnée principale parallèlement à son axe BQ .

2.° Que l'égalité $u^4 - 4bu^3 - 8bbuu + 8b^4 = 0$, n'ayant que deux racines réelles, qui sont même positives (ainsi qu'il est aisé de le connoître par les premiers principes de l'Algebre) il s'ensuit que l'ordonnée principale BL ne rencontre la courbe en question qu'en deux points.

3.° Que cette même ordonnée principale BL est le diamètre de la courbe $AGD GMEHFNRCRA$, puisqu'on

a par-tout $x = \pm \sqrt{bb\sqrt{2} \pm \sqrt{2bbuu + bu^3 - \frac{1}{4}u^4}}$.

4.° Après avoir mené par les points doubles G & R les droites GE , RF , paralleles aux ordonnées QM , soient pris sur ces paralleles les points I & K , tels que GI & RK soient l'une & l'autre $= 2b$; Si l'on prend, de part & d'autre du point I , les points E & D , & de part & d'autre du point K les points F & C , tels que IE , ID , KF , KC , soient les unes & les autres $= 2b\sqrt{3}$: les points E & D seront ceux où la courbe coupe la droite GE parallèlement à l'axe BQ , & les points F & C , ceux où cette même courbe coupe la droite RF parallèlement au même axe BQ .

5.° Après avoir pris sur l'ordonnée principale BL , du côté où les (u) sont positifs, le point ω , tel que $B\omega = 4b$, & mené par le point ω la droite $\phi\omega\pi$ parallele à l'axe BQ ; Si sur cette même droite $\phi\omega\pi$, de part & d'autre du point ω , on prend les points ϕ & π , tels que $\omega\phi$ & $\omega\pi$ soient l'une & l'autre $= b\sqrt{5\sqrt{2}} = BG\sqrt{5}$, les points ϕ & π seront les points de la courbe $AGD GMEHFNRCRA$, où les tangentes sont paralleles à l'ordonnée principale.

6.° Après avoir pris sur l'ordonnée principale BL , du côté où les (u) sont négatifs, le point a , tel que $Ba = b$,

& mené par le point a , la droite gah , parallèle à l'axe BQ , si sur cette même parallèle gh , on prend, de part & d'autre

du point a , les parties af & ac , l'une & l'autre $= \frac{b\sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$;

& les parties ah , ag , l'une & l'autre $= \frac{b\sqrt{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$, les

points f , c , h & g seront quatre points de la courbe où les tangentes sont parallèles à l'ordonnée principale BL .

7.^o Toutes les droites, menées parallèlement à l'axe au de-là des points E & F , par rapport au point B , ne rencontrent la courbe en aucun point : car, tant que (u) est plus grand que $2b + 2b\sqrt{3}$, les quatre valeurs de $x =$

$\pm \sqrt{bb\sqrt{2} \pm \sqrt{2bbuu + bu^3 - \frac{1}{4}u^4}}$ sont imaginaires.

De même toutes les droites, menées parallèlement à l'axe au de-là des points C & D , par rapport au point B , ne rencontrent la courbe en aucun point : car, tant que $(-u)$ surpasse $2b - 2b\sqrt{3}$, les quatre valeurs de $x =$

$\pm \sqrt{bb\sqrt{2} \pm \sqrt{2bbu + bu^3 - \frac{1}{4}u^4}}$ sont imaginaires.

D'où il suit que la courbe ne s'étend pas, le long de son ordonnée principale BL , au de-là des points E & F , du côté où les (u) sont positifs, ni au de-là des points C & D du côté où les (u) sont négatifs.

8.^o Toutes les droites, menées parallèlement à l'ordonnée principale, au de-là des points ϕ & π , par rapport au point ω , ne rencontrent la courbe en aucun point : car dès que

(x) surpasse $b\sqrt{5\sqrt{2}}$, les quatre racines de l'égalité $x^4 - 2bbxx\sqrt{2} + \frac{1}{4}u^4 - bu^3 - 2bbuu + 2b^4 = 0$;

(dans laquelle au lieu de (x) on auroit mis une grandeur qui surpasseroit $b\sqrt{5\sqrt{2}}$) sont imaginaires. D'où il suit que la courbe ne s'étend pas, le long de son axe BQ , au de-là des points ϕ & π ; Mais comme par le nombre précédent, elle ne s'étend pas au de-là des points E , F , C , D , le long de son

son ordonnée principale, il est clair que cette courbe rentre en elle-même.

9.^o On démontrera de même, 1.^o Que toutes les droites menées, parallèlement à l'ordonnée principale BL , entre les points f & h , ou bien entre les points c & g , rencontrent la courbe en quatre points, dont il y en a toujours deux du côté où les (u) sont positifs, & deux du côté où les (u) sont négatifs. 2.^o Que les droites menées, parallèlement à l'ordonnée principale BL , entre les points f & c , ne rencontrent la courbe qu'en deux points, du côté où les (u) sont positifs: en sorte que les portions de la courbe en question, situées au de-là de l'axe BQ , par rapport aux points E & F , c'est-à-dire, du côté où les ordonnées (u) sont négatives, forment deux *folium* $GhDfG$, & $RcCgR$, dont les nœuds sont en G & en R ; Ce qui pourroit faire donner à cette courbe le nom d'Ovale bifolée.

EXEMPLE III.

CIII. Soit la Lemniscate de M. Bernoulli * $GMFBEG$ * Fig. 53. $\phi A\pi G$, dans laquelle le rapport des abscisses GQ (z) aux ordonnées QM (u) est exprimé par $u^4 + 2zz + bb \times uu + z^4 - bbzz = 0$; Il est visible, 1.^o Que cette courbe a un point double à l'origine G de son axe, puisqu'on y a toujours $uu = 0$ & $zz = 0$; 2.^o Que ce point double est un point d'intersection, puisqu'en ce même point $\frac{du}{dz} = \pm 1$. Cela posé, on demande si ce point d'intersection G est de la première, seconde ou troisième espèce.

Puisque le point d'intersection est à l'origine G de l'axe, il ne faut pas transporter cet origine ailleurs; ainsi en comparant l'équation donnée avec l'équation générale marquée par (10) dans l'art. 94, on aura $\Delta = 1$, $q = 0$, $\alpha = 0$, $\epsilon = 2$, $\gamma = 0$, $\delta = bb$, $\varepsilon = 0$, $\eta = 0$, $\lambda = 0$, $\nu = 1$, $\rho = 0$, $\phi = -bb$; Ensuite, substituant les valeurs de ces coefficients dans les égalités (H) & (2H) du même art. 94, ces deux égalités deviennent l'une & l'autre $z^4 = 0$, en sorte

Mem. 1730.

. H h h

que la 4^{me} racine de l'égalité (H) & la 4^{me} racine de l'égalité (2H) sont l'une & l'autre égales à zero. D'où * il suit,

* Art. 94.

1.° Que la tangente tG de la courbe au point double G , touche une branche πGF , qui a une inflexion au point d'intersection G .
2.° Que la tangente TG , au même point double G , touche une autre branche $EG\phi$ qui a aussi une inflexion au point d'intersection G . Donc le point double G est un point d'intersection de la troisième espèce. *Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.*

AVERTISSEMENT.

Cette dernière Courbe étant connue depuis que l'illustre Géometre, dont elle porte le nom, s'en est servi pour construire l'Isochrone-Paracentrique de M. Leibnitz, je ne crois pas devoir m'arrêter sur cet Exemple, comme j'ai fait sur les précédents. Tout le monde sçait que cette courbe rentre en elle-même, & que les tangentes aux points A & B, extrémités de son axe, sont parallèles aux ordonnées QM à cet axe, quel que soit l'angle MQG.

EXEMPLE IV.

* Fig. 54.

CIV. Soit la courbe $MegfmBEG\phi AFG\epsilon B\mu\gamma\pi\xi^*$, dans laquelle le rapport des abscisses GQ (z) aux ordonnées $QM(u)$ est exprimé par l'équation $u^4 - aauu - z^4 + bbzz = 0$, (où l'on suppose toujours $a < b$) il est visible que cette courbe a un point double à l'origine G de ses abscisses GQ , & de ses ordonnées QM , puisqu'on y a toujours $zz = 0$ & $uu = 0$, & que ce point double est un point d'intersection, puisque $\frac{du}{dz}$ y est $= \pm \frac{b}{a}$. Mais il n'est pas moins évident que ce point d'intersection est un point double de la troisième espèce; Car si l'on compare l'équation donnée $u^4 - aauu - z^4 + bbzz = 0$, avec l'équation générale, marquée par (10) dans l'art. 94, on a ici $\Delta = 1$, $q = 0$, $\alpha = 0$, $\epsilon = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = -aa$, $\epsilon = 0$, $\eta = 0$, $\lambda = 0$, $\nu = -1$, $\rho = 0$, & $\phi = bb$; or en substituant ces valeurs dans les égalités marquées par (H) & par (2H) dans le même art. 94, on voit que ces deux égalités se réduisent à celle-ci $b^4 - a^4 \times z^4 = 0$,

dans laquelle les quatre racines de (z) sont $= 0$. D'où il suit* que le point d'intersection G est un point double de la * Art. 94. troisième espece. *Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.*

REMARQUES.

CV. Il est aisé de voir, 1.^o que l'axe GQ de cette courbe est un des diametres de la courbe en question, puisque l'on

$$\text{a toujours } u = \pm \sqrt{\frac{1}{2}aa \pm \sqrt{z^4 - bbzz + \frac{1}{4}a^4}}.$$

2.^o Si l'on prend sur le diametre GQ , de part & d'autre du point G , les parties Gg & $G\gamma$, l'une & l'autre $= b$, les points g & γ seront ceux où la courbe coupe ce diametre, parallelement à l'ordonnée principale GL .

3.^o Si l'on prend sur le diametre GQ , de part & d'autre du point G , les parties GS , $G\omega$, l'une & l'autre

$$= \sqrt{\frac{1}{2}bb - \frac{1}{2}\sqrt{b^4 - a^4}}, \text{ \& ensuite les parties } G\sigma, G\delta,$$

l'une & l'autre $= \sqrt{\frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}\sqrt{b^4 - a^4}}$: si des points S , ω , σ & δ , on élève des droites SE , ωe , σe , δc , paralleles à l'ordonnée principale GL , & les unes & les autres $= \frac{a}{\sqrt{2}}$:

si l'on prolonge également ces quatre droites, du côté où les (u) sont négatifs, enforte que SF soit $= SE$, $\omega e = \omega \Phi$, $\sigma e = \sigma f$ & $\delta c = \delta \pi$, les points E , F , e , f , ϵ , Φ , c , π , seront les huit points de la courbe qui ont des tangentes paralleles à l'ordonnée principale GL .

4.^o Il est aisé de voir que l'ordonnée principale GL , prolongée de part & d'autre du point G , est un des diametres de cette courbe, puisque l'on a toujours $z =$

$$\pm \sqrt{\frac{1}{2}bb \pm \sqrt{u^4 - aauu + \frac{1}{4}b^4}}.$$

5.^o Si l'on prend sur le diametre GL , de part & d'autre du point G , les parties GB , GA , l'une & l'autre $= a$, les points B & A seront ceux où la courbe coupe ce diametre, parallelement à l'axe GQ .

6.^o Toutes les droites menées, parallèlement au diamètre GL , entre les points S & ω , rencontrent la courbe en qua-

tre points; Car dès que $\pm z < \sqrt{\frac{1}{2}bb - \frac{1}{2}\sqrt{b^4 - a^4}}$, les quatre valeurs de l'ordonnée (u), qui sont \pm

$\sqrt{\frac{1}{2}aa \pm \sqrt{z^4 - bbzz + \frac{1}{4}a^4}}$, sont réelles. Mais les droites menées, parallèlement à ce même diamètre GL , entre les points S & σ , ou entre les points ω & δ , ne rencontrent

point la courbe : car dès que $\pm z > \sqrt{\frac{1}{2}bb - \frac{1}{2}\sqrt{b^4 - a^4}}$,

& $< \sqrt{\frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}\sqrt{b^4 - a^4}}$, les quatre valeurs de (u),

qui sont $\pm \sqrt{\frac{1}{2}aa \pm \sqrt{z^4 - bbzz + \frac{1}{4}a^4}}$, sont imaginaires. D'où il suit que la portion de courbe $GEBeGFA\phi G$, renfermée entre les droites ESF , $e\omega\phi$, n'est pas unie, sur le plan, aux deux autres portions $Me gfm$, $\mu c\gamma\pi\xi$, de la même courbe.

7.^o Toutes les droites menées, parallèlement à l'ordonnée principale GL , entre les points σ & g , ou entre les points δ & γ , rencontrent la courbe en quatre points. Car dès

que ($\pm z$) surpasse $\sqrt{\frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}\sqrt{b^4 - a^4}}$ & est moindre que b , les quatre valeurs de l'ordonnée (u), qui sont

$\pm \sqrt{\frac{1}{2}aa \pm \sqrt{z^4 - bbzz + \frac{1}{4}a^4}}$, sont réelles. Mais les droites menées, parallèlement à l'ordonnée principale GL , au de-là des points g & γ , par rapport au point double G , à quelque distance qu'elles soient de ce point double G , ne rencontrent la courbe qu'en deux points; Car dès que $\pm z > b$, des quatre valeurs de l'indéterminée (u) il n'y en a que

deux réelles, sçavoir $\pm \sqrt{\frac{1}{2}aa + \sqrt{z^4 - bbzz + \frac{1}{4}a^4}}$,

les deux autres $\pm \sqrt{\frac{1}{2}aa - \sqrt{z^4 - bbzz + \frac{1}{4}a^4}}$.

étant toujours imaginaires dans ce cas-là. D'où il suit que la portion de courbe $Megfm$ & son opposée $\mu C\gamma\pi\xi$ s'étendent l'une & l'autre à l'infini, de part & d'autre de l'ordonnée principale GL , en formant les quatre branches infinies geM , $\gamma C\mu$, gfm , $\gamma\pi\xi$, dont les deux premières sont du côté des (u) positifs, & les deux autres du côté des (u) négatifs.

8.° Toutes les droites, comme $ML\mu$, ou bien $mI\xi$, menées parallèlement à l'axe GQ , au de-là des points B & A , par rapport au point G , ne rencontrent la courbe qu'en deux points; Car dès que $GL (+u)$ ou $GI (-u)$ surpassent GB ou $GA (\pm a)$ des quatre valeurs de l'indéterminée (z)

$$= \pm \sqrt{\frac{1}{2}bb \pm \sqrt{u^4 - aauu + \frac{1}{4}b^4}}, \text{ il n'y en a que}$$

$$\text{deux réelles; savoir, } \pm \sqrt{\frac{1}{2}bb + \sqrt{u^4 - aauu + \frac{1}{4}b^4}},$$

les deux autres $\pm \sqrt{\frac{1}{2}bb - \sqrt{u^4 - aauu + \frac{1}{4}b^4}}$ étant imaginaires. D'où il suit que la portion de courbe $GEB\epsilon GFA\phi G$ (qui est entre les quatre branches infinies geM , $\gamma C\mu$, gfm , $\gamma\pi\xi$) ne s'étend pas au de-là des points B & A , le long de l'ordonnée principale GL ; & comme elle ne s'étend pas au de-là des points S & ω , le long de l'axe GQ (comme il a été remarqué dans le nombre 6 de cet article) il est évident que c'est une portion de courbe rentrante en elle-même; D'ailleurs puisque cette portion de courbe $GEB\epsilon GFA\phi G$ a un point double d'intersection en G , il s'ensuit que cette portion de courbe est une *Lemniscate* conjuguée.

9.° Après avoir mené, par le point g , une droite gH , parallèle à l'ordonnée principale GL : si l'on prend sur cette droite, de part & d'autre du point g , les portions gH , gh , l'une & l'autre égales à Gg : si par les points G & h , on mène la droite Gh , & par les points G & H , la droite GH : ces deux droites prolongées à l'infini, de part & d'autre du point G , seront asymptotes à la courbe: la 1^{re} aux branches infinies gfm , $\gamma C\mu$, & la seconde aux branches infinies geM , $\gamma\pi\xi$. D'où il suit que cette courbe est composée de quatre branches hyperboliques, & d'une *Lemniscate* conjuguée.

PROPOSITION IX.

THEOREME.

CVI. Les lignes du 4^{me} ordre peuvent être coupées par une Section conique en huit points simples, sans pouvoir l'être en un plus grand nombre de points.

DÉMONSTRATION.

* Fig. 55. Soit une ligne du 4^{me} ordre $ZMEFHXShfeV^*$, coupée au point m par une Section conique $BmNA8mD$, il faut démontrer que cette Section conique peut couper la ligne du 4^{me} ordre en sept autres points, comme $2m, 3m, 4m, 5m, 6m, 7m, 8m$, & qu'elle ne sçauroit la couper en un plus grand nombre.

Après avoir mené à discretion la ligne droite GQ (que l'on prendra pour Axe commun à la ligne du 4^{me} ordre $ZMEFHXShfeV$ & à la Section conique $BNAD$), par un point quelconque Q , de la droite GQ , on menera une droite QMN , sécante en M de la ligne du 4^{me} ordre, & en N de la Section conique : si on nomme l'abscisse GQ (z), l'ordonnée de la ligne du 4^{me} ordre QM (u), & l'ordonnée de la Section conique QN (y), le rapport de l'abscisse GQ (z) à l'ordonnée QM (u) sera exprimé par une équation qui ne sera qu'un cas particulier de l'équation générale, marquée par $(4D)^*$, puisque (par l'art. 31 du premier Mémoire) cette équation exprime la nature de toutes les lignes du 4^{me} ordre : De même le rapport des abscisses GQ (z) aux ordonnées QN (y) de la Section conique $BNAD$ sera exprimé par une équation particulière qu'on pourra toujours rapporter à l'équation générale, marquée par $(2D)^*$, puisque (par l'art. 29 du premier Mémoire, nomb. 2) cette équation exprime la nature de toutes les lignes du 2^d ordre.

Cela posé, il est évident que l'ordonnée QN (y) de la Section conique $BNAD$ devient égale à l'ordonnée QM (u)

* Voyés la Table à la fin de ce Mémoire.

* V. la même Table.

de la ligne du 4^{me} ordre dans tous les points $m, 2m, 3m, \&c.$ où ces deux courbes s'entrecoupent ou se rencontrent ; D'où il suit qu'on a alors $y = u$, ainsi l'équation (2 D) devient telle qu'on la voit marquée par (Δ).*

* Voyez la
Table à la fin de
ce Mémoire.

Maintenant, si l'on substitue dans l'équation marquée par (4 D), au lieu de l'indéterminée (u), sa valeur prise de l'équation marquée par (Δ), il est certain qu'il en viendra une équation dans laquelle il n'y aura plus qu'une seule inconnue (z) dont les racines donneront les valeurs des abscisses $Gq, G2q, G3q, G4q, G5q, \&c.$ auxquelles correspondent des ordonnées $qm, 2q2m, 3q3m, 4q4m, 5q5m, \&c.$ communes aux deux courbes $ZMEFHXS hfeV$ & $BNAD$; Or cette substitution, dont j'obtiens ici le calcul, qui est un peu long, mais qui n'a rien de difficile, ni qui ne soit à la portée de tout le monde, cette substitution, dis-je, donne l'égalité marquée par R (dans laquelle les coefficients A, B, C, D, E, F, G, H & K , sont donnés en $q, a, \epsilon, \gamma, \delta, \epsilon, \eta, \lambda, \mu, \nu, \rho, \pi, \phi, \sigma$, & en f, e, g, h, b , tels qu'on les voit représentées dans la Table qui est à la fin de ce Mémoire). Mais puisque l'égalité marquée par (R) est du huitième degré, il est évident qu'elle peut fournir huit valeurs réelles & différentes de l'indéterminée (z), & par conséquent huit abscisses $Gq, G2q, G3q, G4q, G5q, G6q, G7q, G8q$, auxquelles correspondent huit ordonnées $qm, 2q2m, 3q3m, 4q4m, 5q5m, 6q6m, 7q7m, 8q8m$, communes à la ligne du 4^{me} ordre $ZMEFHXS hfeV$, & à la ligne du 2^d ordre ou Section conique $BNAD$, & qu'il ne sçauroit y en avoir un plus grand nombre. Donc, il peut y avoir huit points simples $m, 2m, 3m, 4m, 5m, 6m, 7m$ & $8m$, communs à la Section conique & à la ligne du 4^{me} ordre, sans qu'il puisse y en avoir un plus grand nombre. Donc les lignes du 4^{me} ordre peuvent être coupées par une Section conique en huit points, sans pouvoir l'être en un plus grand nombre. *Ce qu'il falloit démontrer.*

C O R O L L A I R E.

CVII. Si la Section conique $BNAD$ passe par un des points doubles ($5m$) de la ligne du 4^{me} ordre $ZMEFH$
 * Fig. 56. $XS5mh6mfeV^*$, il y aura dans l'égalité marquée par (R) , deux racines réelles & de mêmes signes, & cela parce que le
 * Art. 12. point double est équivalent à deux points simples*.

Si cette Section conique passe par deux des points doubles
 * V. la Table de la ligne du 4^{me} ordre, l'égalité marquée par (R) * outre les
 à la fin de ce Mémoire. deux premières racines réelles égales & de mêmes signes, en
 aura encore deux autres réelles égales & de mêmes signes.

Enfin si cette Section conique $BNAD^*$ passe par les trois
 * Fig. 57. points doubles $2m$, $4m$ & $6m$ de la ligne du 4^{me} ordre
 $ZEMFHXSheZ$, l'égalité du huitième degré, marquée
 par (R) , outre la première paire de racines réelles égales &
 de mêmes signes, qu'elle doit avoir à cause du point double $2m$;
 outre la seconde paire de racines réelles égales & de mêmes
 signes qu'elle aura à cause du point double $4m$, aura encore
 une troisième paire de racines réelles égales & de mêmes signes,
 à cause du troisième point double $6m$; & cela parce que
 trois points doubles sont équivalents à six points simples,
 pris deux à deux.

R E M A R Q U E S.

CVIII. De même qu'on a démontré dans l'art. 106, que
 les lignes du 4^{me} ordre peuvent être coupées par une Section
 conique en huit points, sans pouvoir l'être en un plus grand
 nombre : on démontrera, en suivant la même méthode ;
 1.^o Que les lignes du 5^{me} ordre peuvent être coupées en
 dix points, par une Section conique, & ne sçauroient l'être
 en un plus grand nombre : 2.^o Que les lignes du 6^{me} ordre
 peuvent être coupées en douze points, par une Section conique ;
 sans pouvoir l'être en un plus grand nombre de points.
 3.^o Que les lignes du 7^{me} ordre peuvent être coupées par une
 Section conique en quatorze points, sans pouvoir l'être en un
 plus grand nombre. 4.^o Enfin que les lignes algébriques de
 l'ordre

l'ordre n peuvent être coupées, par une Section conique, en autant de points qu'il y a d'unités dans $2n$, sans pouvoir l'être en un plus grand nombre. Vérités qui ont déjà été démontrées par M. Mac-Laurin dans son sçavant Traité intitulé *Geometria organica*.

PROPOSITION X.

THEOREME.

CIX. Une ligne qui a quatre points doubles ne sçauroit être du 4^{me} ordre.

DÉMONSTRATION.

Soit * une ligne courbe *ZMBEGFGRCRVDVX*, * Fig. 58. dont on connoît les quatre points doubles *B, G, R & V*. Je dis que cette ligne ne sçauroit être du 4^{me} ordre. Après avoir pris à discretion sur cette même courbe un point simple quelconque *M*, par les quatre points doubles donnés *B, G, R, V*, & par le 5^{me} point *M*, pris à discretion, faites passer une Section conique *OAH*, (ce qui est toujours possible par l'art. 180 des Sections coniques de M. le M. de l'Hôpital) il est visible que la Section conique coupera la courbe qui a les quatre points doubles *B, G, R, V*, en neuf points; Car chaque point double étant équivalent à deux points simples *, les quatre points doubles sont équivalents à huit points simples, & le point d'intersection *M* fait le neuvième; Or, par l'art. 106, les lignes du 4^{me} ordre ne sçauroient être coupées par une Section conique en plus de huit points. Donc puisque la courbe *ZMBEGFGRCRVDVX*, qui a les quatre points doubles *B, G, R & V*, peut toujours être coupée par une Section conique *OAH* en neuf points, il s'ensuit que cette courbe ne sçauroit être du 4^{me} ordre. Ce qu'il falloit démontrer. * Art. 12.

COROLLAIRE.

CX. Il suit de-là & de l'art. 83, qu'une ligne du 4^{me} ordre, ne sçauroit avoir plus de trois points doubles.

Mem. 1730.

. Iii

REMARQUES.

CXI. Après avoir prouvé qu'une ligne du 4^{me} ordre ne sçauroit avoir plus de trois points doubles, on démontrera de même, 1.^o Qu'une ligne du 5^{me} ordre ne sçauroit jamais avoir plus de six points doubles. 2.^o Qu'une ligne du 6^{me} ordre ne sçauroit en avoir plus de dix. 3.^o Qu'une ligne du 7^{me} ordre ne sçauroit en avoir plus de quinze. 4.^o Qu'une ligne du 8^{me} ordre ne sçauroit en avoir plus de vingt-un, & ainsi de suite, suivant la progression des nombres triangulaires. Enforte que si n exprime, par le nombre de ses unités, l'ordre d'une ligne quelconque, le nombre des points doubles, dont les lignes de cet ordre sont susceptibles, sera exprimé par le nombre triangulaire, qui dans le Triangle de M. Pascal correspond au nombre naturel $n - 1$. Or, on sçait que le nombre triangulaire, correspondant au nombre naturel $n - 1$, est $\frac{n-1 \cdot n-2}{2} = \frac{nn-3n+2}{2}$; Donc cette expression $\frac{nn-3n+2}{2}$ exprime toujours, par le nombre de ses unités, le plus grand nombre de points doubles dont une ligne de l'ordre exprimé par n est susceptible. Vérité qui n'avoit pas encore été remarquée jusqu'ici.

AVERTISSEMENT.

Ce Mémoire étant déjà trop long, on a été obligé, après qu'il a été lu à l'Académie, d'en retrancher, à l'impression, une grande partie, pour laisser de la place aux Mémoires suivants. Ce qu'on a retranché de celui-ci concerne les Osculations de deux branches d'une même courbe, & les Lemniscates infiniment petites : propriétés singulières dont les lignes algébriques ne deviennent susceptibles que lorsqu'elles sont du quatrième ordre, ou d'un ordre supérieur au quatrième. On a donc pris le parti de renvoyer tout ce qui regarde cette Théorie à un troisième Mémoire, qu'on a remis dans les Registres de l'Académie, avec celui où il est traité des différentes sortes de points triples qu'on rencontre souvent sur les lignes du quatrième ordre. Ce qui doit précéder l'énumération de ces mêmes lignes.



DE LA CAPSULE DU CRISTALLIN.

Par M. PETIT le Médecin.

NOUS avons dit, dans nôtre précédent Mémoire, que le Cristallin est enchassé dans la partie antérieure de l'Humeur vitrée comme un diamant dans son chaton, & y est retenu par une membrane qui l'enveloppe, & qui pour cela est nommée la *Capsule du Cristallin*. 16 Aoust 1730.

Cette membrane est aussi appelée *Arachnoïde* par les Anatomistes, parce que sa finesse la fait ressembler à une toile d'Araignée.

D'autres l'ont nommée *Cristalloïde*. Quelques-uns ont douté de son existence ; ce qui est d'autant plus étonnant, que Galien* en a parlé, & la fait ressembler à une pellicule d'Oignon, à laquelle aussi Vésale* la compare : il la fait encore ressembler à de la Corne très-fine & très-transparente. Casserius Placentinus* en donne la description. Bartholin & d'autres ont parlé de cette Membrane. Après cela il n'y avoit qu'à la chercher, elle n'est pas difficile à trouver dans les Animaux à quatre pieds, principalement dans le Mouton, le Bœuf & le Cheval ; & quoiqu'elle soit un peu plus difficile dans l'Homme, on la trouve facilement aussi-tôt qu'on l'a vû démontrer une seule fois ; ce qu'il y a de surprenant, c'est que Brigs* n'en dit pas un seul mot, & qu'un aussi habile Anatomiste que Ruisch ait douté long-temps de son existence. * De Oculis, cap. 3.
* Lib. 7. c. 14.
* Lib. 5. c. 16. edit. 1622.
* Ophthalmographia.

Voici comme il s'en explique lui-même* : *De hujusce membranae existentia Anatomici alii aliter sentiunt : quidam illam dari negant, nonnulli ambigant, alii eandem admittunt ; ipse quoque diu anceps hæsi. Quid de hoc negotio statuerem ! verum cum replevissem arterias Oculi ovini cereâ materiâ, aperiebam Oculum ; membranasque perscrutabar, & sic videbam per membranam araneam plurimas arteriolas dispersas.* * Thesaurus. Anat. 2. p. 37.

assuré de cette membrane que par l'injection, quoique très-facile à démontrer dans le Mouton.

Cette Capsule est adhérente par sa partie postérieure à la membrane hyaloïde ou vitrée; on peut les séparer facilement l'une de l'autre sans le secours du ciseau ou du scalpel, ce qui ne se peut à l'endroit où la Vitrée fait une continuité avec cette membrane dans toute la circonférence du Cristallin, car il faut se servir d'un instrument tranchant pour les séparer. La partie antérieure de cette Capsule se divise facilement de la circonférence au centre, & du centre à la circonférence, selon la rectitude de ses fibres.

* *Hist. de
l'Acad. des Sc.
année 1722.
p. 16.*

Quelques Anatomistes* ont crû que cette Capsule tient au Cristallin par ses bords. Mais si l'on dissèque cette partie avec attention, on trouvera que cette Capsule ne tient en aucun endroit du Cristallin. D'autres disent hardiment qu'elle n'est point continuë avec la membrane hyaloïde, parce que, disent-ils, il s'ensuivroit que du moment que cette Capsule seroit altérée, son altération se communiqueroit infailliblement à la membrane hyaloïde, elle la corromproit, & rendroit par-là inutiles toutes les opérations des Cataractes cristallines, puisque la membrane du corps vitrée perdrait sa transparence. 1.° Il ne faut que des yeux pour voir la continuité de la Capsule avec la membrane hyaloïde, cela se découvre avec la même facilité que l'on voit que la peau du bras est continuë avec celle de la main. 2.° Il ne s'ensuit pas de ce qu'une membrane est continuë avec une autre, que les altérations se communiquent infailliblement de l'une à l'autre; une inflammation peut occuper une partie de la main sans se communiquer à l'autre partie, quoique la peau soit continuë. 3.° L'espece d'altération, dont on entend parler, qui est sans doute l'opacité de la Capsule, ne se doit rencontrer que bien rarement; je ne l'ai jamais trouvée opaque dans aucune des Cataractes que j'ai vû sur le mort, & l'on verra dans la suite de ce Mémoire, que je n'ai pû la rendre opaque par la plupart des esprits acides. J'ai une fois rencontré une

tâche blanche, ronde, d'une ligne de diametre dans cette Capsule, mais qui s'est dissipée, en frottant la partie interne de cette Capsule, ce n'étoit que des particules du Cristallin devenues blanches & opaques, & qui sont restées sur la surface interne de la Capsule, lorsque je l'ai enlevée, & supposé que cette membrane devienne opaque, il ne seroit pas possible de déterminer si c'est le Cristallin ou la membrane, en l'examinant à travers la Cornée.

Il est très-difficile de déterminer l'épaisseur de cette Capsule, elle est dans l'Homme une fois plus épaisse qu'une toile d'araignée, elle est plus fine de la moitié à sa partie postérieure. On la trouve de cette dernière finesse dans la Carpe, le Barbeau, le Brochet, l'Anguille, & d'autres Poissons de cette sorte. Le Marsoûin a cette Capsule un peu plus épaisse que celle de l'Homme, je l'ai vû une fois aussi épaisse dans la Carpe de Mer.

Je l'ai vû dans le Bœuf une fois plus épaisse que dans l'Homme. Elle est plus épaisse dans le Cheval que dans le Bœuf.

Le Chien, le Chat, le Loup, le Lapin, le Lievre l'ont tant soit peu plus épaisse que celle de l'Homme. Elle est plus épaisse dans le Mouton que dans ces Animaux, mais moins que dans le Bœuf.

Malgré la finesse de cette membrane dans l'Homme, elle n'y est pour-tant pas si transparente à sa partie antérieure, que dans les autres Animaux qui l'ont beaucoup plus épaisse, comme le Bœuf & le Cheval.

Si l'on regarde la partie postérieure du Cristallin, de quelque âge que ce soit, enveloppé de sa Capsule, on y trouve plus de transparence, que lorsqu'on le regarde par sa partie antérieure qui paroît tant soit peu terne; mais si on enleve la Capsule, le Cristallin paroît également transparent des deux côtés. J'ai néanmoins vû des Cristallins d'Homme, dont la partie antérieure de la Capsule étoit aussi transparente que la postérieure. Elle est d'une très-grande transparence dans ses deux surfaces dans tous les Animaux à quatre pieds, les Oiseaux & les Poissons.

Le ligament ciliaire qui prend son origine du plus grand cercle de l'Uvée, s'attache & se termine tout à l'entour de la partie antérieure de la Capsule sur laquelle ce ligament prolonge ses fibres, & les vaisseaux qu'il lui fournit. Il y a des Anatomistes qui ont crû que ce ligament s'attache au Cristallin. Briggs est de ce sentiment, les vaisseaux que le ligament fourni à la Capsule ne sont que des lymphatiques qui dégorgent & répandent leurs liqueurs dans la cavité de la Capsule. Il se trouve des occasions où ces vaisseaux sont remplis de sang, & pour lors on les voit ramefiés sur la partie antérieure de la Capsule, je n'en ai jamais trouvé à la partie postérieure. Ces vaisseaux sont formés par plusieurs petits troncs qui ont leur racine dans le ligament ciliaire, leurs ramifications sont dirigées vers le centre de la capsule, & forment entr'elles des anostomoses, c'est ce que j'ai vû dans quelques Enfants nouveau-nés, mais dans un jeune Marsoüin, la Capsule paroissoit seulement rougeâtre, il a fallu se servir d'une Loupe, pour y reconnoître la distribution des vaisseaux qui étoit la même que dans les Enfants. La Tête de ces Enfants avoit resté long-temps au passage de la Matrice dans des accouchements laborieux. Les parties extérieures de la Tête étant comprimées, le Sang n'a pû y circuler, & s'est porté dans les parties intérieures où il s'est trouvé pour lors en très-grande quantité, il a forcé les embouchures des vaisseaux lymphatiques qui se trouvent très-disposés à se dilater dans les nouveau-nés, & à donner passage au Sang qui les remplit ; mais dans le jeune Marsoüin cela est arrivé d'une manière un peu différente, il avoit été pêché avec sa mere, qui avoit les mammelles remplies de lait. Lorsqu'on tire les Poissons de l'eau, on les jette rudement dans les Barques où ils se débattent avant que de mourir, & comme ils sont couchés sur le côté, les parties extérieures de la Tête & des Yeux se froissent & se meurtrissent, & pour lors le Sang qui se trouve dans les parties extérieures du globe de l'Oeil, n'y pouvant circuler, force les embouchures des vaisseaux excrétoires-intérieures, dans

lesquels il s'introduit, comme je l'ai dit des Foetus humains.

Les vaisseaux de la Capsule n'étoient point remplis dans la mere de ce jeune Marsoüin, dont j'ai disséqué les Yeux. J'ai encore vû ces vaisseaux seringués dans un Foetus & dans quelques Chats chés un Médecin Anglois qui étoit à Paris. Il en avoit injecté plusieurs, dont quelques-uns avoient réüssis avec du suif seul, coloré avec le cinabre. Le suif avoit été mis en digestion pendant quinze jours dans un Matras sur le sable avec son vaisseau de rencontre.

J'ai disséqué les Yeux de trois Hommes, morts à la Charité avec de grandes inflammations aux yeux ; j'ai examiné la Capsule du Cristallin, je n'y ai trouvé aucun vaisseau rempli de sang.

J'ai examiné avec un grand soin les Capsules des Sujets dont les vaisseaux se sont trouvés seringués ou remplis de sang, pour voir si quelques-uns de ces vaisseaux se continuoient dans le Cristallin ; mais quelque précaution que j'aye prise, je n'en ai trouvé aucun, ni dans les Foetus dont les vaisseaux de la Capsule étoient remplis de cire ou de sang, ni dans les Chats & le jeune Marsoüin dont j'ai parlé, ni dans quelques Cristallins de Veau dans lesquels l'injection avoit réüssi.

Le célèbre M. Ruisch^a, qui paroît avoir injecté plusieurs Animaux, dont il a examiné les Yeux, ne dit rien des vaisseaux du Cristallin, quoiqu'il décrive les vaisseaux de la Capsule ; il dit même une chose qui lui est arrivé, & qu'il est bon de rapporter : Ayant, dit-il, rempli de cire un Oeil de Mouton, & disséqué cet Oeil, je remarquai plusieurs arteres^b dispersés sur la membrane arachnoïde ; je mis ce Cristallin avec la Capsule dans une liqueur limpide, mais le jour suivant voulant examiner les mêmes vaisseaux, je ne les trouvai plus.

La raison qu'il en donne me paroît très-plausible : J'avois, dit-il, rempli de matière de cire (*cerea materia*) les arteres de l'Oeil jusques près le Cristallin, où elle étoit restée sans

^a *Thesaur. Anatom. 2. p. 37.* c'est la suite du même endroit que j'ai rapporté ci-dessus, page 111.

^b Il veut dire, les vaisseaux lymphatiques arteriels.

» pénétrer dans la membrane arachnoïde qui enveloppe le
 » Cristallin, mais la matière de cire ayant poussé devant elle
 » le sang qu'elle avoit trouvé dans les arteres, avoit tellement
 » rempli les vaisseaux de la membrane arachnoïde, que la cire
 » n'y a plus trouvé de passage, & ce sang a été dissout & dis-
 » sipé par la liqueur dans laquelle on a mis tremper le Cristallin
 » avec sa Capsule. Je rapporte ceci, afin que ceux qui feront
 ces sortes d'injections prennent garde à cette circonstance,
 peut-être n'y avoit-il que du sang dans toutes les Capsules
 que j'ai vû.

* *Tractatus*
de circuli hu-
morum motu in
Oculis.

Pag. 45.

Examinons présentement ce que pense Hovius * sur cette
 matière, lui qui paroît avoir fait quantité d'injections pour
 les Yeux seuls. Il croit que le Cristallin a des vaisseaux qui
 pénètrent sa substance. Il dit d'abord, que le Cristallin est un
 tissu de vaisseaux transparents neurolymphatiques qui portent
 & rapportent la lympe, recouvert d'une tunique transpa-
 rente & très-fine: *Est itaque humor cristallinus contextum mere*
vasculosum è nervis pellucidis neuroque lymphaticis, tum ad, tum
ab ducentibus vasis, constructum, tenuissima & pellucida tunica ob-
ductum. Voyés, dit-il, la Figure 4, Tab. 5. Voici l'explica-
 tion qu'il donne de cette Figure *.

Pag. 152.

Humor est cristallinus nostra methodo resolutus cum vasculis
fluctuantibus depictus. Voilà le titre de cette explication. La
 Figure, dit-il, représente un Cristallin résout ou dissout par
 une méthode qui lui est particulière avec des vaisseaux qui
 flottent, c'est pourtant ce que l'on n'y voit point, elle repré-
 sente plutôt la première partie de son explication. A, *cristal-*
linus est humor, more nostro post tunicæ ablationem in laminas
divisus. Effectivement le Cristallin paroît fendu du centre à
 la circonférence, comme s'il l'avoit mis tremper dans quelque
 liqueur acide, ou qu'il l'eût fait bouillir de même que ceux
 que j'ai démontré à l'Académie. On voit autour de ce Cris-
 tallin une distribution de vaisseaux toute semblable à celle
 que j'ai vûe à la partie antérieure de la Capsule, injectée elle

* Il est bon de voir cette Figure dans Hovius même, en lisant cet endroit
 du Mémoire.

est

est divisée & ouverte en plusieurs parties pour découvrir le Cristallin. Il dit que ce sont des vaisseaux du Cristallin séparés des lames supérieures du Cristallin. BB, *vascula sunt cristallina conquassatione è laminis superioribus, divulsa, expansa*. Il les a séparé *conquassatione*, par les secousses & les battiements, apparamment dans de l'eau, c'est ce qu'il faut deviner sur le titre de cette Figure, *cum vasculis fluctuantibus*, ce qui marque que c'est dans quelque liqueur qu'il a battu ce Cristallin. Il s'est peut-être imaginé que l'on pourroit croire que le Cristallin peut se dissoudre de manière qu'il n'en reste que les vaisseaux comme il arrive au Foye, dont on peut séparer les vaisseaux de la substance glanduleuse, après l'avoir fait macérer quelque temps dans l'eau : mais il y a bien de la différence, le Foye a des vaisseaux capables de résister aux secousses & aux battiements que l'on est obligé de faire, encore les faut-il bien ménager pour ne rompre de vaisseaux que le moins qu'il est possible. Il ne faut pas s'attendre de conserver des vaisseaux aussi fins que ceux qu'il suppose dans le Cristallin, il s'en brise de bien plus gros que l'on ne peut conserver. Si on bat un Cristallin dans l'eau avant de l'avoir laissé tremper quelque temps, on le brise en plusieurs molécules, dans lesquelles on ne voit aucun vaisseau lymphatique, pas même avec le Microscope, on n'y remarque que les fibres que j'ai démontrées à l'Académie. Si l'on fait tremper le Cristallin dans l'eau pendant quelques jours, les fibres qui le composent se dissolvent, & deviennent une matière semblable à de la bouillie; s'il y avoit des vaisseaux différents de ces fibres, on devroit en trouver quelques ramifications, car ces vaisseaux doivent être différents des fibres par leur direction.

Supposé qu'il y eût des vaisseaux remplis d'injection, ils ne pourroient facilement se séparer de la substance du Cristallin, & laisser cette substance divisée en lame, comme il le dit, tout doit se séparer en molécules, des vaisseaux si délicats se briseroient encore plus facilement que les autres parties du Cristallin.

Enfin Hovius dit, en comparant les vaisseaux de l'Humeur P. 45. & 46.

Mem. 1730.

. K k k

vitree avec ceux du Cristallin, que ceux de l'Humeur vitree sont longs, & ont peu de subdivision, que ceux du Cristallin sont plus étroits & plus serrés, & dont on ne peut trouver les subdivisions, *In Cristallino vero arctiora & firmitus compacta sunt, imperscrutabiles subeunt subdivisiones*; & il répète encore qu'on ne peut trouver les subdivisions de ces vaisseaux qui sont pourtant, selon lui, entre les lames qui composent le Cristallin, néanmoins il représente les divisions & les subdivisions de ces vaisseaux, c'est donc par imagination, il ne dit pas un mot des vaisseaux de la Capsule. Il faut pourtant que ces vaisseaux passent à travers la Capsule, pour aller au Cristallin. Il démontre dans la Table 4, Fig. 3, 4 & 5, les vaisseaux qui vont à la Membrane vitree & à l'Humeur vitree, & ne parle point de ceux qui vont à la Capsule du Cristallin, sans doute qu'elle a aussi des vaisseaux, nous les avons vû. Hovius auroit dû nous représenter les tiges de ces vaisseaux, ceux qui se distribuënt dans la Capsule, & l'endroit où ils percent le Cristallin, mais au lieu de cela il représente deux choses qui me paroissent incompatibles sur un même Cristallin. 1.° La séparation des prétendus vaisseaux du Cristallin. 2.° La substance du même Cristallin divisée en lames. Que résulte-t-il de cette Figure? Les vaisseaux qu'il représente sont les vaisseaux, tels qu'il les a vû s'ériger dans la Capsule, & qu'il attribué aux lames supérieures du Cristallin. Il aura mis ce Cristallin dans quelque liqueur acide, ou dans l'eau bouillante, comme j'ai fait, qui étant séché à l'air, se divise en lame, & pour lors ces deux choses peuvent se trouver ensemble.

Après tout, il ne dit point quels sont les Animaux dont il a employé les Yeux pour faire les observations, dont nous venons de parler, il devoit du moins dire le nom de l'Animal, dont il représente le Cristallin avec ses vaisseaux: outre cela il se tient très-reservé sur les moyens dont il s'est servi dans ses prétendues préparations. Il ne l'est pas moins sur la matière de son injection, qu'il ne declare point. A dire le vrai, tout cela m'est fort suspect dans un Homme qui dit, qu'il seroit indigne

à un honneste Homme de cacher les découvertes sur l'Humeur aqueuse, la Vitree & le Cristallin.

S'il y avoit quelque vaisseau qui passât de la Capsule dans le Cristallin, j'avois lieu d'espérer de les trouver dans les Yeux séringués ou remplis de sang, que j'ai disséqués avec toute la précaution possible; on pourroit, & même on devroit découvrir ces vaisseaux dans les Cristallins des Yeux de Chevaux qui ne sont point séringués, ou dans les Cristallins de gros Poissons, mais on n'y rencontre pas la moindre fibre qui communique de la Capsule au Cristallin; il n'y a donc aucune communication du Cristallin avec sa Capsule; c'est ce que M. Antoine*, le plus habile Oculiste de son temps, avoit remarqué: d'où il conclut que *de toutes les parties de notre corps, le Cristallin est la seule partie qui n'a point de continuité avec ses voisines par aucune fibre ni vaisseau.*

* *Traité des Maladies de l'Oeil, descrip. de l'Oeil du Cristallin, ch. 1. 2.*

Je n'ai jamais trouvé cette Capsule opaque dans aucun des Yeux que j'ai disséqués, soit d'Homme, soit d'Animaux à quatre pieds, & je l'ai trouvée toujours transparente dans toutes les Cataractes que j'ai disséquées dans les Cadavres; & ce qu'il y a de singulier, c'est que la Cornée & la membrane hyaloïde trempées dans l'eau bouillante, ou dans des Esprits acides, ou dans l'Esprit de Vin, deviennent opaques presque dans le moment qu'on les y met, néanmoins la membrane cristalline ne devient opaque que dans l'Esprit de Nitre. Ce n'est pas même une entière opacité, elle se dissout le plus souvent dans cet Esprit, & quelquefois dans l'Esprit de Sel, & lorsqu'elle ne se dissout point dans le dernier, elle y conserve sa transparence. J'ai quantité d'expériences de Cristallins de Bœuf trempés dans l'Esprit de Sel pur, la membrane est restée entière, transparente, ferme, & se soutenoit par elle-même, quoique le Cristallin fût très-opaque. Cette membrane ne se dissout point dans les autres Esprits acides, & y conserve toujours sa transparence, néanmoins tous les Cristallins que l'on met dans ces Esprits avec leur Capsule, deviennent opaques, comme je l'ai dit, il faut pour cela que la liqueur traverse cette Capsule. La même chose est arrivée aux Cris-

tallins trempés dans les dissolutions de plusieurs sortes de Sels.

Cette membrane est extensible, comme il est facile de le remarquer par le gonflement qui lui arrive en la soufflant par une petite incision qu'on y fait exprès, je l'ai fait voir à l'Académie, puis elle se remet dans son premier état, ce qui marque son ressort qui lui est nécessaire, afin qu'elle s'étende & se ressert toutes les fois qu'il se répand de la liqueur dans sa cavité, & qu'elle se dissipe.

Quelques-uns croient que cette Capsule comprime le Cristallin & l'appplatit au moyen de la contraction des fibres qui composent le ligament ciliaire, qui étant pris pour un sphincter; & les fibres qui composent la Capsule, pour les tendons des fibres du ligament, lorsque les fibres de ce ligament ciliaire se mettent en contraction, elles tirent leurs tendons, étendant la Capsule, compriment la surface du Cristallin & l'appplatissent. Mais ces fibres me paroissent bien foibles pour un tel office, qui demande plus de force pour vaincre le ressort du Cristallin; outre cela ces fibres s'attachent obliquement de devant en derrière sur la circonférence de la Capsule, principalement dans l'Homme, ce qui la rendroit plus capable de faire avancer le Cristallin en devant; si cela se pouvoit, il vaudroit mieux rapporter cet effet à l'effort des muscles des Yeux: j'espère donner un Mémoire sur cette matière.

Cette Capsule a trois usages. 1.^o Elle retient le Cristallin dans le chaton de l'Humeur vitrée, sans qu'il puisse changer de situation. L'on remarque qu'aussi-tôt que cette membrane est ouverte dans le vivant par quelques coups reçus sur l'Oeil, le Cristallin sort de son chaton, & s'applique sur la partie postérieure de l'Uvée, où il ne reste pas long-temps sans devenir louche, puis opaque, comme l'expérience le fait voir; parce qu'il est gonflé par l'Humeur aqueuse dont il s'imbibe. Cette liqueur écarte inégalement les fibres du Cristallin les unes des autres, les couchées ne se trouvent plus parallèles, ce qui déränge la direction des pores pour le passage de la lumière, & forme l'opacité. Il arrive la même chose à un Cristallin trempé dans l'Eau commune.

2.° Cette Capsule sépare le Cristallin de l'Humeur aqueuse, & empêche qu'il ne soit incessamment baigné de cette humeur, qui en l'humectant, le feroit gonfler, comme je viens de le dire.

3.° Les vaisseaux lymphatiques fournissent une liqueur qu'ils répandent dans sa cavité, dont le Cristallin est incessamment humecté *. En quelque endroit que l'on perce cette Capsule à la partie antérieure ou postérieure, on voit sortir ordinairement cette liqueur, après quoi la Capsule se flétrit, & perd sa tension à proportion de la quantité de la liqueur qui s'est épanchée. Il arrive quelquefois qu'en perçant cette membrane à sa partie antérieure, elle se fend tout aussi-tôt jusqu'à la circonférence, c'est ce que j'ai vû dans l'Oeil de la Carpe de Mer, de quelques Chats ; je l'ai aussi vû dans des Yeux de Bœuf que j'avois fait tremper dans l'eau pendant vingt-quatre heures, ce qui n'arrive que parce que le Cristallin est imbibé & gonflé de liqueur, & que pour lors il est fort serré par la Capsule, qu'il déchire en se dilatant dans le moment qu'on fait l'ouverture. Le Cristallin se fend quelquefois lui-même par trois rayons du centre à la circonférence. Les Yeux trempés dans l'eau n'ont pas toujours leurs Cristallins gonflés, mais on y trouve toujours une certaine quantité de liqueur qui a pénétré toutes les membranes, & qui s'est introduite dans la cavité de la Capsule.

Je n'en ai jamais trouvés dans l'Homme dont la Capsule se soit déchirée après les avoir percés. L'on en rencontre même, dans ceux qui n'ont point été trempés, qui ne donnent aucune liqueur. Mais la surface interne de cette Capsule & la surface externe du Cristallin se trouvent humectées, il n'y a quelquefois de liqueur que dans un Oeil, il n'y en a point dans l'autre, ce que j'ai trouvé aussi dans quelques Animaux à quatre pieds.

* M. Antoine Maistrejean, dans son *Traité des Maladies de l'Oeil*, Description de l'Oeil, chap. 14, a dit par conjecture, qu'il y a un suc nourricier qui s'épanche dans la cavité de la Capsule, dont le Cristallin est tout aussi-tôt imbibé : il ne dit point qu'il ait vû ce suc.

Cette liqueur est claire, transparente & très-liquide dans l'Homme, le Chien, le Chat, le Loup, le Lièvre, le Lapin, le Mouton, l'Agneau, le Veau ; celle que l'on trouve dans le Bœuf & le Cheval est visqueuse, & file comme l'Humeur vitrée, filtrée par le papier gris.

*Adverf. 6 ;
p. 202*

M. Morgagni a trouvé cette liqueur dans la Capsule du Cristallin de l'Homme, du Bœuf, du Veau, dans lesquels pourtant il ne l'a pas toujours rencontrée ; il ne l'a pas vûe dans les Poissons, mais il dit que quelques-uns l'y ont trouvée.

J'ai trouvé cette liqueur dans un seul Marfoüin, de plusieurs que j'ai disséqués : je n'en ai point trouvé dans un grand nombre d'autres Poissons, mais la partie extérieure de leur Cristallin étoit très-humectée, ce qui la rend très-molle dans quelques Poissons, quoique la partie intérieure de ces mêmes Cristallins se trouve quelquefois dure comme de la Corne. J'ai encore trouvé cette liqueur dans le Dindon & le Canard.

Généralement parlant, plus les Cristallins sont gros, plus on trouve de cette liqueur ; neantmoins on en trouve dans les Lapins & les Lièvres, davantage que dans le Mouton qui a le Cristallin plus gros. Je n'ai jamais trouvé le Cristallin du Lapin & du Lièvre sans cette liqueur.

Pour trouver, avec autant de précision qu'il est possible, la quantité de cette liqueur, il faut tirer de l'Oeil le Cristallin avec sa Capsule, le peser dans une balance qui puisse trébucher du moins à un demi-grain, après quoi il faut ouvrir la Capsule du Cristallin à sa partie antérieure & postérieure avec une Lancette ou un Scalpel très-fin, en faire sortir la liqueur par une légère pression, & l'imbiber avec une éponge, afin qu'il ne reste que le moins qu'il est possible ; dessus & dedans la Capsule, dont il ne faut point dépouiller le Cristallin, puis le peser. La diminution du poids fera connoître la quantité de liqueur contenue dans la Capsule. C'est de cette manière que j'ai trouvé que la Capsule du Cristallin de l'Homme en contenoit un demi-grain, lorsqu'il s'y en est rencontré ; j'en ai trouvé jusqu'à un grain dans les Yeux que j'ai mis tremper dans l'eau pendant vingt-quatre heures,

J'en ai trouvé au plus un grain & demi dans les Yeux du Chien-dogue : deux grains dans ceux du Mouton.

Le Lapin & le Lièvre en contiennent jusqu'à 2 grains & demi : le Bœuf en a au plus 4 grains, & j'en ai trouvés jusqu'à 12 grains dans quelques Yeux de Chevaux.

J'ai voulu faire des expériences sur cette liqueur, il n'y a pas moyen de la faire sur celle de l'Homme, je n'ai pu en ramasser un seul grain de dix-huit Yeux ; le peu qu'il en a ne peut se rassembler pour former une goutte, & ne se détache pas du Cristallin & de la Capsule. On ne peut non plus en rassembler assés dans les Yeux de Mouton pour faire une seule expérience ; car en supposant que tous les Yeux de Mouton contiennent chacun 2 grains de cette liqueur, on pourroit au plus en retirer un grain de chacun, il faudroit du moins dix-huit ou vingt Yeux pour en réunir assés pour faire une expérience, mais on ne trouveroit peut-être qu'un de ces Yeux qui contiendrait 2 grains de cette liqueur, & il s'en trouveroit beaucoup qui n'en contiendroient pas un grain & demi, on n'en trouve quelquefois qu'un grain, ainsi de quarante ou cinquante Yeux de Mouton, à peine en trouveroit-on assés pour faire une seule expérience. J'ai donc été obligé de me servir de la liqueur que l'on trouve dans la Capsule du Cristallin des Yeux de Bœufs & de Chevaux, qui, comme je l'ai dit, file & contient beaucoup de parties visqueuses capables de produire plus de coagulum & de précipité que celle de l'Homme & de quelques Animaux.

J'ai mêlé de cette liqueur avec l'Esprit de Sel, le mélange est devenu blanc, après quoi il s'est fait un précipité blanc ; elle s'est moins troublée avec l'Esprit de Vitriol.

Il ne s'est fait aucun changement avec l'Esprit de Nitre, ni avec l'Huile de Vitriol. Il s'est pour-tant trouvé de cette liqueur cristalline qui s'est troublée avec l'Esprit de Nitre & de Vitriol, comme il s'en est trouvé qui ne se sont point troublés avec l'Esprit de Sel & de Vitriol, mais rarement.

Cette liqueur a deux usages, 1.^o elle empêche que le Cristallin ne se dessèche ; 2.^o elle lui fournit sa nourriture.

Le Cristallin ne peut se dessécher pendant qu'il est humecté de cette liqueur, mais aussi-tôt qu'elle lui manque, il devient sec, dur & opaque, & peut se mettre en poudre; c'est ce que j'ai vû plusieurs fois sur des Cadavres, j'en ai donné une observation à M. Brisseau, qu'il a inséré dans son *Traité de la Cataracte & du Glaucome*, cet accident arrive à la suite d'une inflammation qui pénètre jusqu'au ligament ciliaire, & qui a suppuré. Les vaisseaux qui composent le ligament ciliaire se détruisent, & ce sont ces vaisseaux qui fournissent non-seulement l'humeur aqueuse, mais encore la liqueur qui se répand dans la Capsule du Cristallin, & qui y est chariée par les vaisseaux qui partent du ligament, & sont ramefiés dans la partie antérieure de la Capsule, & peut-être aussi dans la partie postérieure.

L'Humeur aqueuse n'étant plus fournie, à mesure qu'elle se dissipe, les membranes se resserrent, le Cristallin est poussé en devant avec la Capsule sur la partie postérieure de l'Uvée où elle se colle. Mais le Cristallin n'étant plus humecté par sa propre liqueur cristalline, se dessèche & s'attache à la surface interne de la Capsule, & voilà ce qui a fait le fondement de toutes les Cataractes membraneuses, comme je le dirai dans mon *Mémoire de la Cataracte*; c'est de-là aussi que quelques Anatomistes ont déduit l'opacité de la Capsule*, parce que lorsqu'on a retiré cette Capsule de l'Oeil, on la trouve opaque & épaisse, mais ils n'ont pas pris garde qu'elle n'est épaisse que parce qu'il reste sur cette Capsule un peu de matière du Cristallin sèche & opaque: si l'on prend le soin de la mettre dans l'eau, comme j'ai fait, pour détremper cette matière, on la sépare facilement de la Capsule que l'on trouve dans son épaisseur & sa transparence naturelle.

Cette liqueur sert encore de nourriture au Cristallin; qui selon toute apparence, ne se nourrit pas de la même manière que toutes les autres parties de nôtre corps, puisque nous n'avons trouvé aucuns vaisseaux qui communiquent de la membrane dans le Cristallin.

Il semble que cette liqueur étant épanchée dans la cavité
de

* *Hist. de l'Ac.*
1722. p. 15.
et 16.

de la Capsule, & qui environne de tous côtés le Cristallin, peut le nourrir de l'une des deux manières suivantes. La première est qu'elle pénètre le Cristallin dans toute sa substance, & pour lors il se fait une application de cette liqueur dans toutes les fibres du Cristallin, c'est le sentiment de M. Antoine, il dit que le Cristallin est nourri par imbibition.

La seconde est que la partie la plus séreuse de cette liqueur s'imbibe dans la substance du Cristallin, & y va entretenir la transparence pendant que la partie la plus visqueuse reste sur la superficie du Cristallin s'y unit, en y formant une couche, ce qui est d'autant plus vrai-semblable que tous les Cristallins se trouvent formés par ces sortes de couches. D'ailleurs il n'y a point de doute que le Cristallin ne puisse s'imbiber de la liqueur qui l'environne. Il en est quelquefois si gonflé dans certains Animaux qu'il se fend en trois rayons du centre vers la circonférence aussi-tôt qu'on le tire de sa Capsule, comme je l'ai dit ci-dessus.



O B S E R V A T I O N DE L'ECLIPSE DU SOLEIL,

Faite à son lever, le 15 Juillet de cette année 1730.

Par M. C A S S I N I.

15 Juillet
1730.

LE Soleil devant paroître éclipsé le 15 Juillet de cette année 1730, à son lever, nous observâmes, la veille, l'endroit de l'horizon où il commençoit à paroître, afin de choisir pour nôtre Observation un lieu où on le pût voir commodément, sans qu'il fût couvert par les Maisons ou Eglises qui sont, à l'égard de l'Observatoire, dans la partie de l'horizon qui est entre le Nord & l'Est où on devoit l'appercevoir, & nous observâmes le commencement de son lever à 4^h 9'.

Le matin du 15 je dressai une Lunette de 8 pieds, garnie de mon Micrometre à réticules au point de l'horizon où je l'avois vû la veille. Il étoit couvert en partie de nuages, entre lesquels on voyoit cependant quelques endroits clairs, ce qui faisoit espérer qu'on pourroit en faire quelques Observations.

Le Soleil commença à poindre sur l'horizon à 8^h 9', mais il entra dans un nuage étroit, dont il sortit quelques minutes après, & à 9^h 15' 10" il parut assés distinctement éclipsé dans sa partie inférieure d'environ 3 doigts, à ce que je pus juger ; car ayant essayé de mesurer la quantité de l'Eclipsé avec le Micrometre, dont les fils extrêmes comprenoient le diametre horizontal du Soleil, je trouvai que son diametre vertical étoit beaucoup plus petit, ce qui est l'effet ordinaire de la réfraction. Je fus donc obligé de mesurer l'intervalle entre un fil parallele qui passoit par les deux cornes & le fil qui touchoit la concavité de l'Eclipsé que je trouvai d'un doigt six minutes, dont le double, supposé le diametre du Soleil égal à celui de la Lune, dont il ne différoit pas sensi-

blement, mesure la quantité de l'Eclipse, qui étoit par conséquent de deux doigts douze minutes.

Cette quantité de l'Eclipse doit être augmentée dans le rapport du diametre horizontal au diametre vertical, qui, comme on l'a dit, étoit diminué par l'effet de la réfraction.

Le Soleil entra ensuite dans un nuage, dont il ne sortit que quelques minutes après, & à $9^h 27' 20''$ je jugeai la grandeur de l'Eclipse d'un doigt, à $9^h 29' 18''$ d'un demi-doigt, à $9^h 30' 18''$ d'un tiers de doigt, & je déterminai sa fin avec assés d'évidence à $4^h 32' 28''$.

M. Maraldi, qui a fait cette Observation dans un autre Appartement avec le Micrometre ordinaire, détermina la fin de l'Eclipse à $4^h 32' 26''$.

Cette Eclipsé doit avoir paru plus grande dans les Pays Orientaux où le Soleil s'est levé sur l'horizon plutôt qu'à Paris. On en peut voir le détail dans les Ephémérides de M. Manfredy, qui a marqué pour Paris la grandeur de l'Eclipsé de 3 doigts 17 minutes à son lever, qui devoit arriver à $4^h 12'$, & la fin à $4^h 32'$, à quelques secondes près de celle que nous avons déterminée.



R E G L E S
 POUR
CONSTRUIRE DES THERMOMETRES
 DONT LES DEGRES SOIENT COMPARABLES,

*Et qui donnent des idées d'un Chaud ou d'un Froid
 qui puissent être rapportés à des mesures connues.*

Par M. DE REAUMUR.

15 Novemb.
 1730.

LES Thermometres sont sans contredit une des plus jolies inventions de la Physique moderne, & une de celles qui a le plus contribué à ses progrès. Ils nous ont valu un grand nombre de connoissances curieuses, qu'on n'eût pû se promettre sans leur secours. Combien y a-t-il de cas où sans les Thermometres nous ne serions pas parvenus à sçavoir que des liqueurs mêlées ensemble s'échauffent ? Sans les Thermometres nous n'aurions jamais découvert que certains Sels, en se fondant dans l'eau, la refroidissent ; qui sont ceux qui la refroidissent le plus. Nous ne sçaurions point qu'il y a de la Glace plus froide que d'autre Glace. Nous ignorerions que l'Eau qui bout, a acquis le plus grand degré de chaleur qu'elle puisse prendre, un degré au de-là duquel il n'est plus possible de l'échauffer. Enfin les Physiciens sçavent qu'une infinité d'expériences demandent à être faites le Thermometre à la main. Cet instrument même n'est pas à leur seul usage ; il n'est pas resté renfermé dans leurs seuls Cabinets ; généralement on aime à consulter le Thermometre sur la température de l'Air ; & c'est sur-tout lorsque le froid ou le chaud nous deviennent incommodés, qu'on aime à le consulter : pendant les rudes froids de l'Hyver, pendant les chaleurs accablantes de l'Été, dans les conversations ordinaires, chacun rend vo-

lontiers compte des degrés dont son Thermometre est descendu ou monté.

Mais si on sçait combien cet instrument est amusant & utile, on sçait aussi combien il est encore imparfait. Les marches de presque tous les Thermometres sont différentes ; quoiqu'exposés au même air, la liqueur des uns monte plus haut, ou descend plus bas que celle des autres, pour marquer les mêmes augmentations & les mêmes diminutions de chaleur. Le changement de temperature d'air qui sera marqué sur l'un par quatre ou cinq degrés, sera marqué sur l'autre par sept à huit, par deux ou trois, ou par tout autre nombre de degrés ; & on ne connoît point les rapports qui sont entre les degrés de différents Thermometres. Les manières dont ils s'expriment, s'il est permis de parler de la sorte, étant toutes différentes, on n'entend que la langue d'un Thermometre qu'on a suivi pendant plusieurs années, on n'entend nullement celle de tout autre. Aussi les Thermometres ne nous ont-ils encore presque de rien servi pour nous donner des connoissances du plus grand degré de froid & du plus grand degré de chaud des différents climats, qui seroient pourtant des connoissances utiles & curieuses. Nous aimerions à sçavoir jusqu'à quel point des hommes, tels que nous, peuvent soutenir le froid ou le chaud. Il seroit important de connoître à peu-près la temperature de l'air qui est nécessaire pour faire croître des Plantes & des Arbres qui, quoiqu'ils ne s'élèvent pas actuellement dans nôtre Pays, pourroient peut-être s'y naturaliser.

Non seulement on n'entend pas la langue des différents Thermometres, chacun même n'entend que très-confusément celle du sien. On sçait les termes où il a marqué le plus grand chaud, ou le plus grand froid, on sçait le nombre des degrés qui les séparent, mais ni aucun degré en particulier, ni tous ces degrés ensemble ne nous rappellent aucune idée de véritable mesure.

Les causes d'où naissent les défauts des Thermometres, ne sont pas moins connües que les défauts eux-mêmes ; aussi

seroit-il très-inutile de les rappeler ici, s'il ne convenoit de les avoir présentés, pour juger si les expédients, auxquels j'ai cru qu'il falloit avoir recours, sont capables de produire tout ce que j'en ai espéré.

Les Thermometres sont des instruments de Physiciens, les Physiciens ont été intéressés à les perfectionner ; ils y ont travaillé ; ils en ont imaginé de plusieurs figures différentes ; ils en ont rempli de différentes liqueurs. Pour l'ordinaire on s'est servi d'Esprit de Vin. C'est l'air qu'on a fait agir dans plusieurs Thermometres ; dans quelques-uns l'air, en se dilatant, n'a eu à faire mouvoir que de l'Esprit de Vin, dans d'autres il a eu à faire mouvoir une colonne de Mercure.

Nous n'avons garde d'entreprendre d'expliquer ici toutes les différentes constructions de Thermometres qu'on a imaginées, ce seroit la matière d'un assez long ouvrage ; d'ailleurs nous n'avons besoin actuellement que de la plus simple construction, & une des plus anciennes, & aussi de celle qui a prévalu, je veux dire de celle du Thermometre qu'on a appelé le *Thermometre de Florence*, qui est celui qu'on voit journellement par-tout. Il consiste dans une Boule creusée de verre, scellée à un long & délié Tuyau de verre, dont le bout supérieur est scellé hermétiquement. On sçait de reste que la Boule & partie du Tuyau sont remplis d'un Esprit de Vin coloré de rouge ; que quand la chaleur de l'air, qui environne le Thermometre, augmente, que l'Esprit de Vin, contenu dans la Boule se dilate, qu'il est forcé de s'élever plus haut dans le Tuyau, qu'au contraire la même liqueur descend dans le Tuyau, lorsqu'elle perd de sa chaleur.

Ce Tuyau de verre est assujetti sur une Planche mince ; couverte d'un Papier, sur lequel les degrés sont imprimés. Des Papiers semblablement imprimés, ou gravés, servent pour des Thermometres différents, comme si les étendues de leurs degrés devoient être les mêmes.

Il suit cependant de cette construction, & on le sçait assez, que pendant qu'il se fait quelque changement dans la température de l'air, que la liqueur parcourt plus ou moins de

chemin dans différents Thermometres, soit en montant, soit en descendant, selon que le diametre de la Boule contient plus ou moins de fois celui du Tuyau. De-là vient que certains Thermometres sont peu sensibles, & que d'autres au contraire le sont trop; que faute de place pour recevoir la liqueur, le Tuyau ou la Boule de ces derniers sont quelquefois brisés par l'effort qu'elle fait pour se dilater, & que dans de pareils Thermometres la liqueur rentre quelquefois dans la Boule avant que le froid soit devenu excessif. Que de-là vient enfin qu'il est impossible de trouver des Thermometres dont les marches soient les mêmes ou proportionnelles, parce que quelque chose qu'on fasse, il est presque impossible de parvenir à avoir deux Boules de verre, d'égal diametre & d'une même rondeur; car ces Boules ne sont jamais des Boules parfaites. Il n'est pas plus facile d'avoir des Tuyaux de diametres déterminés. Dailleurs ils sont presque toujours plus gros à un bout qu'à l'autre, & assés considérablement; leur intérieur a souvent des inégalités dont on ne sçauroit juger par dehors. Tout cela ensemble va plus loin qu'on ne l'imagineroit; par des mesures exactes, j'ai quelquefois trouvé que de deux portions d'un même Tuyau, égales en longueur, & qui sur un Thermometre auroient été prises pour des degrés égaux, l'une contenoit près du double de la liqueur contenuë dans l'autre.

Mais supposons que malgré ces difficultés invincibles, on soit parvenu à sçavoir adapter aux Boules des Tubes dont les diametres soient aux leurs dans une proportion constante, & celle qui a été trouvée la meilleure; ce n'en sera pas encore assés pour avoir des Thermometres qui ayent les mêmes allûres, ou des allûres proportionnelles, c'est-à-dire, qui dans les mêmes changements de température d'air donnent le même nombre de degrés. Il y a encore une autre source de différences à laquelle on ne semble pas avoir assés pris garde, du moins ne sçais-je point qu'on ait cherché à y apporter de remede. C'est la qualité de la liqueur, dont on remplit la Boule du Thermometre. Il s'en faut bien que

456 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
toutes les liqueurs se dilatent également à un même degré de chaleur. On ne l'ignore pas, & on a choisi par préférence l'Esprit de Vin pour la liqueur des Thermometres; parce qu'il est peut-être celle qui est la plus sensible aux impressions du froid & du chaud, si on excepte l'air. L'Esprit de Vin est beaucoup plus dilatable que l'Eau. L'Esprit de Vin le plus rectifié n'est pourtant qu'un mélange d'une matière inflammable, d'une Huile essentielle ou éthérée avec de l'Eau; l'Eau fait la meilleure portion de ce mélange. La grande *dilatabilité* de l'Esprit de Vin, s'il m'est permis de me servir de ce terme commode, & dont j'aurai besoin plus d'une fois, est donc due à l'Huile éthérée qu'il contient; plus il y en aura dans de l'Esprit de Vin, & plus il sera dilatable; c'est-à-dire, que les Esprits de Vin les mieux rectifiés se dilateront davantage, pendant la même augmentation de la chaleur de l'air, que ceux qui le sont moins. Dans deux Thermometres, égaux dans tout le reste, & chargés aussi chacun d'une quantité égale, mais d'un différent Esprit de Vin, la liqueur ne s'élèvera, ni ne s'abaissera également; ils exprimeront différemment les changements de chaud & de froid. Or, non-seulement on n'a pas cherché jusqu'ici à remplir les Thermometres avec un Esprit de Vin, d'une qualité déterminée & connue, on s'est servi indifféremment de ceux qui se sont présentés. Les faiseurs de Thermometres ordinaires se contentent souvent d'employer une sorte d'Esprit de Vin très foible, une espece d'Eau-de-vie.

M. Amontons a négligé d'être aussi exact qu'il a coutume de l'être, lorsqu'il a parlé de la rarefaction de l'Esprit de Vin; & de celle de l'Eau-de-vie, il en a parlé comme si toutes les especes d'Esprits de Vin, & comme si toutes les especes d'Eaux-de-vie devoient, chacune dans leur genre, donner sensiblement les mêmes rarefactions, il n'est pas même le seul Physicien qui se soit exprimé ainsi. Il est pourtant essentiel, pour comparer les effets du chaud & du froid sur différents Thermometres, qu'ils soient remplis d'une même liqueur ou de deux liqueurs, dont les rapports des degrés de dilatabilité
soient

soient connus ; & c'est ce qu'on n'a point du tout cherché à déterminer, & ce que nous tâcherons de faire dans la suite de ce Memoire. On y verra que cette source d'erreurs peut rendre le nombre des degrés d'un Thermometre presque double de celui d'un autre, exposé au même air.

Cet inconvénient n'est peut-être pas moins grand dans les Thermometres dont le jeu est produit par l'air qui y est renfermé, que dans ceux qui ne renferment que de l'Esprit de Vin ou toute autre liqueur. Pour peu qu'on y pense, on ne sera pas disposé à croire que l'air de toutes saisons, de tous Pays, pris à un égal degré de chaud, soit également dilatable. L'air n'est nulle part un fluide, ou liquide pur. Dans un même volume d'air, il y a plus ou moins d'air, selon qu'il est plus chargé d'exhalaisons ou de vapeurs, & des expériences ont appris qu'un peu d'eau en vapeurs, mêlée avec l'air, est capable d'augmenter considérablement les grandes dispositions qu'il a à se rarefier.

Enfin quoiqu'on employât une liqueur, dont les rapports de dilatabilité seroient connus, ce ne seroit pas encore assés ; les liqueurs n'ont point de volumes constants, ceux des solides ne le sont pas non plus, mais ils ne varient ni si considérablement ni si subitement que ceux de certaines liqueurs ; elles passent continuellement d'un degré de dilatation à un ou à plusieurs autres, & reviennent ensuite à des degrés de condensation selon l'état de l'air qui agit sur elles. Or entre ces degrés de dilatation ou de condensation dont est susceptible la liqueur qu'on veut renfermer dans le Thermometre, il en faut trouver un qui soit sensible, qu'on puisse avoir en tout Pays, & qui soit le terme d'où l'on commence à compter les degrés, ou auquel on finisse de les compter. La belle propriété que M. Amontons a découverte à l'Eau, celle de n'être plus capable de s'échauffer lorsqu'elle a commencé à bouillir, donne un de ces termes, un de ces degrés de dilatation qu'on peut avoir en tout temps, & qui sont les mêmes par-tout. Il a aussi cherché à se servir de cette propriété de l'Eau pour construire des Thermometres qui donnassent des degrés qui

puissent être constants en tout Pays. L'usage qu'il en a fait est plein d'adresse, il s'est servi d'air, qu'il a chargé de Mercure ; au moyen de l'eau bouillante il a dilaté cet air, qui, en se dilatant, a élevé le Mercure à un point qui a été un point fixe pour M. Amontons. Ces Thermometres à Air & à Mercure ont servi à en graduer d'autres à Esprit de Vin. Mais les différences qui sont dans l'air, pris en différents temps, en différentes saisons, en différents pays, ne me permettent pas de croire que les premiers Thermometres soient propres à produire les effets qu'on en a espéré. Si quelques-uns de ceux qui ont voulu répéter les expériences de M. Amontons sur la dilatation de l'air chargé de différents poids, n'ont pas trouvé les mêmes résultats qu'a eus cet exact Académicien, c'est peut-être qu'ils les ont faites sur un Air différent de celui qui a servi à ses épreuves. Au surplus cet inconvénient n'est pas le seul qui puisse empêcher ce Thermometre de répondre parfaitement aux vûes ingénieuses de son inventeur. L'état moyen de chaleur qu'il veut à l'Air, & qu'il ne détermine que d'une manière vague, la difficulté de trouver des Boules & des Tubes de capacités égales, ou proportionnelles ; difficulté bien grande à surmonter dans la pratique ; l'augmentation qui survient au volume de l'Air, qui affoiblit la force de ressort, & qui ne la laisse pas telle qu'elle devoit être pour produire l'effet dont elle est la cause, & la mesure ; en un mot, bien d'autres difficultés sur lesquelles il feroit long d'insister, comme les différentes réductions qu'il faut faire des pesanteurs variables de l'Atmosphere, font que ce Thermometre n'est pas susceptible de toute la précision qu'on lui desireroit. Aussi un Auteur Italien a avancé depuis peu, & a tâché de prouver, que le Thermometre de M. Amontons est inférieur à celui de Florence ; c'est assurément le dégrader beaucoup trop, quoiqu'il soit vrai que l'usage de l'ancien prévaut, mais ce n'est que parce que l'autre est très-difficile à construire.

Il s'en faut bien que j'aye rien pensé sur cette matière d'aussi ingénieux que ce qu'a imaginé M. Amontons. Tout ce que

j'ai à proposer est extrêmement simple ; mais je le crois propre à nous donner des Thermometres qui se fassent entendre continuellement , & en tout pays. J'explique d'abord le plan que j'ai crû devoir suivre , & j'expliquerai ensuite ce que j'ai fait pour le mettre en pratique.

Je m'en tiens à une liqueur très-dilatable , c'est-à-dire , à l'Esprit de Vin ; mais comme il est une infinité d'espèces d'Esprits de Vin , j'en choisis une par préférence qu'on puisse avoir commodément en tout temps , & en tout pays. J'établis des caracteres pour reconnoître cette espèce d'Esprit de Vin , propres à empêcher de la confondre avec toute autre , & à déterminer de combien elle en differe.

Je réduis l'Esprit de Vin choisi , & caractérisé à un volume connu de dilatation. Je le pourrois par le moyen de la chaleur de l'Eau bouillante , en usant de quelques précautions dont je parlerai dans la suite , mais j'aime mieux me servir de la congélation artificielle de l'Eau , c'est-à-dire , de l'Eau qu'on fait geler ; M. Amontons lui-même s'en est servi. Le degré de dilatation , ou , si l'on veut , de condensation , auquel cette glace réduit l'Esprit de Vin , peut être regardé comme un terme fixe , & aisé à avoir dans presque tous les Pays du monde où on sçait faire usage des Thermometres. Quoique l'Hiver nous fasse voir de la glace plus froide que d'autre glace , il n'en sera pas plus difficile d'établir , soit par des raisonnemens clairs , soit par des expériences , que le degré de froid de la glace artificielle , le commencement de la congélation de l'Eau , est un degré constant , & tel qu'il nous le faut.

Le caractère de l'Esprit de Vin étant bien déterminé , l'Esprit de Vin ayant été réduit à un volume qui donne un terme saisissable , tout ce qui reste à faire est de graduer les différents Thermometres , de façon que leurs marches soient les mêmes ou proportionnelles , malgré les différents rapports qui peuvent se trouver entre les diametres des Boules , & ceux des Tuyaux , malgré les formes irrégulières que peuvent avoir les Boules , & malgré les inégalités qui peuvent se rencontrer dans les Tuyaux ; & de les graduer de façon que les

mêmes degrés, dans les Thermometres différens, soient les mêmes mesures de froid, ou de chaud ; & que ces mesures donnent quelques idées, car les degrés ordinaires n'en donnent point. Ils m'apprennent bien, par exemple, que la liqueur a monté de deux ou trois pouces, mais ils me laissent absolument ignorer le changement qui s'est fait dans le volume de la liqueur pendant qu'elle s'est élevée de deux ou de trois pouces. On auroit, ce me semble, tout ce qu'on peut désirer, si chacun des degrés donnoit une idée précise des degrés de dilatation, ou de condensation de la liqueur ; car l'effet de l'augmentation de chaleur est l'augmentation de volume. Comment peut-on mieux mesurer les degrés de chaleur qui s'ajoutent successivement les uns aux autres, que par des degrés qui expriment les portions, dont le volume s'est successivement renflé, qui en donnent une idée claire. Je m'explique : la quantité d'Esprit de Vin que je fais entrer dans mon Thermometre m'est connue, je connois le nombre de certaines parties aliquotes dont elle est composée ; par exemple, le volume de ma liqueur condensée par la glace artificielle contient 500 parties ; que ces parties soient chacune de 10, de 20, &c. lignes cubiques, il n'importe, pourvu que j'en aye la mesure. Je marque sur le Tuyau de mon Thermometre jusqu'où va ce volume de liqueur, composé de 500 parties, lorsqu'il est condensé par la glace artificielle* ; c'est au-dessus & au-dessous de ce terme que je vais marquer les degrés. Mais au lieu de prendre, pour chaque degré, des parties du Tuyau égales entr'elles en longueur, comme elles le sont dans les Thermometres ordinaires, je détermine chacun des degrés de façon qu'il est une portion du Tuyau qui contient une des parties du volume de liqueur qui a été déterminé. Dans notre cas, par exemple, où ce volume étoit de 500 parties, chaque degré sera $\frac{1}{500}$ partie de ce volume, & c'est en pareilles parties, en pareils degrés que le Tuyau est entièrement gradué. Exposons aux impressions de l'air des Thermometres ainsi construits ? Les changements qui y seront exprimés, le seront en expressions intelligibles, qui nous

* Fig. 1.
CC.

donneront des idées déterminées, au lieu des idées vagues que les autres Thermometres nous donnent. Que la liqueur s'éleve de 1, 2, 3, ou, si l'on veut, de 20 degrés au-dessus du terme marqué par la congélation de l'eau. Cela signifiera que le volume qui étoit 500 est devenu 501, 502, 503, ou si l'on veut, 520. Quand je sçaurai que la liqueur s'est élevée de 20 degrés, je sçaurai que son volume est augmenté de $\frac{20}{500}$ ou d'un $\frac{1}{25}$. Si au contraire le froid a fait descendre la liqueur de 10 degrés au-dessous du terme marqué, je sçaurai que le froid l'a condensée, ou a diminué son volume de $\frac{1}{50}$. Ainsi dans toute leur marche, les Thermometres donneront des idées précises des changements qui se sont faits dans un volume connu d'une liqueur connuë. Alors on s'entendra, lorsqu'on comparera les degrés où est monté le Thermometre dans une saison avec ceux où il est descendu dans une autre; lorsqu'on comparera les observations faites en différents Pais sur différents Thermometres construits sur ces principes.

Il ne me semble pas qu'on puisse demander aux Thermometres quelque chose de plus que ce que la construction que nous venons de leur supposer leur donne; mais il pourra paroître difficile de les construire sur ces principes, de leur donner la graduation dont nous venons d'expliquer les avantages. Le moyen d'y réussir est pourtant bien simple, ou plutôt très-grossier. Il est néanmoins certain que si l'on veut absolument d'aussi petits Thermometres que ceux qui ont été en usage jusqu'ici, qu'il n'est guères possible de graduer leurs Tuyaux en mesures exactes qui soient des portions du volume de la liqueur qu'on a renfermée. Mais pourquoi s'en est-on tenu jusqu'ici à les faire tous si petits? Il y a grande apparence que c'est parce qu'on a continué de les faire tels qu'ont été les premiers. Sanctorius, leur inventeur, vouloit que ses malades pussent tenir commodement leurs Boules dans la main. Il en est arrivé aux Thermometres, ce qui seroit arrivé aux Horloges si on eût commencé par de petites Montres, & qu'on n'eût cherché qu'à perfectionner des Horloges d'un

si petit volume; on n'auroit jamais eu des mesures exactes du temps jusqu'à ce que quelqu'un eût proposé qu'outre les Horloges qu'on est bien aise de porter sur soi, on en construisit qui restassent toujours dans les Appartements; qu'alors on parviendroit à en avoir dont les mouvements seroient réglés avec une précision qu'on ne pouvoit se promettre de donner aux Montres. Les Barometres devoient aussi nous faire penser à prendre pour les Thermometres de plus gros Tubes que ceux dont on se sert ordinairement. Les Barometres simples ne valent rien, lorsqu'ils sont faits de Tubes presque capillaires, tels que le sont la plupart de ceux des Thermometres.

Aussi parviendra-t-on à faire d'excellents Thermometres; dès qu'on emploiera des Tuyaux de verre d'une grosseur suffisante; & elle le sera, pourvû que leur diametre égale celui des gros Barometres, c'est-à-dire, pourvû qu'ils ayent intérieurement 2 lignes $\frac{1}{2}$ ou 3 lignes de diametre; on pourra pourtant en employer de plus petits, mais leur construction n'en sera que plus aisée & plus sûre si leurs diametres sont encore plus grands, s'ils vont jusqu'à 3 lignes $\frac{1}{2}$, les grosseurs des Boules seront augmentées proportionnellement.

Il est vrai que des Boules & des Tuyaux, des diametres dont nous les demandons, ne seront pas d'aussi jolis instrumens que le sont les Thermometres ordinaires. Si les Astronomes ne vouloient se servir que de jolis quarts de cercle; il faudroit qu'ils renonçassent à en avoir qui leur donnassent des mesures exactes. Dailleurs si on ne veut faire faire aux nouveaux Thermometres que le chemin que font les anciens; si on ne veut point que le degré de chaleur de l'eau bouillante y soit marqué, la longueur des nouveaux Tuyaux excedera peu celle des Tuyaux ordinaires; la grosseur de leurs Boules ne deviendra pas assés considérable pour être difforme, ni pour être embarrassante; la grosseur du Tuyau n'a rien de désagréable: or, pendant que la capacité des Tuyaux égaux en longueur croît comme les quarrés des diametres; celle des Boules croît comme les cubes de leurs diametres. Des Boules qui auront environ 4 pouces $\frac{1}{2}$ de diametre

adaptées à des Tuyaux dont le diametre intérieur soit à peu près de 3 lignes, suffiront pour des Thermometres bons & sensibles.

Perfuadé qu'on passera sans peine sur la petitesse des Thermometres ordinaires, pour en avoir de meilleurs, je vais décrire comment il faut graduer & remplir nos grands Thermometres. Les expériences que j'ai faites des procédés que j'ai à rapporter, m'ont appris qu'ils sont plus aisés, & moins longs à mettre en pratique, qu'ils ne le paroîtront dans l'explication que j'ai à en donner. Je suppose que j'aye une Boule d'un diametre convenable, ou à peu près, scellée à un Tuyau de grosseur suffisante*. Toutes les Verreries fourniront des Tuyaux, tels qu'il les faut, celle qui s'est établie depuis quelque temps à Seve est extrêmement commode, pour y faire faire tout ce qu'on a besoin dans ce genre, c'est celle à qui je me suis adressé.

* Fig. 1. A.

Comme le Thermometre doit être construit la mesure à la main, la plus grande affaire est de se fournir de différentes mesures. Il en faut de très petites, qui sont celles qui donnent les dernières divisions du volume de la liqueur qu'on veut faire entrer dans le Thermometre, ce sont celles-là même qui servent à marquer l'étendue de chaque degré du Tube. Il en faut aussi de grandes, qui contiennent les unes 25, les autres 50, & d'autres jusqu'à 100 des plus petites mesures. L'usage de ces grandes est d'abréger l'opération. Chacune des petites mesures est telle qu'elle contient seulement la quantité de liqueur qui peut occuper deux ou trois, ou quatre lignes de hauteur dans le Tube. Tout cela est indifférent, & fait seulement que chaque degré a plus ou moins d'étendue, ce qui est arbitraire, & ne change rien dans la marche du Thermometre, & dans le rapport exact qu'elle doit avoir avec celle de tout Thermometre construit sur les mêmes principes.

Mais la forme de la mesure est essentielle, j'ai choisi celle d'une sorte de petit Instrument assez connu des Physiciens. Il est fait d'une portion d'un petit Tuyau de verre qu'on

Fig. 2, 3, 4, & 5.

* Fig. 2, 3,
4, 5, M.

* 00.

a renflé au milieu en espece de figure d'olive *, & dont les deux bouts ont été tirés en Tuyaux extrêmement déliés, & véritablement capillaires *. En un mot, les Tuyaux qui aboutissent, de part & d'autre, à la partie renflée, sont si petits, qu'une goutte de liqueur y occuperoit l'étendue de plus d'un ponce. Leur longueur est arbitraire, 15 à 16 lignes suffisent à chacun de ces petits Tuyaux, ils peuvent avoir chacun plus de deux ponces. Il y a deux manières de remplir ce petit Instrument l'une & l'autre également sûres. La première est de poser un de ses bouts dans la liqueur, & de sucer par l'autre bout, qu'on tient dans la bouche, jusqu'à ce qu'on sente que la liqueur vient mouiller la langue; l'autre est d'enfoncer la mesure dans la liqueur jusqu'au dessus du renflement, bientôt elle s'élève à l'extrémité supérieure du Tuyau capillaire. On bouche le bout supérieur de ce Tuyau avec le doigt, ou plus sûrement encore avec la langue, ainsi on retire du vase la mesure pleine de liqueur, sans qu'il s'écoule une goutte de celle qu'elle a reçue. Avec cette mesure j'en remplis de plus grandes; chacune de celles-ci consistent en une Boule de verre, de diametre plus ou moins grand, adaptée à un Tube assés gros, de 4 à 5 ponces de longueur *. Il est absolument essentiel que ces grandes mesures soient très-exactes; on marque avec un fil *, qui entoure leur col ou le Tube, jusqu'où elles doivent être remplies. On les mesurera chacune au moins deux ou trois fois. La petite peine qu'on y trouvera sera payée par le plaisir qu'on aura de voir combien cette façon de mesurer est précise.

* Fig. 6.
& 7.

* 7.

Dès qu'on est une fois fourni de grandes & de petites mesures, on est en état de graduer assés vite des Thermometres, quelque différence qu'il se trouve entre les capacités de leurs Boules & de leurs Tubes. Graduons-en un. Les procédés que nous suivrons, guideront pour la graduation de tout autre. Commençons pourtant par remarquer qu'on ne doit songer à le remplir d'Esprit de Vin, que lorsque ses degrés auront été marqués. Je suppose que la Boule & le Tube, qui me feront bien-tôt un Thermometre, sont scellés ensemble.

ensemble. On marquera à peu-près sur ce Tube l'endroit où l'on veut que se trouve le terme de la congélation de l'eau, & cela par le moyen d'un fil assés fin, arrêté par un nœud autour du Tube *.

* Fig. 1. B.

Ce terme de la congélation de l'eau peut être pris arbitrairement sur une portion du Tuyau d'une assés grande étendue; tout ce que sa détermination exige, c'est qu'il soit au moins une fois plus près de la Boule que de l'extrémité supérieure du Tuyau. Quand la distance de ce terme à la Boule ne seroit que le tiers ou le quart de l'autre distance; souvent il n'y auroit aucun inconvenient.

Je verse ensuite dans le Tuyau des mesures de 100, ou même des mesures plus grandes, jusqu'à ce que, la Boule étant remplie, la liqueur s'élève au terme marqué. Mais une circonstance essentielle à observer, & qui sembleroit devoir jetter en bien des embarras, c'est que le volume de la liqueur qui est borné par ce terme, doit être exprimé par un nombre exact de centaines, par exemple, par 500, par 800, par 1000. Or il n'y a que peu de cas où cela se puisse trouver. Dans une infinité d'autres cas la surface de la liqueur sera un peu au dessous, ou un peu au dessus du fil; alors il n'y a qu'à élever ou abaisser le fil jusqu'à ce qu'il soit le vrai terme du volume mesuré *.

* Fig. 1. CC.

Dans un grand nombre d'autres cas la dernière mesure de 100, qui a été versée, suffit à peine pour remplir la Boule *; & si on ajoûtoit une nouvelle mesure de 100, elle monteroit trop haut dans le Tube. L'expédient auquel j'ai recours alors est simple: au lieu de verser un nombre de mesures de liqueur moindre que 100, ce qui donneroît des nombres, d'où résulteroient des degrés difficiles à comparer sur différents Thermometres, je fais entrer dans le Tube des petits grains d'une matière pesante & solide; comme des grains de gros gravier, de petits fragments de verre. Des grains de plomb seroient la plus commode des matières, si une circonstance, dont nous parlerons bientôt; ne demandoit quelquefois qu'on leur en préférât d'autres. Ces grains solides, quels qu'ils soient, tombent dans la Boule *;

* Fig. 8. H.

* Fig. 8. R.

ils y occupent une place qui auparavant étoit occupée par de la liqueur ; la liqueur monte dans le Tube ; des grains jettés successivement la font élever jusqu'au terme où on la veut *. Ces grains produisent un effet semblable à celui qu'on produiroit, si on étoit maître de diminuer à son gré la capacité de la Boule. Comme le volume qu'ils y occupent n'est pas bien grand, & que d'ailleurs leur dilatabilité est si petite, en comparaison de celle de l'Esprit de Vin, qu'elle peut être regardée comme nulle, ils ne produiront par la suite aucun dérangement sensible dans la marche du Thermometre.

La liqueur dont je remplis la mesure de 100 n'est que de l'eau. J'évite d'employer l'Esprit de Vin pour graduer ; le volume de la quantité qu'on auroit fait entrer dans le Thermometre, pourroit croître avant que l'opération fût finie. Des expériences, qui seront rapportées dans la suite, prouveront au contraire qu'il n'y a nullement à craindre que le volume de l'eau change sensiblement pendant le temps nécessaire à graduer le Thermometre.

Que celui sur lequel nous allons continuer de travailler, contienne 1000 mesures jusqu'au terme fixé pour la congélation artificielle *, c'est au dessus & au dessous de ce terme qu'il nous faut marquer les degrés. Le nombre des supérieurs que nous appellons *degrés de dilatation*, doit être au moins double de celui des inférieurs que nous nommons *degrés de condensation*. Ce sont ceux-ci qui doivent être marqués les premiers. Si je veux qu'il y en ait 25, 30, ou tout autre nombre, je vuide de l'eau de mon Thermometre dans une mesure de 25, ou de 30, jusqu'à ce que je l'aye remplie. Ainsi depuis CC jusqu'en 25 * il reste un vuide de 25 mesures ou degrés.

Cela fait, j'attache le Thermometre, avec de petites cordes ou des fils de Léton *, sur la Planche destinée à le porter par la suite *, & sur laquelle ses degrés doivent être écrits. Un papier blanc, collé dessus, est prêt à recevoir les traits. Le premier que je tire est celui de la congélation de l'eau ; il est posé à

* Fig. 8. LL.
CC.

* Fig. 8. SS.
TT.

la hauteur du fil qui la marque sur le Tube*. Je tire ensuite * Fig. 8. CC;
un second trait vis-à-vis le niveau de l'eau *, & alors je suis * 25,
en état de commencer à graduer. Je remplis une petite mesure, je la vuide dans le Tuyau : quand toute la liqueur est descendüe, je tire un trait vis-à-vis l'endroit où la surface de l'eau s'est élevée. On remplit ensuite une seconde fois la mesure, on la vuide dans le Tube, & on tire encore un trait à l'endroit où s'est élevée la surface de l'eau. On répète cette manœuvre tout autant de fois que le demande le nombre des degrés qui peuvent être contenus dans la capacité du Tuyau, & qui doivent être marqués sur la Planche.

Pour les premiers Thermometres que je fis faire, on remplissoit d'eau la petite mesure qui devoit donner l'étendue d'un degré, mais l'expérience m'apprit que la graduation devenoit longue à faire, &, qui pis est, incertaine. Une petite mesure d'eau, versée dans un long Tuyau, ne suffit presque à en mouïller les parois ; elle coule lentement le long de ces parois auxquelles elle a de la disposition à s'attacher. On est incertain du temps où toute l'eau d'une mesure est descendüe ; toute celle des premières mesures ne descend pas, il en reste toujours d'adhérente aux parois. Je pensai que si au lieu de remplir la petite mesure d'eau, je la remplissois de Mercure, que j'éviterois tous ces inconvénients. Le Mercure ne s'attache point au verre, & ce pesant liquide descend promptement. Aussi ai-je vû qu'en l'employant, la graduation étoit bien faite & bientôt faite. On y gagne en occupant deux Artistes à la faire. L'un remplit la petite mesure de Mercure, & la vuide dans le Tuyau. Dès qu'elle est descendüe dans la Boule, elle souleve l'eau à la hauteur où elle doit monter. Dans l'instant, le second Artiste tire un trait sur la Planche, vis-à-vis le niveau de l'eau. Une centaine de degrés, ou moins, qu'on a à marquer sur la Planche, sont ainsi marqués en très-peu de temps & très-exactement.

Tous les traits ayant été tirés, on ôte le Thermometre de dessus la Planche, & alors on écrit à son aise la valeur de chaque trait, selon sa place, c'est-à-dire, le nombre de chaque

* Fig. 8.

degré ; je les fais même écrire des deux côtés du Tube, & de chaque côté d'une manière différente *. D'un côté on commence par mettre 0 vis-à-vis le grand trait qui marque la congélation de l'eau. Le premier trait au dessous est marqué 1 ; celui qui suit en descendant, est marqué 2, & ainsi de suite jusqu'à 25, nombre auquel nous nous sommes fixés dans nôtre exemple ; & c'est-là la suite des degrés descendants ou de condensation. Vis-à-vis le premier trait, au dessus de celui de la congélation, j'écris aussi 1 ; 2 vis-à-vis le suivant ; & ainsi j'écris la suite des degrés ascendants ou de dilatation.

De l'autre côté du Tube, vis-à-vis le terme de la congélation de l'eau, j'écris 1000 pour nôtre Thermometre, dont le volume de la liqueur, lorsqu'elle est au niveau de ce trait, est de 1000 parties. J'écrirois 900, 800, pour celui dont le volume seroit alors de 900, ou de 800 parties. Le trait qui est immédiatement au dessous, est marqué par 999 ; celui d'après par 998, & ainsi des autres qui marquent les degrés descendants. Le premier degré ascendant est marqué 1001, le second 1002, &c. Ainsi les degrés d'un côté expriment simplement de combien la liqueur s'est dilatée ou condensée au dessus ou au dessous du terme de la congélation artificielle, par les nombres 1, 2, 3, 4, &c. & ceux de l'autre côté expriment le volume actuel de la liqueur, qui dans la congélation artificielle est 1000. Tantôt ce volume est réduit à 998, à 985, tantôt il est renflé à 1002, à 1020, &c.

La Planche étant ainsi graduée, le plus difficile, & ce qui demande le plus d'attention, est fait. Il reste à mettre la juste quantité d'Esprit de Vin dans le Thermometre. Auparavant on a à en faire sortir l'eau dont on l'a chargé, & les grains de gravier ou de sable, si on a été contraint d'y en faire entrer. Pour les grains de sable ou de gravier, on les mettra à part, parce qu'il sera nécessaire de les y faire rentrer après qu'ils auront été séchés. On fera aussi sécher le Thermometre ; quand il y resteroit néanmoins une légère humidité, l'inconvénient ne seroit pas grand. Celui seul qu'elle peut produire seroit d'affoiblir l'Esprit de Vin, & quelques gouttes

d'eau n'affoibliroient pas fenfiblement la quantité de liqueur qui doit être employée.

On versera donc enfin l'Esprit de Vin, de la qualité duquel on s'est assuré, dans le Thermometre, & cela jusqu'à trois ou quatre degres au-dessus du fil, qui marque la congélation artificielle, comme jusqu'en *D*. Un peu plus ou un peu moins ne fait rien actuellement, parce que c'est le froid de l'eau glacée qui apprendra ce qu'il y aura à ajoûter ou à retrancher à la quantité qu'on y aura fait entrer, car il s'agit à présent de faire geler de l'eau autour de la Boule où est cet Esprit de Vin. * Fig. 1. CC.

Pour cela, on posera la Boule du Thermometre dans un vase de fer blanc, cylindrique, dont le diametre intérieur excédera le sien de peu *. Si la hauteur de ce vase est telle que ses bords s'élevent jusqu'au fil qui marque sur le Tuyau le terme de la congélation, ce sera le mieux ; mais quand ses bords ne s'éleveroient que de quelques degres au-dessus de la Boule, le Thermometre n'en sera pas moins bon fenfiblement. Enfin on remplira ce vase de l'eau qu'on doit faire geler. * Fig. 9. VV.

On sçait assés comment se fait la glace artificielle ; les procedés usités journellement sont ceux même dont on se servira pour geler l'eau qui environne la Boule de nôtre Thermometre. Le vase, où elle est contenüe, doit être mis dans un autre vase d'un plus grand diametre, & au moins de même hauteur. Le Fer blanc est encore une matière commode pour ces sortes de vases. Le vuide qui reste entre les parois des deux vases, sera rempli de glace qui aura été bien pilée, & mêlée avec une bonne dose, soit de Salpêtre, soit de Sel ammoniac, soit de Sel marin. Une précaution encore accélère la congélation, c'est de couvrir le dessus des vases, l'air extérieur en est moins capable d'arrêter l'effet qu'on veut produire. Les faiseurs de Liqueurs glacées se contentent de mettre au dessus des vases quelques serviettes, quelques torchons. On fera encore mieux, si sur le linge étendu sur les bords du vase, on met une couche de glace pilée qu'on recouvrira de plusieurs torchons ou serviettes.

A mesure que l'eau, qui entoure la Boule du Thermometre, se refroidit, la liqueur descend dans le Tube. Quand la surface de cette eau est gelée, la liqueur est bien près du plus bas terme où elle descendra. Lorsqu'on jugera qu'elle est à peu près aussi bas qu'elle peut aller, si elle est au dessous du terme marqué par la congélation comme en *B**, on fera entrer de l'Esprit de Vin peu-à-peu avec la petite mesure, ou avec le petit entonnoir*, & cela jusqu'à ce que l'Esprit de Vin s'élève dans le Tube à la hauteur du fil qui marque le terme*. On fera ensuite attentif à observer si la liqueur ne continue pas à descendre; si elle descend encore, on ajoutera encore ce qu'il faut de liqueur pour la faire monter au terme marqué. Lorsqu'elle y reste constamment, on peut retirer la Boule de la glace. Mais pour n'avoir pas la peine de briser la glace, & ne pas faire courir risque au Thermometre, il vaut mieux laisser fondre la glace, & attendre qu'elle laisse sortir librement la Boule, ou accélérer la fonte de la glace en jettant dessus de l'eau chaude.

Nous devons avertir qu'il arrive quelquefois, qu'après avoir fait entrer dans le Tube la petite quantité d'Esprit de Vin qui sembloit nécessaire pour élever la liqueur jusqu'au fil, qu'après avoir vû la surface de niveau avec le fil, qu'elle vient, dans un quart d'heure, à l'excéder d'une ligne, ou de davantage. On croiroit que c'est que la glace commence à se fondre, cependant l'élévation de l'Esprit de Vin est quelquefois dûë à une autre cause, il a fallu du temps pour se rendre à celui qui en descendant a rencontré les parois du vase. On a preuve certaine que c'est cette cause qui produit la quantité excédente de volume de liqueur, lorsqu'on voit que la surface se soutient constamment au même terme; elle s'y soutient pendant plus de huit à dix heures, lorsque les vases sont dans un endroit frais, & qu'ils ont été bien enveloppés. Il faut donc retirer ce qu'il y a de liqueur au dessus du fil. On le peut, en faisant entrer dans le Tube un Tuyau capillaire, & suççant à son bout supérieur, pendant que l'inférieur touche la liqueur. On peut aussi se servir du Tuyau capillaire pour porter dans le

* Fig. 9.

* Fig. 10.

* Fig. 9. CC.

gros Tuyau ce qui manque de liqueur jusqu'à la ligne de la congélation. Cette façon d'achever de le remplir est plus précise, & même plus prompte que celle de verser de la liqueur par son ouverture supérieure; on n'a point à attendre le long écoulement de celle qui s'est attachée contre les parois. Souvent il y a si peu de liqueur à ôter, qu'on en ôteroit trop avec le Tuyau capillaire. Il est plus commode d'avoir un fil dont on a engagé un des bouts dans un grain de plomb. On fait descendre ce grain de plomb dans la liqueur du Tube; une petite partie de cette liqueur est entraînée par le plomb & le fil, lorsqu'on les retire. En répétant deux ou trois fois le même manège, on en ôte ce qui étoit à ôter. Au reste s'il y a une circonstance qui demande de l'attention, c'est celle dont il s'agit, c'est-à-dire, celle de mettre bien de niveau, avec le fil qui entoure le Tube, la surface de l'Esprit de Vin condensé par la glace. S'il y avoit erreur en cet endroit de $\frac{1}{4}$, ou de $\frac{1}{8}$ de degré, ce seroit une erreur qui se trouveroit la même à tous les degrés.

Le Thermometre étant retiré de la glace, il ne reste plus qu'à sceller hermétiquement le bout du Tube *. Ceux qui * Fig. 9. X, connoissent la Lampe des Émailleurs, savent assés comment cela se fait. En scellant le bout du Tuyau, on chauffe l'air qu'il contient, on le rarefie, de sorte que celui qui reste au dessus de la liqueur, n'a plus ni la densité, ni par conséquent le ressort de l'air ordinaire.

Au lieu de sceller le bout du Tuyau à la Lampe, on peut se contenter de le boucher avec un mélange de Cire & de Thérébentine. C'en est assés pour ôter à l'air intérieur toute communication avec l'air extérieur. On peut même faire qu'alors l'air intérieur se trouve plus rarefié qu'il ne l'est; lorsque le Tube a été scellé de l'autre manière, & qu'il soit rarefié à un point plus connu. Pour cela on mettra la Boule du Thermometre dans de l'eau, qu'on fera ensuite chauffer peu-à-peu. La liqueur s'élèvera, l'air sera chassé, & sortira par le bout du Tuyau encore ouvert; on le fermera quand l'espace occupé par l'air n'en paroîtra contenir que la quantité

qu'on y veut laisser. Si même la longueur du Tuyau le permet, avant de le boucher, on fera monter l'Esprit de Vin au terme où la chaleur de l'eau bouillante peut le conduire, ou à peu-près. Nous expliquerons pourtant une autre manière de marquer ce terme, qui ne demande pas qu'on mette la Boule du Thermometre dans l'eau bouillante; mais on est plus sûr de la vérité de la détermination d'un point, quand deux méthodes différentes donnent ce même point.

C'est une question, que nous n'examinons pas actuellement; de sçavoir s'il vaut mieux laisser dans le Thermometre de l'air tel à peu-près que l'air ordinaire, ou s'il vaut mieux n'y laisser que de l'air extrêmement rarefié, tel qu'est celui des endroits que les Physiciens appellent *vides*. Je dirai seulement d'avance que dans l'un & dans l'autre parti il y a des inconvénients, qui sont moindres à mon avis dans un état moyen; de sorte que j'incline à ne pas laisser l'air du Tuyau dans son état ordinaire, & aussi de n'y pas laisser un air très-rarefié. Un degré de rarefaction approchant de celui qu'il a dans la plus grande chaleur de nos climats, me paroît le plus convenable; & ce degré est plus aisé à saisir à peu-près en faisant élever l'Esprit de Vin dans le Thermometre au moyen de l'eau chaude, & scellant le bout de ce Thermometre avec nôtre composition de cire sur laquelle on étendra ensuite, si l'on veut, un Vernis, qu'en le scellant à la Lampe. Le seul inconvénient que je sçache à le sceller avec la composition de cire, c'est qu'il faut alors éviter de renverser le Thermometre, de crainte que l'Esprit de Vin ne causât quelque altération au bouchon. On peut pourtant le sceller à la Lampe, sans y renfermer un air très-rarefié, & cela si on se contente d'abord d'allonger le bout du Tuyau en un fil creux, délié, qu'on le laisse refroidir, & qu'on scelle ensuite assés brusquement le bout de ce filet, ou de ce Tuyau capillaire.

Enfin le bout du Tube du Thermometre ayant été scellé de quelque façon que ce soit, il ne reste plus qu'à le mettre sur la Planche graduée, & à l'y assujettir. Sa position exacte est aisée à retrouver; le fil qu'on a laissé sur le Tube, & qui
marque

marque le terme de la congélation de l'eau, est un repaire sûr ; ce fil doit être posé vis-à-vis le trait qui la marque aussi sur la Planche.

Au reste, si on en juge par la longueur des petits détails dans lesquels nous venons d'entrer, la construction des nouveaux Thermometres paroîtra plus longue & plus difficile qu'elle ne l'est en effet. Mais on ne doit pas juger du temps que les choses demandent à être faites par celui qu'elles demandent à être dites. Il y aura même bien des abbréviations pour les ouvriers qui se voudront charger de faire ces Thermometres. Ils peuvent avoir de grandes mesures, de capacités différentes, qui chacune en contiendront 1000 petites, & dès qu'ils auront un certain nombre de ces mesures, il s'en trouvera presque toujours quelqu'une propre à remplir le Thermometre jusqu'au terme de la congélation de l'eau, d'autant plus que ce terme peut être pris sur une assez grande portion de Tube. Si la mesure versée laisse la surface de la liqueur trop bas dans le Tuyau, on a, pour la faire monter, la ressource des grains solides introduits dans la Boule. Une autre abbréviacion c'est, au lieu des mesures de 1000, d'en avoir de 975, & cela, comme celles de 1000, de différents volumes. La mesure de 975 ayant été vidée dans le Thermometre, on versera une à une 25 petites mesures de Mercure. Dès qu'une de ces mesures sera entrée dans la Boule, on marquera sur la Planche, par un trait, jusqu'où la surface de l'eau a été élevée; & ainsi de suite, on graduera le Thermometre d'une manière plus aisée que celle que nous avons pratiquée ci-devant, car après avoir rempli le Thermometre jusqu'au terme de la congélation de l'eau, nous en avons retiré 25 mesures d'eau, pour y mettre ensuite 25 mesures de Mercure. Enfin on trouvera sans doute bien d'autres abbréviations auxquelles je n'ai pas pensé.

Il y en a pourtant encore une dont nous ne nous dispenserons pas de parler, qui sera d'une très-grande commodité aux ouvriers qui se chargeront de faire beaucoup de Thermometres. Quand ils en auront une fois quelques-uns de

construits dans toute l'exaëtitude possible , & qu'ils auront du même Esprit de Vin , dont ils les ont remplis , ou d'un Esprit de Vin bien reconnu pour être de la qualité du premier , ils pourront s'épargner les petits frais , & la peine de faire congeler l'eau autour de leurs Boules. Les capacités des Boules & des Tubes ayant été bien mesurées , en un mot la graduation une fois faite , ils verseront de l'Esprit de Vin dans les nouveaux Thermometres jusqu'à ce qu'il y soit élevé au degré où l'est actuellement celui des autres : la marche des uns & des autres sera précisément la même , si les derniers faits ont été gradués soigneusement. Nous n'avons rien dit des petits entonnoirs dont on doit se servir pour vuider dans le Tube les grandes mesures , tels que sont ceux de forme ordinaire * , ou ceux ** de la forme de nos petites mesures avec lesquelles on prend à plusieurs fois la liqueur d'une grande mesure , après l'avoir versée dans un verre.

* Fig. 10.

** Fig. 11.

Quel que soit , dans différents Thermometres , le nombre des degrés qui y exprime le volume de l'Esprit de Vin condensé par la congélation artificielle , il sera toujours aisé de les ramener à une mesure commune , leurs rapports sont toujours aisés à voir. Que le volume de la liqueur , qui est exprimé dans l'un par 800 , le soit dans l'autre par 900 , le rapport de leurs degrés sera comme 8 à 9 , c'est-à-dire , que 8 degrés de celui de 800 en vaudront 9 de celui de 900. Ainsi ces deux Thermometres étant exposés à la même température d'air , si la liqueur du premier est élevée à 16 degrés , celle du second le sera à 18. Il en sera de même de ceux où le volume condensé par la congélation est exprimé par tout autre nombre exact de 100^{es}. Mais des nombres rompus , comme 813 , 743 , rendroient la comparaison des degrés embarrassante , rarement la pourroit-on faire sur le champ , c'est ce qui nous a fait rejeter ces sortes de nombres. J'aimerois pourtant mieux qu'on exprimât le volume de la liqueur par le même nombre de centaines sur tous les Thermometres ; il y a mille gens , parmi ceux qui se servent de Thermometres , que des réductions aussi simples

que les premières dont nous venons de parler, embarrasseroient. Je voudrois donc, en leur faveur, que le terme de la congélation de l'eau fût exprimé par un même nombre sur tous les Thermometres; 1000 est celui que j'ai pris pour ceux que j'ai fait faire. Au moyen des grandes mesures de 1000, ou de 975, de différentes capacités, il sera toujours aisé de construire les Thermometres sur ce nombre. Un qui auroit été construit sur 800, 900, peut aussi y être ramené, pourvu qu'on se donne la peine d'y mettre une nouvelle échelle de degrés. Dès que le nombre de 800, par exemple, est pris pour 1000, 8 des anciens degrés en valent 10 des nouveaux, 4 des anciens en valent 5 de ceux-ci. Pour construire la nouvelle échelle, il n'y a qu'à diviser 4 degrés en cinq. Le Compas de proportion facilitera cette division, & elle ne produira aucun changement sensible dans les rapports que les degrés doivent avoir entr'eux, si quand on divise les quatre degrés en cinq, on marque d'abord les deux nouveaux degrés, de façon que le premier soit pris sur la partie la plus basse, du plus bas des quatre, & le cinquième sur la partie la plus élevée du quatrième. Il en seroit de même de toute autre réduction, comme de 900 à 1000.

Quand on n'aura point éprouvé soi-même combien les procédés que nous avons expliqués pour graduer les Thermometres sont aisés à pratiquer, on aura peine à croire qu'ils donnent des mesures aussi exactes qu'ils les donnent réellement. Au moyen des petites mesures remplies avec le Mercure, chaque degré est déterminé avec une extrême précision. Il paroîtra peut-être plus difficile de mesurer la capacité de la Boule & de la partie du Tube qui contiennent la liqueur, dont le volume est condensé par la congélation de la glace artificielle. Cette capacité est de 1000 mesures; sur 1000 mesures, ne se trompe-t-on point de quelques-unes? Je répondrai que si on est attentif, qu'on ne se trompe pas d'une seule mesure. Mais se trompa-t-on de deux ou trois, ce ne seroit pas une source d'erreur considérable; car supposons qu'au lieu de 1000, on eût mis 1002 mesures, voyons où iroit l'erreur,

dans un cas qui donnera idée de ce qu'elle pourroit être dans les autres. Que le Thermometre, dont le volume de la liqueur condensée par la congélation artificielle est exactement 1000, marque 20, celui dont le volume de la liqueur condensée est 1002, marquera alors 20 degrés plus $\frac{1}{25}$ de degré. L'erreur sur 20 degrés sera donc de $\frac{1}{25}$ de degré, & sur 40 degrés qui est un terme d'un chaud excessif, de $\frac{2}{25}$. Erreurs assés petites pour pouvoir être négligées.

Nous avons remis jusqu'ici tout ce qui est de discussion; la première qui se présente est de sçavoir si le terme de la congélation de l'eau est assés fixe pour que nous puissions nous y tenir; si toute glace artificielle, dans le temps qu'elle se forme, a un égal degré de froid. Nous sçavons que pendant l'Hiver le degré de froid de la glace n'est pas à beaucoup près toujours le même. J'ai fait, dans le mémorable Hiver de 1709, des expériences sur une glace dont le froid surpassoit extrêmement celui des glaces ordinaires. Je ne me suis point avisé alors d'observer, dans l'instant même où cette glace se formoit, si elle étoit plus froide que de la glace artificielle. Mais quoique la glace soit susceptible d'une plus grande augmentation de froid, il ne s'ensuit nullement qu'il y ait de la glace d'eau pure, qui, quand elle se forme, soit plus froide que d'autre glace. C'est un fait qui mérite d'être éprouvé. Cependant, quel qu'en soit le succès, il ne fait rien contre le degré de froid de nôtre glace artificielle; car je suppose que nous faisons congeler de l'eau dans un air moins froid que la glace. Or dans cette supposition, tout le froid que prend l'eau qui se gele, ne peut être produit que par la glace & les sels qui environnent le vase où elle est contenüe; cette eau reste liquide, eau ordinaire, tant qu'elle n'a pas pris assés de froid, tant qu'elle n'a pas perdu assés de la matière qui entretient le mouvement de ses parties. Mais quand le mouvement de ses parties s'arrête, quand elle commence à se figer, il paroît que ce doit toujours être quand il ne lui reste plus qu'une certaine quantité déterminée de la matière nécessaire à la mettre en mouvement, ou, ce qui est la même chose, à l'échauffer.

Il reste pourtant encore une difficulté considérable, elle naît d'observations curieuses que nous devons aux Thermomètres. De l'eau, exposée l'Hiver à un air qui a un certain degré de froid, gele ; exposée d'autres jours de l'Hiver à un air qui a un plus grand degré de froid, elle ne gele pas. Il y a plus : le dégel commence souvent, la glace commence à se fondre, quoique le Thermometre marque un degré de froid beaucoup plus grand que celui qu'il marquoit, lorsque la glace s'est formée. Mais avant de rendre raison de ces faits, toutes leurs circonstances demandent à être mieux examinées que je ne l'ai fait jusqu'ici, l'Hiver où nous allons entrer me mettra apparemment en état de faire cet examen.

Après tout, qu'en résulte-t-il ? c'est que l'air n'est pas toujours en état, quoiqu'également froid, de glacer l'eau ; qu'il peut même la fondre quelquefois, quoiqu'il ait un degré de froid supérieur à celui avec lequel il l'a gelée. Mais notre glace artificielle n'est exposée à aucune des variétés que l'air nous fait voir dans celle dont il occasionne la production par son attouchement. 1.° La nôtre est faite dans un temps où l'air ne pourroit agir que pour la fondre. 2.° Elle est produite par un mélange de sels & de glace plus froid alors que l'air. 3.° Enfin nous prenons la précaution de couvrir le vase qui contient l'eau qui doit être gelée, & celui qui contient le mélange de glace & de sels, de le couvrir, dis-je, d'un linge sur lequel est étendue une couche de glace. Cette couche de glace dérobe à l'action, ou à la plus grande partie de l'action, de l'air extérieur, toute l'eau qui doit se geler, & le mélange de glace & de sels.

Mais ce qui vaut mieux que tous les raisonnements précédents, & qui est, ce me semble, sans réplique, c'est que j'ai fait des glaces en différentes saisons de l'année, j'en ai fait dans des jours sereins & dans des jours pluvieux, pendant que différents vents souffloient, & ces glaces ont toujours fait descendre le Thermometre au terme marqué pour la congélation artificielle.

Passons enfin au dernier point fondamental de la cons-

truction des Thermometres, & à celui qui jusqu'ici a été négligé. Nous avons vu combien il est essentiel que la qualité de l'Esprit de Vin qu'on y fait entrer soit connue & bien déterminée, sans quoi on aura eu beau bien déterminer un point fixe d'où partent les degrés, ces degrés auront eu beau à être mesurés exactement, & pris chacun égaux à une certaine partie du volume de la liqueur, différents Thermometres exprimeront les augmentations de froid & de chaud par des nombres de degrés qui ne seront pas comparables, s'ils sont remplis d'Esprits de Vin plus dilatables les uns que les autres, dans des proportions à nous inconnues. Il est donc absolument essentiel d'avoir une méthode qui fasse connoître la qualité de l'Esprit de Vin dont on veut voir les augmentations & les diminutions de volume dans le Thermometre.

Dans les Mémoires de l'Académie de l'année 1718 nous en avons un de M. Geoffroy le jeune sur la manière de mesurer la force des Eaux-de-vie, où, après avoir examiné les moyens dont on s'est servi jusqu'ici pour y parvenir, après avoir fait voir combien ils sont imparfaits, il en propose un nouveau qui promet plus d'exactitude, & qui en donne aussi davantage ; c'est de remplir un petit vase cylindrique de l'Eau-de-vie dont on veut connoître la force, de poser ce petit vase dans un autre qui est plein d'eau, de mettre alors le feu à l'Eau-de-vie, & de la laisser brûler autant qu'elle le peut. Il a poussé même la précaution jusqu'à faire couler continuellement de nouvelle eau dans le vase qui contient celui où l'Eau-de-vie brûle, afin d'entretenir cette eau dans un degré de chaleur toujours égal. Après que l'Eau-de-vie a été brûlée, il reste une certaine quantité d'eau ou de flegme. Il mesure la hauteur, ou, ce qui est la même chose, la quantité du flegme resté ; de deux Eaux-de-vie, celle-là est la plus forte qui laisse une moindre quantité de flegme.

Plus l'Esprit de Vin contenu dans le Thermometre est rectifié, plus il parcourt de chemin pendant qu'il se fait un changement dans la température de l'air qui l'environne. A cet égard il vaut mieux employer un Esprit de Vin plus fort,

qu'un qui l'est moins. Si cependant la qualité d'un Esprit de Vin foible, d'une Eau-de-Vie même, étoit plus aisée à déterminer que celle d'un Esprit de Vin rectifié, on pourroit faire des Thermometres avec de l'Eau-de-Vie. Ce qu'on leur a ôté, en se servant d'une liqueur moins dilatable, il seroit aisé de le leur rendre en augmentant le diametre de la Boule, sans augmenter celui du Tuyau. Aussi m'étois-je proposé de faire entrer dans les Thermometres une Eau-de-Vie, qui, après avoir été brûlée, laissât une quantité de flegme connuë, par exemple, un quart de son premier volume. La méthode que nous venons de rapporter, me paroissoit très-propre à fixer la qualité de celle dont je voudrois faire usage. C'a été avec regret que j'ai appris, par des expériences réitérées, que cette méthode, qui pouvoit être bonne pour le cas où on l'a employée, pour juger une contestation entre des Marchands sur la qualité des Eaux-de-Vie, pour distinguer des Eaux-de-Vie entre lesquelles il y a des différences considérables, ne donnoit pas des mesures d'une exactitude telle qu'il la falloit à des expériences physiques fort délicates. J'ai, à dessein, affoibli de l'Esprit de Vin : tantôt sur quatre mesures d'Esprit de Vin j'en ai mis une d'eau ; tantôt j'ai mis la même mesure d'eau seulement sur trois mesures du même Esprit de Vin ; tantôt j'ai mêlé ensemble un égal nombre de mesures d'eau & d'Esprit. J'ai fait des mélanges en diverses autres proportions moyennes ; & cela pour avoir des Eaux-de-Vie de différentes forces. J'ai ensuite éprouvé si en faisant brûler ces différentes Eaux-de-Vie, avec toutes les précautions possibles, je trouverois des résidus de flegme proportionnés aux différentes qualités connuës de ces Eaux-de-Vie, & j'ai vû que cette sorte d'épreuve ne répondoit pas assés à ce que j'en avois attendu. La même Eau-de-Vie a laissé souvent des résidus de flegme aussi différents entr'eux que pourroient l'être ceux de deux Eaux-de-Vie de qualités différentes, & deux Eaux-de-Vie de qualités différentes m'ont souvent laissé le même résidu. Un rien est capable de faire que la flamme s'éteigne plutôt

dans une expérience que dans l'autre, le plus léger soufflé d'air y suffit quelquefois. Pour remédier à l'agitation de l'air, j'avois pourtant encore ajouté aux précautions demandées dans le Mémoire que je viens de citer. J'ai fait brûler mes essais d'Eaux-de-Vie dans des endroits clos, tels que sont les Lanternes des balances d'Essaieurs. Au lieu d'entourer d'eau le vase dans lequel la liqueur brûloit, je l'ai souvent entouré de glace. Mais en un mot, quelque chose que j'aie fait & tenté, je n'ai pû, par cette méthode, parvenir à déterminer avec assez de précision la qualité de l'Eau-de-Vie que je destinois à des Thermometres.

Il est même à remarquer que ces épreuves ne m'ont jamais rendu toute la quantité d'eau que j'avois fait entrer dans l'Esprit de Vin ; lorsque la partie spiritueuse s'élevoit en flamme, non-seulement elle enlevoit tout le flegme qui lui étoit comme propre, elle enlevoit encore une bonne portion de celui que je lui avois joint, & cela avec des variétés qui n'eussent pas permis de porter de jugement sur les proportions du mélange à qui les auroit ignorées.

Forcé d'abandonner cette voye, j'en ai cherché une autre qui donnât des mesures plus exactes des qualités des Eaux-de-Vie & des Esprits de Vin. Il s'en présentoit naturellement une, propre même à faire connoître immédiatement la qualité de la liqueur d'où l'effet des Thermometres dépend, c'est de reconnoître de combien une liqueur se dilate depuis un certain terme de froid ou de moindre chaud jusqu'à un autre terme connu d'un plus grand chaud. Ces deux termes doivent être fixes & assez éloignés l'un de l'autre pour donner des différences saisissables. Nous les avons dans la congélation artificielle de l'eau, & dans le degré de chaleur de l'eau bouillante : mais j'avois eû occasion, il y a long-temps, de m'appercevoir que l'Esprit de Vin bout avant que l'eau, dans laquelle est plongée la bouteille qui le contient, soit parvenue à bouillir. Si on continuë à faire chauffer de l'Esprit de Vin qui a commencé à bouillir, si on lui fait prendre le degré de chaleur de l'eau bouillante, il bout encore plus fortement.

L'irrégularité

L'irrégularité qui est dans le nombre & dans la grosseur des bulles qui sont à la surface, de celles qu'on voit s'élever continuellement du fond du vase, & de celles qui sont par-tout parsemées dans la liqueur, ne permettent pas de déterminer avec précision le volume que la chaleur de l'eau bouillante fait prendre alors à l'Esprit de Vin. Ce sont ces considérations qui m'avoient arrêté; je ne suis venu à chercher les moyens de remédier à l'inconvénient des bouillonnements que quand j'ai vû que j'en avois absolument besoin. Tous les jours la Théorie nous montre comme simples des procédés qu'on reconnoît impraticables, quand on veut en faire usage; au contraire une infinité de procédés paroissent dans la Théorie tous pleins de difficultés qui s'évanoüissent dans la pratique. J'ai voulu voir si les bouillonnements de l'Esprit de Vin ne seroient point de ces difficultés qui semblent plus grandes à surmonter qu'elles ne le sont réellement. Dans un petit Matras *, dont le col étoit assés délié, j'ai versé de l'Esprit de Vin jusqu'au dessus de l'origine du col*; j'ai mis ce Matras dans l'eau, que j'ai fait chauffer peu à peu jusqu'à ce qu'elle vînt à bouillir. L'Esprit de Vin a commencé, à l'ordinaire, à donner des bouillons, avant qu'il en parut sur l'eau; j'ai retiré le Matras de l'eau, & j'ai vû aussi-tôt tout bouillonnement cesser. J'ai marqué l'endroit du col du Matras où étoit resté l'Esprit de Vin immédiatement après que les bouillonnements avoient été apaisés*; ensuite j'ai de nouveau plongé le Matras dans l'eau bouillante; la liqueur s'est élevée dans le col au-dessus du terme que j'avois marqué, après quoi elle a recommencé à bouillir; mais ce qui est à remarquer, c'est que lorsqu'elle a recommencé à bouillir, elle étoit plus haut que le terme où les bouillonnements avoient cessé la première fois. Je l'ai encore retirée alors. Tout bouillonnement a encore été apaisé dans un instant, & l'Esprit de Vin s'est trouvé plus élevé encore dans le col du Matras qu'il ne l'étoit la première fois*. Ainsi je l'ai retiré & je l'ai replongé plusieurs fois de suite jusqu'à ce que l'eau commençât à bouillir, & même pendant que l'eau bouilloit

* Fig. 12.

* ff.

* gg.

* hh

fortement. J'ai toujours vû les bulles, tant de la surface, que celles qui montoient du milieu de l'Esprit de Vin, disparoître, un instant après que l'Esprit de Vin étoit tiré de l'eau, & la surface supérieure s'applanir. Cette surface s'est élevée de plus en plus jusqu'à un certain point; quand elle a été arrivée une fois à ce point*, chaque fois que je remettois le Matras dans l'eau bouillante, les bouillonnements de l'Esprit de Vin s'élevoient; mais dès que je retirois le Matras, & que les bouillonnements étoient arrêtés, la surface applanie de l'Esprit de Vin se retrouvoit toujours vis-à-vis ce même point du col du Matras. J'ai donc crû devoir regarder ce terme comme le terme fixe du plus grand degré de dilatation où la chaleur de l'eau bouillante pouvoit porter l'Esprit de Vin, que j'essayoïs, sans le faire bouillir; & j'ai crû que ce terme seroit de même saisissable pour tout autre Esprit de Vin, & pour toute Eau-de-vie, qu'il donneroit une manière assés aisée & assés précise de reconnoître le degré de dilatabilité de chacune de ces especes de liqueurs, & une manière de les caractériser.

Pour voir si des expériences plus suivies, & faites avec plus de précautions, me confirmeroient dans cette idée, j'ai suivi la même route que j'ai indiquée pour la construction des Thermometres: après avoir choisi un petit Matras de verre dont le col étoit assés délié, j'ai rempli le Matras jusqu'un peu au dessus de l'origine de son col avec de petites mesures*; il en est entré 400 jusqu'à l'endroit désigné**. J'ai marqué cet endroit avec un fil, lié autour du col; alors j'ai mis le Matras dans une boîte de fer blanc, que j'ai posée dans une boîte plus grande, remplie de glace pilée, & mêlée avec du sel. En un mot, j'ai fait geler l'eau qui entourroit le Matras. L'Esprit de Vin est descendu au dessous du fil. J'ai fait entrer dans le Matras autant de mesures qu'il en a fallu, afin que l'Esprit de Vin se retrouvât encore à la hauteur du fil*. Enfin mon fil m'a marqué le terme d'un volume de 400 mesures d'Esprit de Vin condensé par la congélation artificielle de l'eau. Ce que je cherchois étoit d'avoir en parties

* Fig. 12. ii.

* Fig. 12.

** CC.

* CC.

de ce même volume, la différence avec le volume de la même quantité d'Esprit de Vin dilaté par la chaleur de l'eau bouillante. J'ai donc fait chauffer & bouillir de l'eau. A la vapeur seule de l'eau bouillante j'ai échauffé le Matras, qui contenoit l'Esprit de Vin. Quand je l'ai jugé assés échauffé, pour qu'il n'y eût pas à craindre que la chaleur de l'eau bouillante le fit casser, je l'ai enfoncé peu-à-peu dans cette eau ; bientôt l'Esprit de Vin a commencé à bouillir, & aussitôt j'ai retiré le Matras. J'avois eu la précaution d'entourer son col d'un second fil que je pouvois faire glisser en montant. Avec ce fil j'ai marqué l'endroit où l'Esprit de Vin étoit resté après que les bouillonnements avoient été appaisés. Aussitôt j'ai remis l'Esprit de Vin dans l'eau bouillante. Il s'est élevé au dessus du fil, & bientôt il a bouilli. J'ai retiré le Matras. J'ai élevé le fil jusqu'à l'endroit où l'Esprit de Vin s'est trouvé après que les bulles ont eu disparu. Quand j'ai eu répété ce manège cinq à six fois au plus, le terme de l'élévation marquée par le fil, après les bouillonnements cessés, s'est trouvé constamment le même *, ainsi je l'ai regardé comme le terme de la plus grande dilatation que l'eau bouillante pouvoit donner à cet Esprit de Vin sans le faire bouillir. Dans d'autres expériences, dont il suffira de rapporter les résultats, j'ai suivi de pareils procédés. Pour achever celle que nous avons commencé à détailler, il ne restoit plus qu'à mesurer la capacité de l'intervalle compris entre les deux fils *, en mesures pareilles à celles dont il y avoit 400 jusqu'au premier fil, jusqu'à celui qui marquoit le terme de la congélation artificielle. J'ai trouvé que cet espace contenoit 35 de ces mesures. Ainsi le volume de l'Esprit de Vin, qui condensé par la glace artificielle, étoit 400, rarefié par la chaleur de l'eau bouillante, étoit 435. Cet Esprit de Vin étoit du meilleur qui se trouve ordinairement chés les Marchands. Brûlé dans la cuillière, il ne laissoit point d'eau, il allumoit la poudre. Mais on sait combien ses qualités sont peu déterminés par ces dernières propriétés, qu'elles peuvent convenir à des Esprits de Vin plus ou moins rectifiés, au lieu que le caractère de cet Esprit

* Fig. 12. ii.

* CC, ii.

de Vin est bien déterminé, quand on dit qu'il est tel que son volume condensé par la glace artificielle est à son volume dilaté par la chaleur de l'eau bouillante, comme 400 est à 435, comme 80 est à 87. Un Esprit de Vin plus rectifié que celui dont il s'est agi jusqu'ici, donnera une plus grande différence entre les deux volumes, & un Esprit de Vin plus foible en donnera une plus petite.

Pour m'assurer si les rapports se trouveroient tels qu'on les devoit attendre dans les Esprits de Vin les plus foibles, j'ai commencé par m'assurer des degrés de dilatabilité de l'eau de Seine compris entre le terme de la glace artificielle, qui ne suffit pas pour geler l'eau renfermée dans un vase qu'elle environne, & le degré de dilatation produit par l'eau bouillante. J'ai trouvé que le premier volume de l'eau étoit au second, environ comme 400 à 415. J'ai mêlé de cette eau, dont les degrés de dilatabilité étoient connus, avec de l'Esprit de Vin de ma première épreuve, en mettant une mesure d'eau sur trois d'Esprit de Vin. Une quantité de cet Esprit de Vin affoibli, dont le volume, condensé par la glace artificielle, étoit de 400 mesures, a été rarefiée par la chaleur de l'eau bouillante, & son volume est devenu à peu-près de 430 mesures. Le rapport du premier volume a donc été à celui du second, comme 400 à 430, qui est précisément le rapport qui devoit naître du mélange que j'avois fait; car le volume total, pendant la condensation, étoit composé de 300 mesures d'Esprit de Vin, & de 100 mesures d'eau; or nous savons que 400 mesures de cet Esprit de Vin condensé, étant ensuite dilatées par l'eau bouillante, seroient devenues 435 mesures, ou 400 auroient donné une augmentation de 35. D'où il suit que l'augmentation donnée par 300 mesures est de 26 mesure & $\frac{1}{4}$ de mesure. De même 400 mesures d'eau condensée ayant dû donner par la dilatation une augmentation de 15 mesures, 100 mesures doivent donner 3 mesures & $\frac{3}{4}$. Or l'augmentation du volume de notre Esprit de Vin affoibli étoit composée de l'augmentation donnée par 300 mesures d'Esprit de Vin, & de l'augmentation donnée

par 100 mesures d'eau; la première est $26\frac{1}{4}$, & la seconde $3\frac{3}{4}$; les deux ensemble font 30, qui est précisément la quantité qui a été trouvée par l'expérience, dont l'exactitude a passé ce que j'en devois attendre; aussi n'en ai-je pas toujours eu une aussi grande dans celles que j'ai répétées sur des mélanges faits en d'autres proportions, mais elle a toujours été aussi approchée que je le pouvois demander.

J'ai encore trouvé la même exactitude dans un mélange fait d'un égal nombre de mesures d'Esprit de Vin & d'Eau. Le volume de cette Eau-de-vie, ou de cet Esprit de Vin foible, qui condensé par la congélation artificielle, étoit de 400 mesures, a crû par la chaleur de l'eau bouillante jusqu'à devenir 425.

Mais quand il arriveroit, par quelques circonstances particulières, que le volume composé ne seroit pas précisément d'un degré de dilatabilité égal à celui qui doit résulter de ce que doivent fournir chacun des composans, la construction des Thermometres n'en souffriroit point, pourvu qu'on s'assûrât du degré de dilatabilité qu'a l'Esprit de Vin affoibli qu'on y emploie. Au reste, non seulement il peut y avoir des circonstances qui empêchent que le degré de dilatabilité du volume composé ne soit égal à celui qui résulte de ce que doivent fournir chacun des composans, il y en a réellement de telles, mais nous ne les examinerons pas aujourd'hui; elles tiennent à quelques autres faits physiques dont l'examen nous meneroit loin, ce sera matière suffisante à un autre Mémoire; mais les différences qui en naissent sur la dilatabilité de l'Esprit de Vin allié ne donnent pas de différences considérables dans la pratique.

Nous pouvons donc nous en tenir à cette méthode; non seulement pour caractériser les Esprits de Vin plus ou moins rectifiés, mais aussi pour déterminer les degrés de force des différentes Eaux-de-vie, & les comparer entr'eux. Car ayant pris un Esprit de Vin d'une certaine dilatabilité connue, pour terme fixé, on reconnoîtra par les épreuves de la dilatabilité des Eaux-de-vie qu'on a à essayer, combien il faudroit ajouter

d'eau à cet Esprit de Vin pour le réduire à être une des Eaux-de-vie soumise à l'examen, ou, ce qui est la même chose, quelle quantité d'Esprit de Vin, semblable à celui qui a été pris pour terme, & quelle quantité d'eau ou de flegme sont mêlées ensemble pour composer l'Eau-de-vie dont il s'agit. L'utilité de cette méthode ne se borne pas à la construction des Thermometres, il est une infinité d'autres cas, sur-tout dans le commerce, où la connoissance des qualités des Eaux-de-vie & de celles des Esprits de Vin est importante.

Mais nous devons avertir que pour faire exactement l'essai de la dilatabilité de ces liqueurs, qu'il est essentiel de se servir d'un vase de la forme d'un Matras, ou d'une forme approchante, je veux dire que le vase doit avoir un col long, qui ne soit pas extrêmement délié. Si au lieu de Matras on se servoit d'une Boule de Thermometre adaptée à un Tuyau de médiocre grosseur, les bulles d'air trouveroient trop de difficulté à monter, elles élèveroient l'Esprit de vin par vibrations. Dans des cols même assés gros, on pourra être surpris par des jets d'Esprit de Vin qui s'élèveront subitement à une grande hauteur, qui sortiront du Matras, & qui troubleront l'épreuve, si on n'est pas attentif à retirer la Boule de l'eau chaude, ou bouillante, dès que l'Esprit de Vin commence à bouillir. En un mot ces épreuves, pour ainsi dire, du titre de l'Esprit de Vin & de l'Eau-de-vie ne seront exactes que quand elles seront faites avec les circonflexions qu'elles demandent, que quand elles auront même été répétées plusieurs fois. Quelque sûres que soient les règles, qui font connoître les titres de l'Or & de l'Argent, ces règles, pour être bien mises en pratique, demandent à l'être par gens intelligents, & même qui y soient exercés.

Tout ce qui doit être mesuré physiquement, ne peut l'être que dans une exactitude physique qui ne donne jamais que des à peu près, mais qui ordinairement nous suffisent. Une circonstance accompagne nécessairement nos épreuves des Esprits de Vin & des Eaux-de-Vie, qui empêche que les résultats n'en soient absolument tels qu'ils devroient être. Il

faudroit que la liqueur condensée par la glace, & que la même liqueur rarifiée par l'eau bouillante se trouvât toujours dans une mesure d'une même capacité; or la mesure, de quelque matière qu'elle soit faite, est elle-même condensable & rarefiable. Quand le froid de la glace agit sur le Matras, il le resserre, il diminue sa capacité; au contraire la chaleur de l'eau bouillante augmente sa capacité, elle le dilate. La capacité du Matras, qui, mesurée dans un air temperé, a été trouvée 1000, n'est plus 1000, lorsque ce Matras est resté dans l'eau gelée, & est plus de 1000, lorsqu'il a été échauffé par l'eau bouillante. Nous mesurons les capacités des Matras dans un air temperé, il arrive donc que l'endroit marqué pour contenir un volume de liqueur appelé 1000, ne le contient pas, lorsque la glace l'a eu refroidi; & que l'endroit du Matras marqué, pendant qu'il étoit échauffé par l'eau bouillante, pour 1075, par ex. ou 1080, a alors une capacité qui surpasse ce nombre. On ne peut éviter ces alternatives de diminutions & d'augmentations dans la capacité du Matras, mais il m'a semblé qu'on pouvoit les évaluer à peu près, & être ensuite en état de faire des corrections aux résultats donnés par les essais, ou de juger s'il y a des corrections qui méritent d'être faites. Voici comment je m'y suis pris. J'ai mesuré dans un air temperé, la capacité d'un Matras avec de l'eau, 1200 mesures y ont été versées pour le remplir jusqu'à l'endroit du col que j'ai marqué avec un fil. J'ai vuïdé ce Matras, & vuïde, je l'ai entouré d'eau que j'ai fait geler. Alors je l'ai rempli avec l'eau, dont le froid étoit à peu près égal à celui des parois du vase, avec de l'eau prête à se glacer; 1199 mesures de cette eau se sont élevées jusqu'au fil; donc la capacité étoit diminuée d'une mesure, ou de $\frac{1}{1200}$. La même voye n'a pas aussi bien réüssi, pour mesurer l'augmentation produite par l'eau bouillante, parce qu'il est difficile de remplir les petites mesures avec une eau extrêmement chaude, une autre y a suppléé en quelque sorte: le Matras plein d'eau jusqu'au fil, a été plongé brusquement dans l'eau bouillante, & heureusement il ne s'est point cassé; l'eau a descendu sur le champ dans le col du Matras.

Il y a long-temps que les Thermometres ont fait observer quelque chose de pareil, qu'on a vû que leur liqueur, loin de monter, descend, lorsqu'on échauffe subitement leur boule. On sçait aussi que si la liqueur descend alors, que c'est que les parois de la boule sont échauffées, avant que la liqueur qu'elle contient, l'ait été sensiblement, que sa capacité est augmentée, avant que le volume de la liqueur ait eu le temps de croître. Dans nôtre expérience, nôtre Esprit de Vin est descendu d'une mesure, ou environ, donc la capacité du Matras a été augmentée d'une mesure; d'où il suit que si on néglige d'estimer la dilatation & la contraction du vase, qu'un Esprit de Vin, dont l'étendue de la dilatabilité auroit été prise dans ce cas de 400 à 435, ou de 1200 à 1305, fera de 1199 à 1306, si on tient compte, comme on le doit, de ce dont la capacité du Matras se resserre & se dilate. Au lieu de mesurer cette capacité dans l'air tempéré, on peut la mesurer dans l'eau gelée, & avec de l'eau prête à geler, comme nous venons de le faire, & alors le fil marquera réellement un volume de 1200 parties ou mesures dans le temps de la congélation. Pour rectifier ce que l'essai donnera, il n'y aura donc qu'à ajouter ce que l'augmentation du volume du vase exige qu'on y ajoute, ce qui n'ira qu'à une mesure sur l'accroissement qu'a paru recevoir un volume de 1200, & à peu près à $\frac{1}{3}$ de mesure sur un volume de 400. Ainsi le volume d'Esprit de Vin, qui condensé, seroit 400, & trouvé par l'essai 435, devroit être estimé de $435 \frac{1}{3}$. Il faut pourtant remarquer que ce seroit trop ajouter au volume de 400 que le tiers d'augmentation de celui de 1200 : car les dilatations produites dans les boules par la chaleur, suivent le rapport des diametres, ou des circonférences de ces boules; & les capacités des boules sont en raison des cubes des diametres augmentés.

Pour avoir des Thermometres, dont les degrés fussent exactement & commodement comparables en tout Pays, il seroit nécessaire que les Sçavants voulussent bien convenir du choix d'un Esprit; qu'ils exigeassent que tous les Thermometres

momètres fussent remplis de celui qu'ils auroient jugé le plus convenable. Leur choix ne devoit pas tomber, ce me semble, sur un Esprit de Vin très-rectifié; on ne pourroit pas en recouvrer de tel par-tout. Un dont la dilatation comprise entre nos deux termes est de 32 mesures sur 400, est plus foible que ceux qui se trouvent communément; il seroit toujours aisé d'en avoir de tel, ou de ramener à cette condition ceux qui seroient plus forts. Les huit mesures de dilatation, qu'il donne sur 100, est un nombre dont le partage est commode, c'est ce qui m'a déterminé à le faire employer jusqu'à ce qu'on paroisse incliner davantage pour un autre; soit plus fort, soit plus foible.

Mais quel que soit l'Esprit de Vin, en faveur duquel on se détermine, on n'obmettra pas d'écrire son degré de dilatabilité sur la planche du Thermometre. On écrira, par exemple, en haut : *Esprit de Vin, dont le volume condensé par la congélation de l'eau est 1000, & rarefié par l'eau boüillante est 1080.* Dans ce cas, si le Thermometre a assés de hauteur, le degré de dilatation marque d'un côté 80, & de l'autre 1080 sera le terme de l'eau boüillante. Si la hauteur du Thermometre n'a pas permis d'écrire jusques-là la suite des degrés, on verra ceux qui manquent à cette suite. Il importe peu d'ailleurs qu'elle se trouve entière sur les Thermometres, qui ne doivent nous apprendre que la température de l'air; jamais sa chaleur n'approche de celle de l'eau qui bout.

Lorsqu'on aura de l'Esprit de Vin, dont l'étenduë de la dilatabilité surpassera celle que l'on veut à celui qui doit remplir le Thermometre, on diminuëra la dilatabilité du premier; on la réduira à devenir égale à celle de l'autre, en mêlant de l'eau avec l'Esprit de Vin trop fort ou trop dilatable. On y parviendroit par des tâtonnemens, mais dès qu'on connoît le degré de dilatabilité de l'Esprit de Vin, & qu'on a celui de l'eau, il est aisé de trouver en quelle proportion l'alliage doit être fait pour que la liqueur composée, l'Esprit de Vin affoibli, n'ait précisément qu'un certain degré de dilatabilité moyen, tel qu'on le voudra. En voici la règle.

Soit prise la différence entre la dilatabilité de l'eau, & la dilatabilité moyenne qu'on veut avoir.

Soit prise aussi la différence entre cette dilatabilité moyenne & celle de l'Esprit de Vin donné.

Si on mêle un nombre de mesures d'Esprit de Vin égal au nombre exprimé par la différence entre la dilatabilité de l'eau & la moyenne, avec un nombre de parties d'eau égal au nombre qui exprime la différence entre la dilatabilité de l'Esprit de Vin donné & la moyenne, on aura un Esprit de Vin affoibli, dont la dilatabilité sera celle qu'on veut avoir. Par exemple, on a un Esprit de Vin, dont la dilatabilité est de 35 mesures sur 400, & on en veut un, dont la dilatabilité soit seulement de 30 sur 400. Je suppose la dilatabilité de l'eau exactement de 15 sur 400. Cela étant, la dilatabilité moyenne qu'on veut avoir est 30.

La différence entre la dilatabilité de l'eau, & la moyenne, est donc 30 moins 15 ou 15.

La différence entre la dilatabilité de l'Esprit de Vin qu'on a, & la moyenne qu'on lui veut, est 35 moins 30, ou 5.

La regle est de mêler 15 mesures d'Esprit de Vin avec 5 mesures d'eau, & l'Esprit de Vin affoibli par cet alliage n'aura que 30 mesures de dilatabilité.

L'usage de cette regle sera également simple pour tous les autres cas.

Quand la différence des qualités des Esprits de Vin de deux Thermometres sera connuë, on pourra faire une sorte de comparaison des degrés de ces Thermometres, mais ce ne sera qu'une sorte de comparaison, indépendamment de la peine du calcul, qui pourroit avoir ses difficultés, elle ne sçauroit être exacte. Une observation que nous n'avons pas encore rapportée, & digne de l'être, va apprendre pourquoi il seroit difficile de ramener à des mesures semblables les degrés des Thermometres qui contiennent des Esprits de Vin de différentes qualités, c'est que les degrés de rarefaction de l'eau ne sont pas, à beaucoup près, proportionnels aux degrés de rarefaction de l'Esprit de Vin. Pour l'expliquer & le prouver en même temps

par un exemple, je prends un Esprit de Vin qui, depuis le terme de la congélation jusqu'à celui de la chaleur de l'eau bouillante, se dilate de 30 mesures, & de l'eau qui, du premier des deux termes au second, se dilate de 15. La somme des dilatations d'une des liqueurs est à la somme des dilatations de l'autre, comme 2 à 1, mais les degrés par où elles passent l'une & l'autre, pendant que certains degrés de chaleur agissent sur elles, ne sont pas dans cette proportion, à beaucoup près. Une après-midi d'un de nos jours d'Été, assés chaud, je mis dans un Matras 400 mesures d'eau, & j'exposai ensuite ce Matras au froid de la congélation artificielle. Ce froid ne fit descendre l'eau, ne la condensa que d'une demi-mesure ou environ. Le rétrécissement du vase la faisoit paroître, à la vérité, moins condensée qu'elle n'étoit, mais les expériences rapportées ci-devant ont prouvé que ce ne pouvoit être que de $\frac{1}{3}$ de mesure, supposons pour-tant que ce fut d'une demi-mesure. Ainsi l'eau s'étoit au plus condensée d'une mesure entière. L'Esprit de Vin auquel je la compare, exposé au même froid, est descendu de près de 10 mesures. Pendant que l'eau s'est condensée d'une mesure, l'Esprit de Vin s'est donc condensé de 10; desorte que dans l'intervalle qui est depuis la congélation de l'eau, jusqu'à une chaleur assés considérable pour les Habitants de Paris, l'eau se rarefie au plus d'une mesure, pendant que l'Esprit de Vin se rarefie de 10 des mêmes mesures. Le rapport de la rarefaction de l'eau à la rarefaction de cet Esprit de Vin dans cet intervalle, est donc à peu près comme 1 à 10; au lieu que la dilatation de l'eau, depuis la congélation jusqu'à la chaleur de l'eau bouillante, est à la dilatation du même Esprit de Vin entre ces deux termes comme 1 à 2.

Dès que l'eau est si peu dilatée par une suite de degrés de chaleur, qui dilatent assés considérablement l'Esprit de Vin; & qu'une autre suite de plus grands degrés de chaleur ramènent pour-tant le rapport entre la dilatation de l'eau & celle de l'Esprit de Vin à être comme 1 à 2, il y a des degrés d'une chaleur forte, qui compensent le peu d'effet des

degrés d'une chaleur foible. Peut-être s'en trouve-t-il entre les degrés forts, qui dilatent autant, ou presqu'autant l'eau, qu'ils dilatent l'Esprit de Vin.

De tout ceci, on doit conclurre, que si deux Thermometres sont remplis de deux Esprits de Vin de différente dilatabilité, qu'on se tromperoit extrêmement si on évaluoit le rapport du nombre des degrés que l'un & l'autre doivent marquer, exposés à un air de même, ou de différente température, si, dis-je, on évaluoit ce rapport sur celui de l'étendue du degré de dilatabilité des deux Esprits de Vin. Pour voir combien l'erreur pourroit être considérable, fixons-nous encore à un exemple, sçavoir, à deux Thermometres tels que l'Esprit de Vin de l'un réduit à 400 mesures par la congélation, devienne 435 par la chaleur de l'eau bouillante, & que l'autre Thermometre soit rempli d'Esprit de Vin foible, ou d'Eau-de-vie, dont le volume condensé par la congélation étant 400, devient 425, lorsqu'il est dilaté par l'eau bouillante; les jeux de ces Thermometres, les étendues de chemins qu'y parcourent les liqueurs, devroient être dans le rapport de 35 à 25. Cela sera vrai aussi, si on prend le chemin depuis le terme de la congélation de l'eau jusqu'à celui de l'eau bouillante. Mais prenons-le depuis le terme de la congélation jusqu'à une grande chaleur pour de l'air qui doit être respiré, mais très-différente de celle que le feu donne à l'eau prête à bouillir. Supposons, par exemple, que le premier Thermometre, celui qui est rempli de 1000 mesures du plus fort des deux Esprits de Vin, marque 35 degrés, il s'en faudra bien que l'autre, qui est rempli de 1000 mesures de l'Esprit de Vin foible, ne marque 25 degrés; car l'Eau-de-vie, ou l'Esprit de Vin foible, dont le degré de dilatation est 25 sur 400, est un mélange de parties égales d'eau & d'Esprit de Vin, dont la dilatation est 35 sur 400. Or si nous supposons pour un instant que la dilatation de l'eau, qui est très-petite, pendant que le premier Thermometre parcourt 35 degrés, est nulle, nôtre second Thermometre ne se doit dilater que comme s'il étoit composé de 500

mesures de l'Esprit de Vin, tel que celui du premier. Si donc dans le premier 1000 mesures de volume donnent 35 degrés dans une certaine température d'air, 500 mesures, qui est la quantité réelle de l'Esprit du second Thermometre, ne donneront que 17 degrés $\frac{1}{2}$; ou si l'on veut ajouter le demi-degré, ou le degré, qui peut être survenu aux 500 mesures d'eau, la dilatation sera de 18 ou 18 degrés $\frac{1}{2}$; au lieu donc que le nombre des degrés du premier, entre les termes de la congélation & de la chaleur de l'eau bouillante, est au nombre des degrés du second comme 35 à 25, entre nos deux autres termes il y sera comme 35 à 18 ou à 18 $\frac{1}{2}$.

Il suit pourtant, même de ce que nous venons de dire; que l'on pourra faire une sorte de comparaison des degrés de deux Thermometres remplis de différents Esprits de Vin dont on connoît le rapport de dilatabilité, & que cette comparaison s'éloignera peu de l'exactitude, tant que les degrés n'exprimeront pas un degré de chaleur d'air excessive; car connoissant les rapports de dilatabilité des deux Esprits de Vin, on connoît aisément, par la regle donnée ci-dessus, la quantité d'eau qui étant ajoutée au plus fort, le ramene à l'état du plus foible, & on considere l'effet du Thermometre rempli de l'Esprit de Vin le plus foible, comme s'il étoit seulement occupé par un volume d'Esprit de Vin le plus fort, tel que seroit ce volume, si on eût retranché du volume total l'eau qui y entre, comme on l'a fait dans l'exemple précédent. Deux Observateurs, dans des Pays éloignés, ont à comparer leurs observations faites sur deux Thermometres qui ont chacun 1000 mesures condensées par la congélation; mais les 1000 mesures de l'un se dilatent par l'eau bouillante de 87 degrés $\frac{1}{2}$; & celles de l'autre seulement de 62 $\frac{1}{2}$. On sçait bientôt que l'Esprit de Vin affoibli, qui ne se dilateroit que de 62 $\frac{1}{2}$, ne contient que 500 parties d'Esprit de Vin qui sur 400 se dilate de 35; que par conséquent en regardant comme nulle la dilatation de l'eau qui y est mêlée, les degrés de ce Thermometre doivent être à ceux du Thermometre de 1000 comme 500 est à 1000, comme 1 à 2, excepté ce qu'on

494 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
évaluera devoir être ajoûté pour la dilatation de 500 mesures d'eau.

Une remarque que nous ne devons pas obmettre, c'est que toutes les Tables ou Échelles de degrés de chaleur qu'on a voulu faire jusqu'ici, & que toutes celles qu'on pourroit faire, ne nous donneront jamais des rapports entre les différents degrés de chaleur que nous puissions regarder comme des rapports véritables, en un mot que les degrés de chaleur ne sont point entr'eux comme les degrés de dilatation des différentes liqueurs. Car si on établissoit la Table des degrés de chaleur sur la dilatation de l'eau, certains degrés, dans cette Table, se trouveroient très-proches les uns des autres, ne différer que par de petites augmentations du volume de ce liquide, qui différeroient beaucoup si la Table étoit construite sur des degrés de dilatation de l'Esprit de Vin. Différentes autres liqueurs donneroient aussi sans doute d'autres différents intervalles, & feroient juger autrement des rapports des différents degrés de chaleur.

Nous ne pouvons nous refuser ici encore à une autre remarque, un peu étrangere à nôtre sujet, mais à laquelle il nous conduit, c'est que la dilatabilité de la partie spiritueuse, de la partie inflammable, de l'Esprit de Vin est beaucoup plus grande qu'il ne pourroit sembler, & peut être plus grande que celle de toute matière à nous connue, sans en excepter l'air. Il s'en faut bien que l'Esprit de Vin le plus rectifié que l'art sçait nous donner soit une huile pure, nullement mêlée avec du flegme. Des expériences, faites avec grand soin par M. Geoffroy le jeune, ont appris que l'eau étoit plus de la moitié du poids de ce qu'on appelle de très-bon Esprit de Vin, & nous laissent imaginer qu'elle en est une partie beaucoup plus considérable. Or si nous supposons que l'huile, la matière inflammable, n'est que le quart d'un volume d'Esprit de Vin, qui condensé par la glace artificielle est 400, & rarefiée par la chaleur de l'eau bouillante est 436, l'eau ou le flegme sont les trois quarts de ce volume. Mais si la rarefaction dont ce flegme est susceptible, est prise pour

égale à celle de nôtre eau, ce qui doit être à peu de chose près, on trouvera que l'étendue de la dilatabilité de la partie inflammable est de 24 mesures $\frac{3}{4}$ sur 100 mesures, ou de 99 sur 400; car le volume 400 d'Esprit de Vin est alors composé de 300 parties d'eau & de 100 parties d'huile, ou de matière inflammable; or les 300 parties d'eau ne peuvent être dilatées que de 11 mesures $\frac{1}{4}$, puisque 400 mesures d'eau ne peuvent être dilatées que de 15 mesures. La dilatation totale de l'Esprit de Vin étant de 36, il faut donc que les 100 parties d'huile ou de matière inflammable fournissent les 24 mesures $\frac{3}{4}$ nécessaires pour remplir le nombre de 36 mesures.

Nous sommes bien éloignés de croire que nous ayons supposé la quantité de la matière inflammable trop petite, en ne la prenant que pour le quart du volume d'Esprit de Vin, nous sommes même disposés à penser qu'en supposant que la matière proprement inflammable n'est que la huitième, ou même que la seizième partie de ce mélange, nous nous tromperons plutôt pour lui en accorder trop que pour lui en accorder trop peu. En raisonnant comme nous l'avons fait ci-dessus, il est aisé de trouver dans ces cas de combien la matière inflammable est rarefiée par l'eau bouillante. En supposant qu'elle n'est qu'une huitième portion du volume, 100 mesures se dilatent de 45 mesures $\frac{3}{4}$; & en supposant qu'elle n'est que la seizième partie du volume, on trouvera que 100 mesures se dilatent de 87 mesures $\frac{3}{4}$. Voilà la partie spiritueuse ou inflammable conduite à se dilater de près du double par la chaleur de l'eau bouillante; & s'il étoit vrai, comme bien des Physiciens seront enclins à le croire, qu'elle fût encore une portion beaucoup plus petite du volume de l'Esprit de Vin, que la dernière à laquelle nous nous sommes arrêtés, jusqu'où n'ira point son degré de dilatabilité, borné par le simple terme de la chaleur de l'eau bouillante? aussi est-il à croire que la matière inflammable a une prodigieuse disposition à se rarefier. Quelle étendue n'occupe pas la Poudre quand elle s'enflamme, ou se rarefie au dernier point?

Je ſçai qu'on a voulu donner à la rarefaction de l'Air celle de la Poudre à Canon, mais la matière inflammable eſt par elle-même peut-être beaucoup plus rareſiable que l'Air. L'Air ordinaire ne ſe dilate pas autant par l'eau bouillante; & ſi l'on veut attribuer à l'Air même la dilatabilité de l'Eſprit de Vin, il faut ſuppoſer que celui qu'il contient eſt prodigieusement condenſé. Auſſi quoique l'eau contienne beaucoup d'Air, & peut-être autant & plus que l'Eſprit de Vin, l'eau n'eſt que très-peu rareſiable en comparaiſon de ce que l'eſt la partie ſpiritueuſe de l'Eſprit de Vin.

Mais pour revenir à nos Thermometres, nous avons regardé comme un principe certain que l'exactitude de leur graduation demandoit que leurs Tubes fuſſent gros, & que plus les Tubes ſeroient gros, & plus il ſeroit aisé de les grader parfaitement; la groſſeur des Tuyaux engage à une augmentation proportionnelle de celle des Boules. Mais nous ne pouvons diſſimuler une imperfection à craindre pour les Thermometres à groſſes Boules. Il y a une ſorte de ſenſibilité qu'ils ne ſçauroient avoir auſſi grande que l'ont les Thermometres à petites Boules. Je diſtingue dans les Thermometres deux eſpeces de ſenſibilité, dont la première ſe meſure par la quantité de chemin que parcourt la liqueur dans le Tube, pendant qu'il ſe fait un certain changement dans la température de l'air. Comme celle-ci dépend de la proportion du diametre de la Boule à celui du Tube, elle peut également ſe trouver dans les Thermometres à groſſes Boules; & dans les Thermometres à petites Boules.

Mais il y a une autre eſpece de ſenſibilité dans les Thermometres, qui ſeule même mériteroit ce nom; elle conſiſte véritablement dans un ſentiment plus exquis, en ce qu'un Thermometre, plus ſenſible qu'un autre aux changements de chaud & froid, nous apprend plutôt ceux qui ſe ſont faits dans l'air. Les Thermometres à air l'emportent en ce genre de ſenſibilité ſur ceux à Eſprit de Vin; l'air reçoit plus vite les impreſſions du chaud & du froid que l'Eſprit de Vin le plus rectifié ne les peut recevoir. Or entre les Thermometres

à Esprit de Vin, ceux-là seront les plus sensibles dans ce point de vûë, dont les Boules seront plus petites. Les changements du froid au chaud, d'un degré de chaud à un autre degré de chaud plus grand, se font dans l'air avant de se faire dans la liqueur du Thermometre. L'air, plus chaud que les corps qu'il touche, leur communique de sa chaleur; la Boule du Thermometre partage avec la couche d'Esprit de Vin appliquée contre sa surface, les impressions de chaleur qu'elle a reçues. Cette première couche d'Esprit de Vin partage la sienne avec la seconde couche; ainsi la chaleur, distribuée de couches en couches, est moins grande vers le centre de la Boule d'Esprit de Vin que vers sa surface, & est d'autant moins grande que la Boule a plus de diametre. Il en est ici comme du feu qu'on allume autour de deux vases, dont l'un est grand, & l'autre petit, quoiqu'on le fasse agir également sur toute la surface des deux vases, la liqueur contenüe dans le petit boüillira plutôt que celle qui sera contenüe dans le grand. Aussi si la Boule étoit supposée grosse jusqu'à un certain point, il se feroit souvent des changements du froid au chaud & du chaud au froid, qui ne seroient pas marqués dans toute leur étendue par le Thermometre, car il faudroit alors un temps assés considérable avant que l'Esprit de Vin placé près du centre de la Boule, eût pris le degré de chaleur de l'air extérieur; & s'il arrive qu'avant d'avoir pris ce degré de chaleur, l'air commence à se refroidir, la liqueur de la Boule se refroidira avant d'avoir pris un degré de chaleur égal à celui que l'air avoit ci-devant. Les passages du froid au chaud sont souvent si subits, l'air qui nous environne reste pendant si peu de temps dans un même état, qu'il est même à croire que les Thermometres à plus petites Boules ne donnent que très-rarement toute l'étendue du froid ou du chaud de l'air, & cet inconvénient est encore plus grand pour les Thermometres à grosses Boules.

Mais le remede qu'on peut apporter à ce défaut des Thermometres à grosses Boules est bien simple. Rien n'exige que la partie que nous nommons la Boule du Thermometre soit

une Boule. Toute figure lui est bonne. Tout ce qui y est essentiel, c'est qu'elle ait une certaine capacité. Qu'on lui donne la forme d'une Boîte applatie, ou d'une Lentille, dont les parois laissent entr'eux une distance moindre que n'est le diametre des Boules des petits Thermometres, & alors on rendra les Thermometres à gros Tubes aussi sensibles, & même plus sensibles, que le sont ceux à petites Boules. Plus on applatira les Boîtes, plus on augmentera la sensibilité de la seconde espece. Celle de la première sera aussi toujours telle qu'on la voudra ; car en augmentant la grandeur des Boîtes, on est toujours maître de les rendre d'une assez grande capacité. Il est vrai que dès qu'elles auront une telle figure, qu'il ne sera peut-être pas possible de les faire faire par ceux qui soufflent des Boules à la Lampe, mais il est assez indifférent à ceux qui ont besoin de Thermometres, qu'on fasse dans les Verreries les Boîtes & les Tubes, ou qu'on n'y fasse que les seuls Tuyaux, comme on les y a toujours faits. Si pourtant les Boules n'excèdent pas quatre pouces de diametre, la marche de la liqueur des Tubes ne sera pas long-temps à se fixer au terme correspondant à celui que donne une petite Boule ; cela ne sçauroit aller à un quart d'heure, ni même à un demi-quart d'heure, selon les expériences que j'en ai faites. Enfin au lieu de prendre pour la Boîte une Boule d'un si grand diametre, on peut en prendre de forme cylindrique. Elle peut être un gros Tuyau qui n'aura qu'autant de diametre, & même moins qu'en ont les Boules des Thermometres ordinaires, on déterminera sa hauteur sur la capacité qui convient à la quantité de liqueur qu'elle doit contenir.

Le plus & le moins de sensibilité de la seconde espece sera quelquefois causé que les marches de divers Thermometres, qui devroient être les mêmes, paroîtront différentes. Qu'en deux heures il se fasse dans l'air un changement de chaleur capable de faire monter la liqueur d'un degré & demi, peu après ces deux heures le Thermometre le plus sensible marquera ce degré & demi de plus, pendant que celui qui est moins sensible ne se fera peut-être élevé que d'un degré :

Mais si la chaleur de l'air reste constante pendant quelque temps, le premier se soutiendra au même point, & le second arrivera à un point semblable. De-là il suit que les temps les moins équivoques pour juger de l'état de la température de l'air par les Thermometres, ce sont ceux où la liqueur est restée au même degré d'élévation pendant un quart d'heure, ou environ.

M. Taglini, Professeur à Pises, a fait imprimer, en 1725, une Thèse sur les Thermometres, qui est dans un tout autre goût que celles qui paroissent si souvent dans nos Colleges; elle n'a la forme de Thèse que par ses positions. C'est un petit ouvrage où on a soigneusement rassemblé & discuté tout ce qui a rapport aux Thermometres. Nous n'acquiescerons pourtant pas à toutes ses assertions, & sur-tout à la dernière, elle est trop directement contraire aux principes sur lesquels nous avons cherché à construire des Thermometres dont les degrés de chaud & de froid fussent comparables; elle ôte même toute espérance d'en avoir jamais de tels. Il y soutient que les degrés fixes de chaud & de froid, que les Physiciens ont cherché jusqu'ici, n'ont point encore été trouvés, & qu'il est impossible de les trouver. Des deux pourtant que nous avons pris pour termes, il n'y en a qu'un qui y soit attaqué directement, celui de chaleur déterminé par l'eau bouillante. Il combat, à la vérité, les degrés fixes qu'on voudroit établir par le froid de la glace, & même par la congélation produite par le froid de l'air. Mais il ne dit rien contre le froid de la glace artificielle faite dans un temps où l'air fonderoit vite la glace naturelle, & nous croyons avoir prouvé ci-dessus que le degré de froid de cette glace artificielle ne doit pas être confondu avec celui de toute autre glace, & qu'il pouvoit être regardé comme un terme fixe. Nous avouons pourtant que ce terme de froid, ou de moindre chaleur, ne nous paroît pas plus fixe que celui de l'eau bouillante, que M. Taglini ne veut pas reconnoître pour tel, & que j'eusse crû hors de toute atteinte. La théorie eût dû même nous apprendre, quand on a eu besoin d'un degré de chaleur

fixe, que nous le pouvions trouver là. Mais il n'arrive que trop souvent, à nôtre honte, que nous devons à des expériences faites assés tard des connoissances où le raisonnement eût dû nous conduire de bonne heure: Sans être Physicien, on a toujôurs sçû que de l'eau bouillante est moins chaude que de l'Huile bouillante, que du Plomb, que du Cuivre; que du Fer, que de l'Argent, fondus jusqu'à bouillir. On a donc toujôurs reconnu qu'il y avoit des degrés de chaleur où l'eau ne pouvoit atteindre; il y en a donc un qu'elle ne sçauroit passer, & par conséquent qui est un degré fixe. Peut-être a-t-on eû tort de croire que l'eau soit arrivée à ce degré de chaleur, dès qu'il commence à s'en élever quelques bouillons. C'est ce que prouveroit tout au plus l'expérience rapportée par M. Taglini, qui lui a fait voir que l'eau, qui étoit contenue dans une Boule adaptée à un Tuyau de verre, ne s'étoit élevée qu'à une certaine hauteur, la Boule ayant été mise dans un pot où de l'eau bouilloit, & qu'ayant forcé l'eau du pot à bouillir plus fort, l'eau du Tube s'y étoit élevée plus haut, & si haut qu'elle étoit même sortie hors de ce Tube. Si le diametre de la Boule eût été moins grand par rapport à celui du Tube, ou que le Tube eût eu plus de hauteur, l'eau seroit toujôurs restée dans le Tube; & quand elle auroit été arrivée à un certain terme, elle y seroit restée, quelque chose qu'il eut fait pour augmenter la force des bouillonnements de l'eau du pot. C'est ce que j'ai éprouvé sur des Boules de quatre pouces & demi, adaptées à de gros Tubes de plus de six pieds de long. J'ai aussi éprouvé qu'il falloit laisser la Boule pendant un temps assés considérable dans l'eau bouillante, avant que celle du Tube montât jusqu'où elle peut monter, au moins plus d'un quart d'heure, parce que l'eau qui monte dans le Tube s'y refroidit.

Le sçavant Professeur n'a obmis aucune des raisons capables de faire douter du terme fixe donné par l'eau bouillante, ou au moins de faire douter si ce terme est saisissable. Il fait observer combien les eaux different les unes des autres, que leurs différences en pesanteur sont connûes, & nous en

doivent faire imaginer dans leurs compositions ; que de-là il suit que le degré de chaleur qui suffit pour faire bouillir une certaine eau, ne suffit pas, ou est plus que suffisant pour en faire bouillir d'autres. Tout cela a bien l'air d'être vrai : mais en conclüerons-nous qu'il faut caractériser par le poids, ou par d'autres moyens, l'espece d'eau dont nous nous servirons pour marquer le terme de chaleur de l'eau qui bout, comme, nous l'avons fait pour l'Esprit de Vin ? Ce seroit au pis aller à quoi nous serions réduits : mais il y a bien de l'apparence que cette précaution seroit très-inutile. Tant qu'on s'en tiendra à des eaux communes, ce que l'une aura de chaleur plus que l'autre, lorsqu'elle bouillira, ne donnera pas apparemment des différences saisissables. Quand il s'agit de mesures sensibles, nous n'avons besoin que d'égalités sensibles. L'impossibilité d'avoir des mesures exactes, de quelque espece que ce soit, se prouveroit très-solidement ; peut-être n'y en a-t-il jamais eu deux poids de marc, deux aulnes, &c. d'une égalité parfaite. Des mesures qu'on feroit parfaitement égales, cesseroient de l'être selon que la chaleur, la sécheresse ou l'humidité de l'air agiroient sur elles. Nous avons pourtant des mesures de tout genre d'une justesse qui nous suffit, parce qu'elle est telle qu'il n'en résulte pas des inégalités importantes.

Après tout j'avouërai sans peine, que je n'espère pas qu'on construise beaucoup de Thermometres dont les degrés soient exactement égaux, ou exactement proportionnels. Les Barometres simples, tout simples qu'ils sont, n'ont pas toujours des marches parfaitement égales ; mais il sera aisé de faire des Thermometres qui différeront peu sensiblement, & qui nous donneront des idées des degrés de froid & de chaud à peu près aussi exactes que nous avons besoin de les avoir. Il en sera de ces instruments comme de tous les autres ouvrages de l'art, on les fera d'autant plus parfaits, qu'on apportera plus d'attention à les construire ; que des mains plus adroites & plus exercées s'y occuperont. Ceux que j'ai fait faire n'ont pas différé dans les rapports de leur marche de plus d'un quart de degré, & certainement mille gens feront mieux

que je n'ai fait faire. Enfin quand on ne pourroit pas remplir dans la dernière exactitude toutes les conditions demandées pour la perfection de nos Thermometres, au moins auroit-t-on toujours un à peu-près, & alors on auroit des Thermometres bien supérieurs à ceux à Esprit de Vin dont on se sert aujourd'hui, où tout est inconnu, capacité des Boules & des Tubes, valeur des degrés & qualité de la liqueur.

Si la grandeur de nos nouveaux Thermometres déplaît ; on pourra par leur moyen en avoir d'aussi petits qu'on souhaitera, dont la graduation sera proportionnelle à celle des grands ; on les remplira du même Esprit de Vin, & on se servira des grands comme d'étalons pour graduer les petits. On pourra même construire des Thermometres assés petits, en les mesurant réellement comme nous avons appris à mesurer ceux d'un plus grand volume, à cela près que les divisions n'en seront bien précises que de cinq en cinq degrés ; par exemple, au lieu de les graduer avec une mesure d'un degré, on les graduera avec une mesure de cinq degres. Tous les termes de cinq en cinq seront donc exactement déterminés. On divisera chacun de ces espaces en cinq parties pour faire autant de degrés intermédiaires, & cette façon de diviser ne produira pas d'erreurs sensibles dans ces petits instruments.

Au reste quand on a voulu nier l'existence, & même la possibilité de tout degré de chaleur fixe, on n'a pas pensé que les Physiciens de Paris en ont un très-commode dans les Caves de l'Observatoire. C'est, à la vérité, un fait bien singulier, & un de ceux qu'on n'auroit pas prévu, que des Caves dont la profondeur n'est pas extrême, & dont la longueur n'est pas excessive, & à qui on ne s'est pas embarrassé d'ôter toute communication avec l'air extérieur, que ces Caves, dis-je, renferment un air dont la température est toujours sensiblement la même. Les épreuves qu'on en a faites sont pourtant démonstratives ; M. de la Hire a observé que dans les plus grandes chaleurs de nos Étés, & dans le plus grand froid de 1709, la liqueur du Thermometre est restée assés

constamment sur le même degré ; aussi ce degré de température des Caves de l'Observatoire est-il un des termes qu'on a pris soin de marquer sur les meilleurs des Thermometres qu'on a faits jusqu'ici. Un des premiers usages qu'on a crû devoir faire des Thermometres construits sur les principes que nous avons donnés a été de le reconnoître. On a trouvé que le degré de chaleur de ces Caves étoit à 10 degrés $\frac{1}{4}$ au dessus du terme de la congélation dans un Thermometre dont le volume de la liqueur condensée par la congélation artificielle étoit 1000, & dont le volume de cette liqueur dilatée par l'eau bouillante étoit 1080, ou, ce qui revient au même, le volume de la liqueur de ce Thermometre, qui est réduit à 1000, par la congélation de l'eau, est 1010 $\frac{1}{4}$ dans les Caves de l'Observatoire.

Nous pourrions de même, par le moyen des nouveaux Thermometres, ramener à des degrés connus & comparables les observations faites ci-devant sur des Thermometres qui subsistent encore, tel qu'est celui de M. de la Hire, dont on se sert à l'Observatoire depuis tant d'années.

Lorsque nous n'avions ci-dessus pour objet que la seule construction du Thermometre, nous avons dit que nous ne croyons pas qu'il convînt de rarefier extrêmement l'air qu'on renferme dans le Tube, ni de laisser cet air dans l'état de condensation qu'il a dans des temps froids ; que ce qui nous paroïssoit de mieux, est que l'air y fût dilaté à peu-près au point où il l'est dans les jours les plus chauds. Les raisons qui nous ont déterminé à prendre ce parti moyen sont aisées à voir. Quand l'Esprit de Vin se rarefie, l'air contenu dans le Tube tend à se rarefier ; il fait donc des efforts pour s'opposer à la dilatation de l'Esprit de Vin, qui ne scauroit se faire sans condenser l'air, ces efforts pourroient briser le Tube ou la Boule, lorsque la chaleur est considérable. Il semble aussi y avoir un inconvénient, & beaucoup plus grand, à ne renfermer dans le Tube qu'un air extrêmement rarefié. L'air qui entre dans la composition de l'Esprit de Vin, trouve alors de la facilité à s'en dégager ; & s'il s'en dégage, l'Esprit de Vin

n'est plus précisément le même que celui dont on a déterminé les qualités. Or que l'air contenu dans l'Esprit de Vin s'en dégage, si cet Esprit de Vin est environné d'un air trop rarefié, d'une espece de vuide, c'est ce qu'une observation faite sur nos Thermometres a montré très-clairement. Après avoir fait prendre à l'Esprit de Vin de la Boule d'un de ces Thermometres un degré de chaleur qui étoit peu au dessous de celui de l'eau bouillante, je le couchai presque horizontalement, je laissai refroidir sa liqueur pendant qu'il étoit dans cette position. Bien-tôt le volume de l'Esprit de Vin, renfermé dans la Boule, diminua ; le vuide, qui ordinairement se fait dans le Tube, se fit alors dans la partie la plus élevée de la Boule ; je le vis croître, devenir insensiblement un segment de sphere de plus grand en plus grand. Mais à mesure que ce vuide croissoit, j'observois continuellement de petites bulles qui s'élevoient de toutes parts de la surface de l'Esprit de Vin, & qui se réunissoient ensuite à la grande bulle. Ces bulles ne pouvoient être prises que pour des bulles d'air qui se dégageoient de l'Esprit de Vin. Cette observation nous a conduit à en faire plusieurs autres, que nous ne saurions placer ici sans ajouter beaucoup à la longueur d'un Mémoire déjà excessivement long ; nous ne pourrions nous dispenser de les rapporter dans toute leur étendue ; outre qu'elles sont assez curieuses par elles-mêmes, elles nous apprendront à construire des Thermometres qui ne seront point sujets à des dérangements qu'on a vû arriver à ceux qu'on a construits jusqu'ici, & dont les nôtres même ne seroient pas exempts.

Nous ferons seulement faire attention à la source des dérangements dont nous voulons parler. On n'est pas certain si un Thermometre, après plusieurs années, ou même après un temps plus court, est tel qu'il étoit dans le temps de sa construction. L'Esprit de Vin peut perdre peu-à-peu, à la longue, cet air qui s'en est séparé en un temps court dans l'expérience que nous venons de rapporter ; peut-être même que quelques-unes des parties des plus spiritueuses de l'Esprit de

de Vin s'élevent dans le Tube, & y restent en vapeur ; peut-être aussi que l'Esprit de Vin reprend l'air qui l'avoit abandonné, comme nous voyons que l'eau se recharge avec le temps de celui qui en avoit été chassé pendant qu'elle bouilloit ; & peut-être que de même les parties spiritueuses qui se sont élevées de l'Esprit de Vin, viennent ensuite s'y réunir ; qu'ainsi il se fait une sorte de circulation qui entretient l'Esprit de Vin renfermé toujours à peu-près dans un même état. C'est ce qui a été difficile à décider jusqu'ici, & ce qui pourra l'être sûrement dans la suite. On n'aura qu'à exposer la Boule d'un grand Thermometre à la congélation artificielle de l'eau, la surface de la liqueur se trouvera dans le Tube vis-à-vis la ligne marquée pour le terme de la congélation, s'il ne s'est fait aucun changement dans la liqueur depuis que le Thermometre a été construit, & s'il y est arrivé des changements, elle sera au dessous & au dessus de ce terme, selon la nature des changements. On a donc ainsi une méthode de s'assurer continuellement de l'état de son instrument, de le vérifier, & on sçait jusqu'où on doit compter sur les observations qu'il fournit.

Il seroit à souhaiter que les Physiciens de différents Pays pussent avoir des Thermometres de cette espece, leurs observations nous instruiroient alors chaque année sur le plus grand chaud & le plus grand froid des différents climats. On ne se trouvera pas à portée par-tout de faire souffler des Boules ou des Boîtes au bout des Tuyaux ; mais pour peu qu'on puisse avoir des Tuyaux, & qu'on ait une sorte d'industrie, qui ne manque gueres à ceux qui aiment les recherches dont il s'agit, il sera aisé de se faire soi-même un Thermometre. On adaptera le Tube à quelque Bouteille de capacité convenable. Si on est arrêté par la difficulté de sceller ensemble le goulot de la Bouteille, & le bout inférieur du Tuyau, l'équivalent peut être fait par un lut, ou une espece de colle sur laquelle l'Esprit de Vin n'ait pas prise ; de la Gomme arabique, de la colle de Poisson, qui se dissolvent si aisément à l'eau, ne se dissolvent point à l'Esprit de Vin.

J'ai luté, avec l'une & l'autre de ces colles, des Tubes à des Bouteilles qui m'ont fait des Thermometres. Il y a lieu de croire qu'ils seront assez durables ; c'est sur quoi on ne peut être instruit que par le temps , & sur quoi je ne le suis pas assez. Je ferai seulement remarquer qu'extérieurement il faut couvrir de quelques couches d'un Vernis, qui résiste aux impressions de l'humidité, la surface de la colle : un simple Vernis de Lacque y suffira.

Mais inutilement aura-t-on en différents Pays des Thermometres bien construits sur les principes qui rendent leurs degrés comparables, la comparaison du chaud & du froid des différents Pays & des différentes saisons ne se fera jamais exactement, si ceux qui veulent bien se charger de faire les observations qui y sont nécessaires, & de les communiquer au Public, ne sont attentifs à bien choisir les places où ils mettront leurs Thermometres, au moins quelque temps avant d'observer leur marche. Dans une même Ville, dans une même Maison, on trouvera à la même heure de grandes différences entre les degrés de différents Thermometres, qui tous marqueroient pourtant le même s'ils étoient posés les uns à côté des autres. La liqueur de ceux qui seront dans des chambres, n'y fit-on jamais de feu, sera à des hauteurs fort différentes de celles où sera la liqueur des Thermometres qui seront exposés à l'air libre; il y a tel jour où l'on verra la liqueur de ces derniers monter & descendre de 8 à 10 degrés, pendant que la liqueur des autres aura à peine monté ou descendu d'un degré. Il est donc absolument essentiel que l'Observateur expose son Thermometre à l'air extérieur. L'exposition qu'il doit choisir est celle du Nord, & telle que le Soleil ne puisse donner dessus à aucune heure du jour. Ce ne sera pas même assez, si en rendant compte de ses observations, il n'avertit s'il y a des murs voisins qui renvoient les rayons du Soleil du côté du Thermometre, ou s'il n'y en a pas ; si son Thermometre est placé à un premier, à un second, ou à un troisième étage. Toutes ces circonstances sont essentielles à marquer pour mettre en état de faire d'exactes

comparaisons. J'ai vû en Été deux Thermometres, exposés à l'air libre & au Nord, dans différentes Maisons, dont la liqueur de l'un étoit, dans les jours où le Soleil paroissoit, d'un degré ou d'un degré & demi plus élevée que celle de l'autre, parce que l'air qui l'environnoit étoit échauffé par la réverbération des murs voisins. J'ai aussi observé, dans des jours chauds, que la liqueur d'un Thermometre mis à la fenêtre d'un rez-de-chaussée, étoit d'un degré plus bas que celle d'un autre qui étoit au premier étage, à la fenêtre au dessus de la précédente. Cependant les Thermometres, dont je parle, étoient de ceux de nouvelle construction, & mis les uns à côté des autres auroient marqué les mêmes degrés. Les instruments les plus parfaits demandent de l'habileté & de l'attention dans ceux qui s'en servent.



NOUVELLES PROPRIETES DE L'HYPERBOLE.

Par M. MAHIEU.

23 Decemb.
1730.

LE dessein de ce Mémoire est de découvrir l'analogie qui est entre le Triangle, le Cercle & l'Hyperbole.

J'ai crû que cette comparaison pouvoit être utile, à cause que l'on ne connoît jamais bien ce que les choses sont en elles-mêmes, si l'on ne connoît aussi ce qu'elles sont considérées par rapport à celles à qui elles ressemblent, & dont elles tirent leur origine.

J'établis la comparaison que je fais du Triangle, du Cercle & de l'Hyperbole, sur un principe qui est un Corollaire d'une Proposition d'un Mémoire que j'ai présenté à l'Académie en 1724. Ce principe fait remarquer que les coupées & les appliquées, prises sur l'asymptote de l'Hyperbole, peuvent être représentées par une suite infinie de bases changeantes qui appartiennent à des Triangles, qui pris deux à deux, ont deux côtés égaux, chacun à chacun. On verra dans les Mémoires suivans que cette propriété est très-étendue, & qu'elle continue à se faire remarquer jusques dans des Courbes d'un ordre plus élevé, dont les appliquées sont les coordonnées prises sur l'asymptote de l'Hyperbole, en sorte qu'on pourroit réciproquement faire usage de l'Hyperbole pour décrire ces Courbes, & de ces Courbes pour décrire l'Hyperbole.

Au reste les principes de ce Mémoire sont simples : quoique simples, ils conduisent à une proposition qui semble un véritable paradoxe, qui est que deux espaces inégaux, l'un considéré dans le Cercle, & l'autre dans l'Hyperbole, contiennent un même nombre de lignes égales. Je ferai voir dans les Mémoires suivans, que ce qui semble un paradoxe, se rencontre dans toutes les Courbes, en les comparant deux à

deux de la même manière que j'ai comparé le Cercle & l'Hyperbole, & je déduirai de cette comparaison de nouvelles Courbes, que je nommerai les *déplacées*.

L E M M E.

Si quatre Triangles, comparés deux à deux, ont deux côtés égaux chacun à chacun, enforte que la différence des quarrés des côtés des deux premiers Triangles soit égale à la différence des quarrés des côtés des deux autres Triangles, les bases des deux premiers Triangles seront en raison réciproque avec les bases des deux autres Triangles.

1.° Si parmi les quatre angles qui sont sur les deux premières bases & sur les deux dernières, il y en a deux, qui pris ensemble, sont égaux à deux droits.

2.° Si parmi les quatre angles qui sont opposés aux deux premières bases & aux deux dernières, il y en a deux qui sont la différence de la somme des angles sur la base des deux autres Triangles.

3.° S'il y a deux angles obliques égaux sur les bases, & deux inégaux.

4.° Si les perpendiculaires ou les éloignements de perpendiculaires comparés deux à deux étant égaux, il se trouve parmi les quatre angles sur les deux premières bases & sur les deux dernières deux angles inégaux semblablement posés.

Soit les quatre Triangles ACB , FHG , KLM , NPO , dont les deux premiers ACB , FHG , ont deux côtés $AC + CB$ égaux aux deux côtés $FH + HG$, & les deux derniers KLM , NPO , ont pareillement deux côtés $KL + LM$ égaux aux deux côtés $NP + PO$; enforte que la différence des quarrés des côtés des deux derniers Triangles soit égale à la différence des quarrés des côtés des deux premiers Triangles. Fig. 1. & 2.

Je dis que les bases AB , FG , KM , NO , sont en raison réciproque.

1.° Lorsque les deux angles quelconques CBA , HGF , pris ensemble, étant égaux à deux droits, les deux angles

510 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
quelconques LMK , PON , pris ensemble, sont pareillement égaux à deux droits.

2.° Lorsque l'angle FHG étant la différence des angles sur la base du Triangle ACB , l'angle NPO est pareillement la différence des angles sur la base du Triangle KLM .

3.° Lorsque l'angle quelconque A étant égal à l'angle F , l'angle quelconque K est pareillement égal à l'angle N .

4.° Lorsque les perpendiculaires CE , HI , ou les éloignements de perpendiculaires, AE , FI , étant égaux, & les deux angles CBA , HGF inégaux, les deux perpendiculaires LR , PS , ou les deux éloignements de perpendiculaire KR , NS , sont pareillement égaux, & les deux angles LMK , PON , pareillement inégaux.

PREPARATION.

Pour ne faire qu'un seul cas des quatre, faites l'angle ACD égal à l'angle FHG , qui est la différence des angles sur la base du Triangle ACB , & l'angle KLQ égal à NPO , qui est la différence des angles sur la base du Triangle KLM ; puisque l'angle ACD est égal à l'angle FHG , l'angle CDB est égal à l'angle B , par conséquent les lignes CD , CB , GH , sont égales, & les deux Triangles ACD , FHG , sont égaux en tout sens. D'où il suit que lorsque l'angle FHG est la différence des angles sur la base du Triangle ACB , l'angle HGF , ou son égal CDA , est le complement à deux droits de l'angle CBD .

On prouvera de même dans les autres cas qu'il y a toujours deux angles sur les deux premières bases & sur les deux dernières, qui, pris ensemble, sont égaux à deux droits.

DÉMONSTRATION. Dans les Triangles ACB , AB , est la somme des éloignements de perpendiculaires, AD ou FG en est la différence; par conséquent $\overline{AC}^2 - \overline{CB}^2 = AB \times FG$, on prouvera de même que $\overline{KL}^2 - \overline{LM}^2 = KM \times NO$: or (hyp.) $\overline{KL}^2 - \overline{LM}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$; donc $AB \times FG = KM \times NO$.

SCHOLIE. Lorsque l'un des angles B est droit, l'angle G II.
qui est son complément à deux droits est aussi droit, les lignes
 AB, FG , sont égales & moyennes proportionnelles entre
 KM & NO .

THEOREME I.

*Les coupées & les appliquées prises sur les asymptotes d'une III.
portion déterminée de l'Hyperbole, peuvent être représentées par
les bases croissantes & décroissantes d'une suite infinie de Triangles
qui ont deux côtés égaux chacun à chacun.*

DÉMONSTRATION. La suite infinie des Triangles qui ont Fig. 1 & 2.
deux côtés égaux chacun à chacun, peut être représentée par
les quatre Triangles ACB, FHG, KLM, NPO , qui ont
deux côtés égaux chacun à chacun, & quatre angles sur les
quatre bases, en sorte que les deux angles CBA, HGF , qui
sont sur les deux premières bases, étant égaux à deux droits,
les deux LMK, PON , semblablement posés sur les deux
dernières bases soient pareillement égaux à deux droits, donc
(*Hyp. & par Lem. 1.*) $AB \times FG = KM \times NO$. C'est pour-
quoi nommant AB (a), FG (b), KM (x), NO (y), si l'on
substitue ces valeurs dans l'Equation, il vient $ab = xy$, qui
est l'Equation de l'Hyperbole par rapport à ses asymptotes.

SCHOLIE I. La suite infinie des bases se partage en IV.
deux suites infinies ; celle qui est la suite des bases qui ont
deux angles aigus, représente les coupées ; celle qui est la
suite des bases qui ont un angle obtus, représente les appli-
quées.

Concevés sur l'asymptote AQ les bases qui ont un angle Fig. 4.
obtus, que je nomme y , & sur l'asymptote AP , toutes les
bases qui ont deux angles aigus, que je nomme x . Il est évi-
dent que les x sont croissantes en allant de A vers P , & les y
décroissantes en allant de M vers A .

SCHOLIE II. Parmi ces bases, celle qui a le plus grand V.
angle obtus, & celle qui a le moindre angle aigu, ne diffèrent
ni entr'elles, ni avec les deux bases qui ont chacune un an-
gle droit, que d'une grandeur infiniment petite, c'est pourquoi

elles peuvent être prises l'une pour l'autre : ces deux bases représentent la puissance de l'Hyperbole.

THEOREME II.

- V.I. *Les appliquées & les coupées prises sur l'asymptote de l'Hyperbole, représentent non seulement les bases changeantes d'une suite infinie de Triangles qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, mais elles représentent aussi les bases changeantes d'une infinité de suites de Triangles qui, considérés séparément, ont les côtés inégaux, & dont la différence des quarrés des côtés est le quarré d'une même ligne.*

Fig. 1 & 3.

Soit les deux Triangles ACB , FHG , qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, & deux angles CBA , HGF , qui, pris ensemble, sont égaux à deux droits qui représentent deux Triangles d'une suite infinie. Soit deux autres Triangles KLM , NPO , qui représentent deux Triangles d'une autre suite infinie de Triangles qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, plus grands ou plus petits que les deux côtés des deux premiers Triangles, ensorte néanmoins que la différence des quarrés des côtés des deux derniers Triangles soit égale à la différence des quarrés des côtés des deux premiers Triangles; & que les deux angles LMK , PON , pris ensemble, soient égaux à deux droits, je dis que $AB \times FG = KM \times NO$, ce qui est évident par le Lemme 1. Soit AB (a), FG (b), KM (x), NO (y). Substituant ces valeurs, il vient $ab = xy$.
C. Q. F. D.

- VII. SCHOLIE. On pourroit déduire de ce Théoreme plusieurs propositions sur l'infini qui sont connues, comme, par exemple, qu'il y a des infinis plus grands les uns que les autres : car le nombre des bases de chaque suite infinie est d'autant plus grand que les côtés d'une suite de Triangles, qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, sont plus grands.

2.° On pourroit aussi en déduire qu'il y a différents ordres d'infiniment grands : car, puisque les bases sont infinies lorsque les côtés d'une suite de Triangles ne sont que finis, les suites des bases seront nécessairement infiniment infinies, lorsqu'é

lorsque ces côtés seront infinis : or les côtés des Triangles inégaux deviennent infinis ; car parmi les suites infinies, il ne sçauroit se rencontrer aucun Triangle isoscèle.

COROLLAIRE I. Dans l'Hyperbole chaque coupée prise VIII. sur l'asymptote est à son appliquée comme le sinus de la somme de deux angles est au sinus de la différence des mêmes angles sur la base de tout Triangle, dont la différence des quarrés des côtés est le quarré de la puissance de l'Hyperbole, & dont la base est égale à une coupée.

PRÉPARATION. Soient deux Triangles ACB , FHG , Fig. 1. qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, en sorte que l'angle FHG opposé à la base du second soit la différence des deux angles sur la base du premier Triangle ACB ; des points B & G des deux lignes égales BC & GH , abaissés les perpendiculaires BV & GT , à cause de l'angle extérieur BCV égal aux deux intérieures A & B . BV est le sinus de la somme des angles sur la base du Triangle ACB , & GT est le sinus de l'angle FHG , qui est l'angle de leur différence : or (par Lemme 1.) lorsque l'angle FHG est la différence des angles A & B , l'angle A est égal à l'angle F ; d'où il suit que les Triangles rectangles ABV , FGT , sont semblables ; par conséquent $AB.FG :: BV.GT$, ou, par ce qui précède, la coupée de l'Hyperbole, prise sur les asymptotes, représentée par AB , est à l'ordonnée qui peut être représentée par FG , ce que le sinus BV est au sinus GT . C. Q. F. D.

PROBLEME I.

Un point d'une Hyperbole entre ses asymptotes étant donné, IX. trouver autant de Triangles inégaux que l'on voudra, dont les bases changeantes, prises deux à deux, sont les coupées & les appliquées de l'Hyperbole ; 2.° Décrire l'Hyperbole au moyen des Triangles qui ont les côtés inégaux.

Soit le point donné N ; par ce point tirés la ligne NF Fig. 4. parallèle à l'asymptote AQ . Prenés sur la ligne AT , perpendiculaire à l'asymptote AP , une ligne AB égale à la moitié de la différence de la coupée AF & de l'appliquée FN ; par

ce point *B*, à l'ouverture d'une ligne égale à la moitié de la somme de *AF* & de *FN*, décrivés un arc de Cercle qui coupera *AP* en un point *C*, par le point *C* tirés à la ligne *AT* tant de lignes *CB* que vous voudrés, les Triangles inégaux *ABC*, *ABC*, sont ceux que l'on cherche. Pour trouver différents points de l'Hyperbole au moyen de ces Triangles, par les points *B* à l'ouverture des côtés *BA*, décrivés des arcs de Cercles qui couperont leurs hypothénuses en *r*. Prenés sur l'asymptote *AP* une ligne *AG* égale à la somme des côtés *AB* & *BC* de l'un de ces Triangles rectangles *ABC*, & par le point *G* tirés une ligne *GH* parallèle à l'asymptote *AQ* & égale à la différence *Cr* des côtés *AB* & *BC*; je dis que le point *H* est un point de l'Hyperbole. Il faut démontrer que la ligne *AC* est moyenne proportionnelle entre *AF* & *NF*.

$$\text{DÉMONSTRATION. } \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2.$$

$$\text{CONSTR. } \overline{BC}^2 = \frac{\overline{AF}^2 + 2 AF \times FN + \overline{FN}^2}{4}$$

$$\text{Et } \overline{AB}^2 = \frac{\overline{AF}^2 - 2 AF \times FN + \overline{FN}^2}{4}.$$

$$\text{Par conséquent } \overline{AC}^2 = \frac{4 AF \times FN}{4} = AF \times FN.$$

- X. COROL. I. D'où il suit que la raison pour laquelle l'Hyperbole approche de plus en plus de son asymptote sans y toucher, est la même que celle pour laquelle une infinité de Cercles, qui ont un point *A* commun, approchent de plus en plus de la ligne droite, ou, ce qui est la même chose, de leur tangente *AP*, sans qu'aucun de ces Cercles puissent toucher à leur tangente *AP* en plus d'un point *A*.

- XI. COROL. II. D'où il suit encore que la raison pour laquelle on peut faire passer entre un Cercle & sa tangente une infinité d'autres Cercles sans se toucher entr'eux, ni à leur tangente, qu'en un seul point, est la même que celle pour laquelle on peut faire passer entre une Hyperbole *GIK* & ses asymptotes *AQ* & *AP*, une infinité d'autres Hyperboles, comme par exemple, *LES*, sans qu'elles puissent se toucher entr'elles ni à leurs asymptotes.

Figure 7.

PROBLEME II.

Les deux côtés d'un Triangle étant donnés, trouver le lieu de toutes les bases changeantes d'une suite de Triangles qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, & décrire au moyen de ces bases l'Hyperbole par des points très-proches. XII.
Fig. 4. 5.
& 6.

PREMIÈRE MÉTHODE.

Au milieu d'une ligne BC double du plus grand côté, élevés une perpendiculaire égale au plus petit côté AI , & par le point A à l'ouverture de la ligne AI , décrivés un quart de cercle qui rencontre la ligne BC en K ; par le point A à l'ouverture du plus grand côté AB ou AC , décrivés deux arcs de cercle BE , CD , jusqu'à ce qu'ils rencontrent en D & en E la ligne DE parallèle à CB . L'espace $CDIGK$ contient toutes les bases qui ont deux angles aigus, & l'espace $IGKBE$ contient toutes les bases qui ont un angle obtus.

DÉMONSTRATION. Les bases ne sçauroient être en plus grand nombre que celui qui est exprimé par la hauteur du petit côté AI , c'est pourquoi si l'on conçoit une ligne FGH qui se meut parallèlement à elle-même, en allant de I vers A , le nombre des lignes paralleles sera égal au nombre des bases de la suite des Triangles qui ont deux côtés égaux AI , AB , ou AC . Je dis de plus que toutes ces lignes paralleles sont les bases que l'on cherche : car, par construction, les Triangles FAG , GAH , ont deux côtés égaux chacun à chacun, & aux lignes AB & AI , & deux angles AGF & AGH , qui pris ensemble sont égaux à deux droits. Par conséquent (par Théor. 1.) FG est une coupée de l'Hyperbole, & GH une ordonnée : c'est pourquoi si on prend sur l'asymptote AP une ligne AF égale à FG , & que par le point F on tire une ligne FN parallèle à l'asymptote AQ , & égale à GH , le point N (Théor. 1.) sera un point de l'Hyperbole.

SCHOLIE. On doit par cette méthode décrire l'Hyperbole par des points aussi proches que l'on veut. Car l'espace $CDIGK$ contient toutes les bases qui ont deux angles aigus,

& l'espace $IKBE$ contient toutes celles qui ont un angle obtus, on n'a qu'à les choisir aussi proches l'une de l'autre que l'on voudra. $C. Q. F. D.$

DEUXIÈME MÉTHODE, un peu différente de la première.

- XIV. A l'ouverture du petit côté AK , décrivés un demi-cercle
Fig. 6. partagé en deux également au point I , à l'ouverture du plus grand côté AB ; par le point A décrivés un arc de cercle jusqu'à ce qu'il rencontre en D la ligne ID parallèle à BC .

On prouvera, comme dans le premier cas, en faisant couler le long de AI une ligne FG parallèlement à elle-même, que l'espace $CIDB$ est le lieu de toutes les bases qui ont deux angles aigus, & l'espace $IKBD$, celui de toutes les bases qui ont un angle obtus.

- XV. SCHOLIE. Dans l'un & l'autre cas, quand même la ligne FGH ne seroit point parallèle à la ligne AB , FG , ne laisseroit pas d'être une coupée de l'Hyperbole, & GH l'ordonnée qui lui répond. Car, dans ce cas, comme dans les deux précédents, les Triangles FAG , GAH , ont deux côtés égaux chacun à chacun, & aux deux côtés AI & AB , & deux angles qui, pris ensemble, sont égaux à deux droits.
- XVI. COROLL. I. Chaque suite infinie de Triangles qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, répond à une portion déterminée de l'Hyperbole, qui est le lieu de toutes les bases changeantes de la suite.
- XVII. COROLL. II. Le plus grand de deux côtés inégaux d'une suite infinie de Triangles, qui fait trouver toutes les coupées & toutes les ordonnées d'une portion déterminée de l'Hyperbole est égal à la moitié de la somme, & le moindre côté à la moitié de la différence de la plus grande coupée; & de la moindre ordonnée de la portion déterminée de l'Hyperbole.

DÉMONSTRATION. Par le Probleme 1^{er}, les deux côtés de ce Triangle font trouver la plus grande coupée AF , & la moindre ordonnée FN .

La moindre coupée AC , & la plus grande ordonnée CI

égale à AC , & par le Probleme 2^d, ils font trouver toutes les ordonnées qui sont moyennes entre AC , AF , FN & CI .

COROLL. III. D'où il suit que pour trouver, au moyen XVIII. de l'Hyperbole, le lieu des bases d'une suite infinie de Triangles qui ont deux côtés donnés, égaux chacun à chacun, il faut tirer deux lignes qui fassent au point A un angle quelconque, prendre sur la première une ligne AF égale à la somme, & sur la seconde une ligne AD égale à la différence des côtés, & par les points F tirer les parallèles FN , DN , aux lignes AQ , AF , & décrire une Hyperbole qui passe par le point N .

L'espace compris entre la puissance de l'Hyperbole IC , & entre l'ordonnée NF , est le lieu des bases qui ont un angle obtus, & l'espace $MIND$ est celui des bases qui ont deux angles aigus.

COROLL. IV. La différence de l'espace qui est le lieu XIX. des bases qui ont deux angles aigus d'avec celui qui est le lieu des bases qui ont un angle obtus, considérée dans le cercle, est un demi-cercle; considérée dans l'Hyperbole, elle est zero absolu.

La première partie de cette Proposition est évidente par la seule inspection de la Figure 6 : car, si de l'espace $CIDB$, qui contient toutes les bases qui ont deux angles aigus, on ôte l'espace $IHKBD$ qui contient toutes les bases qui ont un angle obtus, il reste le demi-cercle $CIHK$.

La seconde est aussi évidente : car si, dans l'Hyperbole, on ôte des deux espaces $MDNI$, $ICFN$, dont le premier contient toutes les bases qui ont deux angles aigus, & le second toutes les bases qui ont un angle obtus, l'espace mixtiligne IZN , il reste de part & d'autre, les deux espaces rectilignes égaux $MDZI$, $ZCFN$.

COROLL. V. Les espaces qui sont le lieu d'une même XX. suite de bases infinies sont inégaux, considérés dans le Cercle & dans l'Hyperbole; car s'ils étoient égaux, on trouveroit la quadrature du cercle. Dans l'Hyperbole, la différence des deux rectangles rectilignes $MDZI$, $ZCFN$, seroit un espace rectiligne égal au demi-cercle $CIHK$.

PROBLEME III.

Construire un Compas à tracer une Hyperbole.

XXI. Soit un compas $AKEG$ à trois branches, & à tête mobile, les deux branches AK & KE sont égales entre elles, & à une des lignes AB perpendiculaires à l'asymptote AP , la branche KG est plus grande que chacune des deux autres, & égale à l'hypothénuse BC ; je dis que si la pointe A du Compas étant fixe en A , l'on fait couler le long d'une rainure les pointes E & G , en sorte que la pointe qui est en G chasse la branche GH parallèle à AQ , pendant que la pointe qui est en E , chasse la branche EH parallèle à la ligne AI , qui partage en deux également l'angle QAP des asymptotes, les deux lignes GH , EH , se couperont en un point H , qui sera un point de l'Hyperbole; par le point E tirés la ligne EV parallèle à AQ & à GH .

DÉMONST. (*constr.*) l'angle $QAP = VEP$, (*hyp.*) l'angle $HEG = \frac{1}{2} QAP$ (*constr.*) donc l'angle $VEH = EHG = HEG$; partant le Triangle EGH est isoscèle, & le côté EG est égal au côté GH .

Soit $KG(a)$, $KE(b)$, $AC=c$, $AG=x$, $EG=y$; par le Théoreme 1, on aura $\overline{KG}^2 - \overline{KA}^2 (\overline{AC})^2 = AG \times EG = AG \times GH$, ou en termes algébriques $a^2 - b^2 (c^2) = xy$.
C. Q. F. D.

XXII. SCHOLIE. La précédente Proposition peut servir à confirmer qu'il y a différents ordres d'angles infiniment petits; car lorsque les trois branches du Compas sont infinies, les lignes finies AG , EG , sont infiniment petites par rapport aux branches du Compas, par conséquent les angles AKG , AKE , EKG , sont infiniment petits; c'est pourquoi si l'on suppose que le Compas se soit mû jusqu'à ce que le point K ait infiniment approché de l'asymptote AP , il est évident que pendant ce mouvement les points E & G auront parcouru un espace infini, & que pendant cet espace infini,

l'angle EKG aura toujours diminué, par conséquent il sera devenu infiniment plus petit qu'il n'étoit. *C. Q. F. D.*

COROL. Dans l'Hyperbole le lieu des bases d'une suite XXIII.
infinie de Triangles qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, contient le même nombre de bases égales chacune à chacune, qui répondent aux mêmes angles comme le lieu des bases dans le Cercle.

Je dis que l'espace $MDNI$, qui est le lieu des bases qui Figure 8.
ont deux angles aigus dans l'Hyperbole, contient le même nombre de bases qui répondent aux mêmes angles que l'espace $VOSE$, qui est le lieu de toutes les bases qui ont deux angles aigus dans les deux Cercles, dont l'un a pour rayon la moitié de la différence, & l'autre la moitié de la somme de la plus grande coupée AF & de la moindre ordonnée FN .

Parcillemeut l'espace $ICFN$, qui est le lieu de toutes les bases qui ont un angle obtus dans l'Hyperbole, contient le même nombre de bases qui répondent aux mêmes angles que l'espace $BRES$, qui est le lieu de toutes les bases qui ont un angle obtus dans les mêmes Cercles.

Soit le Compas à trois branches $AKEG$, dont la plus grande branche KG est égale à la moitié de la somme, & les deux plus petites AK & KE à la moitié de la différence de la plus grande coupée AF & de la moindre ordonnée FN .

Concevés qu'en même temps que la ligne GH décrit par un mouvement continu la portion déterminée de l'Hyperbole $ICFN$, la ligne OKL suit le point K , en sorte qu'elle se meut parallèlement à l'asymptote AF , & qu'elle entraîne avec elle les lignes égales AO , AK , & la ligne AL égale à KG , à cause que ces trois lignes ont leur point fixe en A . Lorsque le Compas à trois branches aura décrit la portion déterminée de l'Hyperbole, la ligne OKL aura tracé le demi-cercle VBR avec son anneau circulaire $BKRELS$; d'où il suit qu'à chaque sécante OL répond dans l'Hyperbole une ligne AG ou TH dans l'espace $MDNI$, qui est le lieu de toutes les bases qui ont deux angles aigus dans l'Hyperbole, & qu'à chaque KL , dans le Cercle, répond dans l'Hyperbole une

ligne EG ou GH dans l'espace $ICFN$, qui est le lieu des bases qui ont un angle obtus, par conséquent le nombre des bases dans le Cercle & dans l'Hyperbole est le même, ce qui semble un véritable Paradoxe.

2.^o Je dis que les bases, dans le Cercle & dans l'Hyperbole, sont égales chacune à chacune, & qu'elles répondent à des angles égaux.

Il faut démontrer que la longueur de chaque OL , prise dans le Cercle, est égale à la longueur de chaque AG ou TH , prise dans l'Hyperbole, & que la longueur de chaque KL est égale à la longueur de chaque EG ou GH , de plus que les lignes sont adjacentes aux mêmes angles, tirés la ligne KQ parallèle à l'axe AB .

Les Triangles isoscèles OKA , AKL , ont deux côtés égaux chacun à chacun ; de plus à cause des parallèles PA & KQ , l'angle du milieu OKA est égal à l'angle du milieu AKL , par conséquent $OK = AL$. D'où il suit que $KL = EG = GH$, ce qui est évident, à cause des perpendiculaires égales AP , KQ , & des obliques égales AK , KE , AL , KG .

XXIV. COROLL. I. La moitié de la différence AQ de chaque coupée AG , d'avec son appliquée GH ou EG , est égale à l'ordonnée PK d'un Cercle, dont le rayon AK est égal à la moitié de la différence de la plus grande coupée AF & de la moindre ordonnée FN ; de plus le nombre des différences dans la portion déterminée de l'Hyperbole est égal au nombre des ordonnées dans le Cercle.

XXV. COROLL. II. La moitié de la somme de chaque coupée AG & de chaque appliquée GH est égale à l'ordonnée PL d'un Cercle qui a pour rayon une ligne AL égale à la moitié de la somme de la plus grande coupée AF & de la moindre appliquée FN ; de plus le nombre de ces lignes, dans la portion déterminée de l'Hyperbole, est égal à celui des ordonnées comprises entre la tangente BS & le rayon AE .

DÉMONSTRATION. $PK = \frac{AG - GH}{2} = \frac{AG - EG}{2}$;
ajoutés

ajoutés de part & d'autre les grandeurs EG & KL , on aura

$$PL = \frac{AG - EG}{2} + EG, \text{ ou } PL = \frac{AG + EG}{2} = \frac{AG + GH}{2}.$$

C. Q. F. D.

COROL. III. Lorsque le Compas n'a que deux branches $XXVI$. égales AK & KE , & que la branche KE pousse par son extrémité E la grandeur constante EG , & la ligne GH qui fait un angle quelconque sur la ligne AP , la ligne KG devient une grandeur changeante, je dis que si pendant le mouvement du Compas on prend sur GH les différentes valeurs de GK , la ligne qui passera par ces points sera une Parabole.

Soit $AK = KE = a$, $EG = b$, $AG = x$, $KG = y$, on aura (*Théor. 2.*) $\overline{KG}^2 = \overline{AK}^2 + AG \times EG$, ou, en termes algébriques, $y^2 = a^2 + bx$, qui est une équation à la parabole.

COROL. IV. Lorsque le point fixe est en G , & le point $XXVII$. mobile en A , & que la branche KG est égale à la branche AK , alors EK devient une grandeur changeante. Si l'on suppose que la branche AK pousse la branche AQ , & que pendant le mouvement du Compas on prenne sur AQ les différentes valeurs de EK , la courbe qui passera par ces points sera encore une Parabole.

Soit $AK = KG = a$, $EG = b$, $AE = x$, $KE = y$, à cause du Triangle isoscèle, AKG , $\overline{AK}^2 - AE \times EG = \overline{EK}^2$, ou, en termes algébriques, $a^2 - bx = y^2$.

COROL. V. Lorsque le Compas n'a que deux branches in- $XXVIII$. égales AK, KE , & que le point D qui décrit la Courbe, tombe Fig. 9. sur une des branches inégales KE , alors le Compas décrit une Courbe du troisième genre, qui est une double ellipse; par les points K & D , tirés les perpendiculaires KG, DC , & par le point D la ligne DH parallèle à la ligne AC .

Soit $AK (a)$, $KE (b)$, $ED (d)$, $AF (x)$, $FD (y)$.

Soit $d : c :: FD (y) . DC (\frac{cy}{d})$, & $d . \sqrt{d^2 - c^2} :: FD (y)$

, $FC = \frac{y\sqrt{d^2 - c^2}}{d}$, à cause du Triangle rectangle DCE ,

Mem. 1730.

. V u u

$CE = \sqrt{d^2 - \frac{c^2 y^2}{d^2}} = \frac{1}{d} \sqrt{d^4 - c^2 y^2}$, à cause des Triangles semblables DEC , EKG .

$DE (d) \cdot CE (\frac{1}{d} \sqrt{d^4 - c^2 y^2}) :: KD (b - d) \cdot HD$,
 ou $GC = \frac{b-d}{d^2} \times \sqrt{d^4 - c^2 y^2}$,
 & $DE (d) \cdot DC (\frac{cy}{d}) :: KE (b) \cdot KG = \frac{bcy}{d^2}$.

Partant $GF = \frac{b-d}{d^2} \sqrt{d^4 - c^2 y^2} - \frac{cy \sqrt{d^2 - c^2}}{d}$,
 ou $GF = \frac{b-d \sqrt{d^4 - c^2 y^2} - dy \sqrt{d^2 - c^2}}{d^2}$.

Or $AG = \sqrt{AK^2 - KG^2} = \sqrt{a^2 - \frac{b^2 c^2 y^2}{d^4}}$
 $= \frac{1}{d^2} \sqrt{d^4 a^2 - b^2 c^2 y^2}$: d'où l'on tire une seconde valeur
 de $GF = x - \frac{1}{d^2} \sqrt{d^4 a^2 - b^2 c^2 y^2} = \frac{d^2 x^2 - \sqrt{d^4 a^2 - b^2 c^2 y^2}}{d^2}$.

Donc $b - d \sqrt{d^4 - c^2 y^2} - dy \sqrt{d^2 - c^2} = d^2 x^2$
 $- \sqrt{d^4 a^2 - b^2 c^2 y^2}$; pour abréger, lorsque $d = c$,
 l'équation devient

$b - d \times d \sqrt{d^2 - y^2} = d^2 x - d \sqrt{d^2 a^2 - b^2 y^2}$,
 ou $b - d \sqrt{d^2 - y^2} = dx - \sqrt{d^2 a^2 - b^2 y^2}$.

Faisant évanouir les incommensurables, l'équation devient

$$\left. \begin{array}{ll} 2b - dy^2 + 4b^2 x^2 y^2 & + d^2 x^4 \\ - 2dx \sqrt{b - dx^2 y^2} & - 2d^2 a^2 x^2 \\ - 2da^2 \times 2b - dy^2 & - 2d^2 b - d^2 x^2 \\ + 2dx \sqrt{b - dx^2 y^2} & + d^2 a^4 \\ & - 2d^2 a^2 b - d^2 \\ & + d^2 b - d^4 \end{array} \right\} = 0.$$

Lorsque $y = 0$

$$\left. \begin{array}{ll} x^4 - 2b - d^2 x^2 + d^4 & \\ - 2a^2 & - 2a^2 \times b - d^2 \\ & + b - d^4 \end{array} \right\} = 0. \text{ Partant}$$

$$x^2 = a^2 + \overline{b-d}^2 \pm \sqrt{4a^2 \overline{b-d}^2}$$

$$\text{ou } x^2 = a^2 \pm 2a \times \overline{b-d} + \overline{b-d}^2$$

$$x = a \pm \overline{b-d} \quad -x = -a \mp \overline{b-d}.$$

Lorsque $x = 0$,

$$\left. \begin{aligned} 2\overline{b-d}y^2 - 2da^2 \times 2\overline{b-d}y^2 + d^2 d^2 \\ + 2d \times \overline{b-d}^2 \times 2\overline{b-d}y^2 - 2d^2 a^2 \overline{b-d}^2 \\ + d^2 \overline{b-d}^4 \end{aligned} \right\} = 0.$$

qui est un quarré parfait, partant $y^2 = \frac{da^2 - db - d^2}{2\overline{b-d}}$

$$y = \pm \sqrt{\frac{da^2 - db - d^2}{2\overline{b-d}}}.$$

Lorsque $\overline{b-d}$ est égal à a , la valeur de y est zero absolu au point où x est zero. Par conséquent les deux doubles ellipses opposées se touchent à l'origine.

Lorsque a est plus grand que $\overline{b-d}$, il y a deux valeurs de y à l'origine. Par conséquent dans ce cas, les deux doubles ellipses se coupent en croix.

Lorsque $\overline{b-d}$ est plus grand que a , la valeur de y à l'origine des x est imaginaire. Par conséquent dans ce cas, les deux doubles ellipses ne se touchent, ni ne se coupent point, mais elles sont séparées l'une de l'autre d'un intervalle qui est plus ou moins grand, selon la quantité dont $\overline{b-d}$ surpasse a .

Lorsque a est égal à b , les deux doubles ellipses opposées se confondent & se changent en une simple ellipse, dont l'Equation est $\frac{d^2 x^2}{2a-d} = d^2 - y^2$.

On donnera la suite dans un autre Mémoire, où on rendra raison de ce qui semble dans celui-ci un Paradoxe.



M E M O I R E
S U R U N G R A N D N O M B R E
D E
P H O S P H O R E S N O U V E A U X.

Par M. D U F A Y.

15 Novemb.
1730.

LA découverte de la plus grande partie des Phosphores que nous connoissons, est dûë au hasard; peu touchés de l'utilité qui pouvoit en résulter, & encore moins instruits des routes qu'il falloit tenir, les Chimistes ont de tout temps assés négligé la recherche des Phosphores. Je n'entrerai point dans le détail de tous ceux qui sont connus, & dont la plupart n'ont aucun rapport avec ceux dont j'entreprends de parler, & je ne m'arrêterai qu'à celui qui a fait tant de bruit, sous le nom de *Pierre de Boulogne*. Tout le monde sçait qu'un Artisan, moins occupé de son métier que du desir de faire en Chimie quelque découverte utile, s'avisa de calciner cette Pierre, espérant que ce pourroit être une Mine d'Argent, & trouva qu'elle avoit cette propriété singulière, & alors crüe unique, d'être lumineuse dans l'obscurité, après avoir été exposée pendant quelques moments au jour dans l'air libre. Cette découverte fut extrêmement célébrée, plusieurs personnes écrivirent sur ce sujet, & entrèrent dans un grand détail sur la nature de cette Pierre, les lieux où elle se trouve, ses différentes préparations, ses propriétés, &c. Poterius, Licetus, Celius, Mentzelius, & plusieurs autres en firent une Histoire fort ample, & jusqu'alors on n'avoit entendu parler d'aucune autre matière qui eût la même propriété. Enfin Balduinus, Chimiste Allemand, donna dans les *Ephémérides d'Allemagne*, un Traité intitulé *Aurum auræ*, à la fin duquel il y a une Section qui a pour titre, *Phosphorus hermeticus*, dans laquelle il décrit la préparation & les effets d'un

*In App. ad
annum 4. & 5.
natur. curios.
p. 171.*

Phosphore qui paroît avoir infiniment de rapport avec la Pierre de Boulogne, mais tout cet ouvrage est écrit si énigmatiquement, & en des termes si obscurs, que j'avoüe qu'il m'a été impossible d'y rien entendre. Mentzelius, dont l'ouvrage est postérieur à celui de Balduinus, compare d'une manière fort détaillée, la Pierre de Boulogne avec ce nouveau Phosphore, mais sans l'avoir vû, & simplement sur les effets qui sont rapportés dans le Traité de Balduinus.

Kunkel, Boyle, M. Lémery, Theichmeyer en dernier lieu, ont donné sous le nom de *Phosphore hermetique de Balduinus*, un procédé qui réussit parfaitement, & qu'on peut croire en effet être le même que celui de Balduinus, puisqu'il en a réellement toutes les propriétés, quoiqu'à dire le vrai, on ne trouve rien dans la composition de ce dernier qui ait aucun rapport avec le premier, celui-ci étant une dissolution de Craye par l'Eau forte évaporée & calcinée, au lieu que celui de Balduinus est la Tête-morte d'un Alkaest, dont la préparation est décrite en termes si pompeux & si obscurs, qu'on n'en peut faire aucun usage. Quoi-qu'il en soit, celui qu'on trouve dans ces Auteurs a beaucoup de conformité pour ses effets avec la Pierre de Boulogne, & c'est, à ce que je crois, la seule préparation connue qui ait cette propriété; on n'a même trouvé jusqu'à présent dans les Minéraux, ni dans les autres matières simples, que la seule Pierre de Boulogne qui ait cette vertu singulière de s'abbeuver, pour ainsi dire, des rayons de lumière, & de les conserver assez longtemps, pour paroître lumineuse dans l'obscurité pendant quelques minutes.

Le P. Kirker dit en avoir trouvé de pareilles, & qui avoient les mêmes propriétés auprès d'une Mine d'Alun à Tolfa. Mentzelius décrit cinq especes de cette Pierre, qui se trouvent toutes aux environs de Boulogne, & dont quelques-unes ont des différences considérables. Il semble que cela devoit naturellement faire soupçonner qu'il se pouvoit rencontrer ailleurs des Pierres semblables, ou d'autres qui eussent les mêmes avantages; il faut cependant que personne

*De Arte
magn. p. 581.*

Sec. 2. cap. 5.

ne s'en soit avisé, & il semble qu'on se soit refusé aux découvertes qui s'offroient d'elles-mêmes dans une infinité d'opérations. Plus les expériences sont simples, plus elles tardent souvent à être découvertes ; on va être étonné sans doute de ce qu'une chose aussi commune, & qui demande aussi peu d'appareil, a pû demeurer si long-temps sans être connue.

Il y a quelques années que je formai le dessein d'examiner, par les différents moyens que je pûs imaginer, la nature de toutes les Pierres fines. Parmi les épreuves que j'en faisois, celle de les calciner étoit une des principales. Comme je tâchois de n'obmettre aucune des Pierres qui peuvent être rangées dans la classe des Pierres fines, j'examinai aussi celles qui n'y sont que parce qu'il n'étoit pas trop aisé de les placer ailleurs ; la Topaze commune est de ce nombre : comme il y en a de plusieurs sortes, il est bon d'avertir que celle dont je parle, n'est quasi connue qu'en Médecine, on l'employe dans les préparations où il doit entrer des Topazes ; c'est une Pierre très tendre, jaunâtre, pesante, talqueuse, & qui, lorsque j'en voulus faire la description, me rappella sur le champ l'idée de la Pierre de Boulogne, dont elle ne differe que par la forme extérieure, celle-ci étant ordinairement un peu arrondie & raboteuse, au lieu que la Topaze affecte le plus souvent la forme cubique, ou du moins est presque toujours terminée par des surfaces paralleles. Sans en faire de comparaison plus détaillée, je calcinai cette Topaze dans un creuset, comme les autres Pierres, & lorsqu'elle fut refroidie, je trouvai qu'elle avoit une forte odeur de Soufre semblable à celle de la Pierre de Boulogne calcinée, je ne doutai plus qu'elle ne fût lumineuse ; je l'exposai à la lumière du jour, & la portai ensuite dans l'obscurité, & je la trouvai semblable aux meilleures Pierres de Boulogne. Je comparai ensuite avec plus de soin cette Pierre, avec un assés grand nombre de celles que j'avois rapportées de Boulogne, il y a quelques années, & je trouvai que c'étoit en effet la même nature de Pierre, enforte qu'il y en avoit quelques-unes d'entièrement semblables ; ma surprise changea d'objet, & je ne

fus plus étonné que de ne m'en être pas avisé plûtôt.

J'avois soupçonné autrefois que la Bélemnite, ou Pierre de Lynx, pouvoit avoir quelque rapport avec la Pierre de Boulogne, à cause de sa disposition en rayons, je l'essayai sur le champ, elle se réduisit presque en poudre par la calcination, & n'avoit, étant refroidie, aucune odeur de Soufre, cela me parut d'un mauvais augure, mais ma conjecture se trouva très-fausse, car la Bélemnite me donna une belle lumière, & même un peu plus vive que la Topaze; je ne songai plus alors qu'à pousser plus loin ma découverte, & à essayer toutes les Pierres qui me vinrent dans l'idée.

Je ferois un volume entier, si je voulois rapporter toutes les expériences que je fis, & les différentes manières dont elles me réussirent; mais, pour éviter un détail ennuyeux, je dirai simplement que j'essayai toutes les especes de Gyps, ou Pierres à plâtre, que je pûs recouvrer, & toujours avec succès; toutes me donnerent de la lumière, presque toutes avoient une odeur sulphureuse, mais quelques-unes étoient plus lumineuses que les autres, les Albâtres, & le Gyps de Montmartre, appelé improprement *Talc*, étoient de ce nombre.

Ayant épuisé les Gyps, je passai aux Pierres à chaux, & aux Marbres, qui sont pour la plupart de même nature, tout se trouva Phosphore, tout me donna de la lumière, il est vrai qu'elle étoit moins vive dans ces dernières Pierres que dans les Gyps, & qu'il falloit un degré de feu beaucoup plus violent pour les calciner; souvent après la première, & même la seconde calcination, ces Pierres ne donnoient aucune lumière, mais en les calcinant de nouveau, elles devenoient lumineuses, enforte qu'il n'y en a aucune, de celles qui se peuvent réduire en Chaux, qui ne m'ait donné de la lumière, lorsque je me suis obstiné à la calciner.

Les matières terreuses, telles que la Marne, les Bols, la Craye, les Moilons, les Pierres de Taille & de Liais, n'ont point donné de la lumière par la calcination, quelque violente qu'elle ait été. Je résolus donc de tenter une autre voye, &

la facilité qu'elles ont presque toutes à se dissoudre dans les Esprits acides, me fit juger que j'en devois attendre le même effet que de la Craye dans le Phosphore de Balduinus; j'en essayai plusieurs qui me réussirent très-bien, & il est vraisemblable que toutes celles qui se peuvent dissoudre dans l'Eau forte, deviendront lumineuses en suivant le même procédé.

Les Pierres à chaux, les Marbres, les Gyps, les Albâtres, la Bélemnite, les Coquilles pétrifiées tendres, & généralement toutes les Pierres qui se peuvent dissoudre par les acides, quoique lumineuses par la seule calcination, le sont aussi par le procédé de Balduinus. Enfin, à la réserve des Pierres dures ou impénétrables aux acides, comme les Agathes, les Jaspes, le Caillou, le Porphyre, le Grais, le Sablon, le Cristal de Roche, le Cristal d'Islande, le Sable de Rivière, la Pierre de Lar, la Pierre de la Croix, l'Ardoise, le Talc, les Pierres précieuses dont aucune ne m'a réussi, il n'y en a peut-être point qui ne soit lumineuse, soit par la simple calcination, soit par la préparation que nous avons rapportée, ou même des deux manières.

Je ne crois pas cependant les Pierres dures, dont je viens de parler, absolument intraitables, & j'espère parvenir à les rendre lumineuses comme les autres, par un procédé que je n'ai point encore eû le temps de finir. Peut-être les Métaux mêmes ne sont-ils pas exempts d'une propriété commune à tout ce qui est renfermé dans les entrailles de la Terre; mais je réserve ce travail pour un autre temps.

Le Phosphore de Balduinus ne doit être regardé que comme faisant partie de la classe générale des matières qui deviennent lumineuses par la dissolution : Voici la manière de les préparer toutes, qui m'a paru la plus simple. On fait dissoudre dans l'Eau forte, ou l'Esprit de Nitre, quelqu'une des Terres, Pierres, ou Crayes, dont nous venons de parler, & pour cela, on les pulvérise, & on les jette petit à petit dans l'Eau forte, afin que l'ébullition ne soit point trop violente, ce que l'on continué jusqu'à ce qu'il ne se fasse plus de

de fermentation. On verse la dissolution par inclination, & on la fait évaporer jusqu'à siccité dans un vaisseau de terre, ou de grès ; on prend un peu de cette matière sèche, on la met dans un Creuset, dont elle ne remplisse que la moitié, & sans le couvrir, on le place entre les charbons ardents ; la matière se fond, & après avoir bouillonné pendant quelque temps, elle se dessèche, sans qu'il soit besoin de faire un plus grand feu que celui qu'il faut pour fondre du plomb ; on laisse refroidir le Creuset, & l'ayant exposé à la lumière, on le porte dans l'obscurité : il est inutile de dire ici que pour bien voir l'effet de tous ces Phosphores, il faut avoir tenu pendant quelque temps les yeux fermés ; tout le monde en fait les raisons, & il les faut observer exactement dans ces expériences, pour les voir dans toute leur beauté.

Entre les Pierres qui deviennent lumineuses par la dissolution, la Pierre de Taille m'a paru faire le plus bel effet, & la Bélemnite, qui par la simple calcination est une des plus lumineuses, m'a semblé la moins brillante par la dissolution ; je n'entrerai point dans l'examen des autres, parce que ce détail n'auroit point de bornes. Il ne seroit pas non plus possible d'examiner en particulier toutes celles qui deviennent lumineuses par la seule calcination, il suffit de s'arrêter à celles qui font le plus bel effet, telles que sont la Bélemnite, la Topaze, la Pierre de Boulogne & le Gyps talqueux. Voici la manière de les préparer toutes, qui est très-simple, & qui m'a parfaitement réussi.

Je prends une, ou plusieurs de ces Pierres entières, ou pulvérisées, je les mets dans un Creuset que je couvre & que je place dans une Forge, je l'entoure de charbons, & je le chauffe à peu près comme si je voulois fondre de l'Argent ; je le laisse en cet état environ une demi-heure, ou trois quarts d'heure, & ayant laissé refroidir le Creuset, ma Pierre se trouve lumineuse. La Pierre de Boulogne ne demande pas plus de préparation que les autres, & quoique le procédé de Cellius*, rapporté par M. Homberg, soit parfaitement bon, celui-ci réussit également bien, & demande moins d'appareil.

Mem. 1730.

. XXX

* Il Fosforo, d
vero la Pietra
Bolognese pre-
parata per so-
rilacere fra
l'ombre.

Si la Pierre n'est point lumineuse, ou qu'elle ne le soit que foiblement, on la calcine une seconde, ou même une troisième fois, & elle le devient.

Pour en voir l'effet, je les expose ordinairement pendant une minute au grand jour, & elles s'impregnent d'une lumière, dont la vivacité & la durée sont inégales; celle de la Topaze est fort vive & dure peu, mais j'ai souvent vu la Bélemnite la conserver plus d'une heure. Toutes ces Pierres, de même que celle de Boulogne, deviennent lumineuses étant exposées au jour à travers l'eau, le verre, & tous les corps transparents; elles le deviennent aussi, mais très-foiblement, au clair de Lune, à la lumière d'un flambeau, ou d'une bougie, & même pendant le crépuscule, en sorte qu'en Été j'en ai vu prendre de la lumière une heure entière après le coucher du Soleil. Plusieurs Auteurs ne conviennent pas de quelques-unes de ces expériences à l'égard de la Pierre de Boulogne, mais cela vient sans doute de ce qu'ils se sont servi de Pierres qui avoient peu de vertu, car le fait est certain, & je l'ai éprouvé plus d'une fois. En général la lumière est par-tout la même; elle ne diffère que par le plus ou le moins de vivacité; ainsi quelque cause qui la produise, on en doit toujours attendre le même effet. M. Lémery a remarqué que la Pierre de Boulogne ne prenoit pas tant de lumière étant exposée au Soleil que dans l'ombre, soit que la matière de la lumière, poussée avec trop d'impétuosité, soit réfléchie en plus grande quantité par la Pierre, soit que le Soleil enlève promptement les parties les plus propres à conserver le mouvement; quoiqu'il en soit, j'ai fait la même observation sur la plupart des matières dont j'ai parlé dans ce Mémoire. Il est aussi à remarquer que l'effet de ces Pierres est moins beau, & que quelques-unes n'en font aucun, lorsqu'elles viennent d'être calcinées, & qu'elles sont encore chaudes, qu'étant refroidies; il m'a aussi paru qu'elles faisoient encore mieux le lendemain que le jour même de leur calcination.

Je dois ajouter ici que, n'ayant pas toujours calciné chacune de ces Pierres séparément, mais en ayant mis quelques-

fois plusieurs ensemble, j'ai remarqué que rien ne faisoit mieux que la Topaze calcinée dans le même creuset avec de la Bélemnite concassée ou pulvérisée ; & qu'en général celles qui demeurent entières dans la calcination, font mieux, lorsqu'on les entoure de poudre de la même pierre, ou de quelqu'autre ; M. Homberg l'avoit remarqué à l'égard de la Pierre de Boulogne, mais sans cela la Pierre ne laisse pas d'être lumineuse, & cette circonstance ne sert qu'à rendre sa lumière plus vive.

J'ai tâché, par tous les moyens que j'ai crû praticables, de fixer le degré de feu le plus convenable pour ces sortes de calcinations, mais je n'ai pû y parvenir, & quand je l'aurois fait, on n'en auroit tiré aucune utilité, parce qu'il est presque impossible de ne pas réussir dans toutes ces opérations ; j'ai poussé le feu sur la Topaze, la Bélemnite & la Pierre de Boulogne jusqu'à vitrifier tout l'intérieur du creuset, elles ont toujours été lumineuses, elles m'ont cependant paru l'être un peu moins que lorsqu'elles étoient calcinées plus modérément ; il résulte de-là qu'on ne peut manquer qu'en ne donnant pas le feu assés fort, auquel cas il faut recommencer, & on est assuré de réussir. En général, les Gyps & Albâtres demandent le moins de feu, les Marbres & les Pierres à Chaux en demandent le plus, & il faut le degré moyen à la Bélemnite, la Topaze & la Pierre de Boulogne.

Je vais rapporter maintenant quelques observations sur plusieurs de ces Phosphores, qui méritent d'être remarquées. Nous avons déjà observé que toutes ces matières ne rendent pas une lumière égale, il se trouve encore beaucoup d'autres variétés dans leurs effets. Celles qui deviennent lumineuses par dissolution, donnent une lumière rougeâtre, & semblable à un charbon de feu, mais cette propriété ne leur dure guères plus d'un mois ; la lumière des Pierres à Chaux & des Marbres est blanche, & assés vive dans les commencements ; mais leur vertu n'est pas non plus de longue durée, & je n'en ai point vû qui l'eût conservée deux mois après sa calcination. Les Albâtres & les Gyps sont, à peu près, dans le même cas, excepté celui de Montmartre que j'ai conservé

lumineux pendant plus de six mois, mais sa vivacité alloit toujours en diminuant. Je ne puis encore assigner aucun terme à la durée de la propriété des autres Pierres, n'ayant pas même remarqué de diminution sensible dans la plupart, quoique j'en aye de calcinées depuis huit mois, & qu'elles ayent été exposées toutes très-souvent à la lumière, ce qui paroît leur devoir faire le plus de tort.

J'ai voulu voir l'effet que feroient ces différents Phosphores dans l'eau, & il n'y en a aucun de ceux que j'ai essayés qui y ait entièrement perdu sa lumière. Les Marbres & les Pierres à Chaux étant nouvellement calcinés, y font un effet singulier. Lorsqu'on leur a fait prendre de la lumière, en les exposant à l'air, si on les porte dans l'obscurité, & qu'on les plonge subitement dans l'eau, leur lumière augmente tout à coup, à mesure qu'elles se dissolvent & s'échauffent, & un moment après elle s'évanouît presque entièrement; l'espece de pâte liquide, en laquelle se réduisent alors ces Pierres, demeure cependant encore un peu lumineuse, & même reprend de la lumière, quoique noyée d'eau, si on l'expose de nouveau au jour; il est vrai que cette propriété lui dure très-peu, & qu'au bout de 24 heures, elle n'en avoit plus aucune. Les mêmes Pierres éteintes à l'air pendant huit jours, prennent encore de la lumière, & ne font plus le même effet étant plongées dans l'eau, elles y conservent leur lumière sans cette augmentation subite, mais sans diminution sensible, & cependant elles perdent leur vertu en peu de temps; les Gyps & Albâtres plongés dans l'eau font le même effet que la Chaux éteinte à l'air, toutes les autres Pierres n'y souffrent aucun changement, l'eau se charge seulement de la poudre la plus subtile, & paroît d'une lumière blancheâtre ou laiteuse, les particules plus grosses demeurent au fond de la liqueur, & sont plus lumineuses que le reste. L'Esprit de Vin & l'Huile ne font pas plus d'effet que l'eau, & j'ai conservé pendant plusieurs jours des morceaux de ces Phosphores dans chacune de ces liqueurs, ils ont fait leur effet à l'ordinaire, mais ils ont perdu leur propriété plutôt qu'ils n'auroient fait étant conservés séchement.

L'Eau forte & les autres Esprits acides n'éteignent pas la lumière de la Topaze, ni de la Pierre de Boulogne; l'ayant même perdue au bout de quelques minutes, comme elles auroient fait dans l'expérience ordinaire, elles la reprennent à travers la liqueur dans laquelle elles ne se dissolvent point; quelque temps qu'elles y demeurent, & j'en ai conservé pendant très long-temps sans qu'il leur soit arrivé plus de changement que dans l'eau commune. M. le Comte de Marsilly dit que la Pierre de Boulogne fermente dans l'Eau forte, je l'ai examiné avec soin, & il m'a paru que lorsqu'elle étoit bien nette, & dégagée de toute matière terreuse, elle ne fermentoit, ni ne se dissolvoit point dans les Acides. Le Phosphore de Balduinus, & tous ceux qui se font par dissolution, ne s'éteignent pas non plus dans les Acides, mais ils s'y dissolvent de nouveau, lentement, & sans ébullition; & ils ne cessent de faire leur effet que lorsqu'ils sont entièrement dissouts. La Bélemnite s'éteint dans l'Eau forte, & fait lorsqu'on l'y jette, un bruit semblable à un fer rouge qu'on plonge dans l'eau, sa lumière augmente dans l'instant, & se perd un moment après. Le Gyps fait à peu près le même effet, hormis qu'il ne fait pas ce bruit dont je viens de parler; mais il s'y dissout avec ébullition, & perd sa lumière; il faut entendre la même chose des Albâtres & des Sélénites: toutes ces Pierres exhalent une forte odeur de Soufre, en les plongeant dans l'Eau forte, ce que ne font point celles qui n'y perdent pas leur lumière sur le champ.

Aucune de ces matières ne m'a paru faire d'effet sensible dans les dissolutions de Sels alkalis, elles n'y font que comme dans l'eau commune, c'est-à-dire, qu'elles y conservent leur lumière.

Il y a encore un grand nombre d'expériences à faire sur ce sujet, & elles peuvent être variées à l'infini, par le nombre prodigieux de ces sortes de Phosphores, car le champ est encore infiniment plus vaste qu'il ne l'a paru par ce Mémoire, dans lequel nous n'avons parlé que des seuls Minéraux; & il ne faut pas croire que le regne des Végétaux & celui

des Animaux ne nous fournisse pas un aussi grand nombre de pareils Phosphores. Dans une matière aussi étendue, il ne m'a été possible d'en essayer qu'un petit nombre, mais tous ceux que j'ai essayés m'ont réussi. L'Yvoire, les Os d'Animaux, les Ecaillés d'Huitres, les Coquilles d'Oeufs & les autres matières semblables, étant brûlées simplement dans le feu, ou dans un Creuset, deviennent lumineuses, & quelques-unes conservent leur lumière assez long-temps. Les Bois, les Fruits, les Herbes, & tout ce qui peut être réduit en cendres, donne aussi de la lumière, il ne faut que dissoudre ces cendres dans l'Eau forte, & procéder comme dans la préparation de Balduinus, l'effet en est le même. Enfin il est à croire qu'il ne se trouvera plus rien sur la Terre qui ne mérite le nom de Phosphore à aussi juste titre que la Pierre de Boulogne. Dans quel étonnement ne seroient point ceux qui ont fait des volumes entiers pour faire l'éloge des propriétés merveilleuses de cette Pierre, s'ils voyoient aujourd'hui qu'il est presque impossible de trouver quelque matière dans le monde qui n'ait pas les mêmes avantages. Et ce sera un phénomène très-singulier, qu'une matière qu'on ne pourra rendre lumineuse, ni par calcination, ni par dissolution.

Je ne crois pas cependant que les observations les plus importantes qu'il y ait à faire, roulent sur les particularités de ces différentes matières, elles doivent avoir pour objet tous ces Phosphores, en général. Nous savons que ces Chaux s'impregnent avec beaucoup de facilité de la substance de la lumière, qu'elles la conservent quelque temps, & la perdent enfin ; mais nous ne savons pas trop bien comment la plupart des matières acquièrent cette propriété par la seule calcination, pourquoi d'autres ont besoin de l'addition des Sels acides, ce qui fait perdre à quelques-unes cette propriété en peu de jours si elles demeurent exposées à l'air, comment elles la recouvrent par une nouvelle calcination, en sorte que leur lumière devient aussi belle que la première fois, comme je l'ai éprouvé ; il faudroit peut-être bien des années & bien des calcinations répétées pour épuiser cette propriété, &

peut-être n'y parviendrait-on pas. La lumière qu'elles prennent n'est pas toujours la même, elle est souvent blanche, d'autres fois rouge, quelquefois bleüe. La cause de ces différences n'est point encore connue; la couleur du feu pendant la calcination, celle des rayons qu'on fait tomber sur la Pierre par le moyen du prisme, en l'exposant au jour, les milieux par lesquels passent ces rayons, les corps qui les réfléchissent, la quantité ou la vivacité de la lumière, la durée du temps qu'elle y demeure exposée, toutes ces circonstances causent des variétés considérables, & méritent d'être observées avec grand soin; peut-être une connoissance beaucoup plus exacte de la nature de la lumière sera-t-elle le fruit de cet examen. Jusqu'à présent la rareté de la Pierre de Boulogne a rendu ces recherches très-difficiles; présentement tout en peut tenir lieu, & plus il y a de différentes matières qui produisent les mêmes effets, plus on aura de facilité; nous trouverons dans l'une très-aisément ce qui nous eût échappé dans l'autre; enfin il est à croire que cela nous mènera à de nouvelles connoissances qui pourront avoir leur utilité. J'ai déjà fait plusieurs expériences dans les vûes que je viens d'indiquer: mais outre qu'il en reste encore un bien plus grand nombre à essayer, je ne les ai point faites avec assez de précision pour y pouvoir compter; je pourrai cependant les donner dans une autre occasion, mais je souhaiterois que d'autres personnes voulussent prendre la peine d'y travailler aussi de leur côté, & j'ose assurer que le champ est assez vaste pour occuper plusieurs Physiciens, & pour fournir un grand nombre de nouvelles découvertes & d'observations des plus curieuses & des plus singulières.



R E F L E X I O N S
S U R
LE MOUVEMENT DES EAUX.

Par M. P I T O T.

16 Decemb.
1730.

I. Les avantages qu'on tire du mouvement des Eaux sont connus de tout le monde. Comme cette partie des Mathématiques est une des plus utiles, elle a fait l'objet des recherches de plusieurs habiles Mathématiciens. Heron, Majottus, Guglielmini, Castelli, Borelli, Toricelli, & sur-tout M.^{rs} Mariotte & Varignon, ont porté cette science à un point de perfection, qu'il semble qu'on n'a plus rien laissé à desirer. Nous avons crû cependant que les réflexions suivantes pourroient avoir leur utilité, principalement pour le Calcul des Machines mues par des chûtes & courants d'Eau, dont nous avons traité dans les Mémoires de l'Académie des années 1725, 1727 & 1729. Ce que nous disons ici peut être regardé comme une suite de ce que nous avons donné dans ces différents Mémoires.

II. Comme la science du mouvement des Eaux est une de celles qu'on peut appeller *Physico-Mathématique*, on a commencé par des expériences, pour connoître, à peu-près, les loix de leurs équilibres, de leurs vîteses, par rapport à la hauteur des Réservoirs, du temps de leurs écoulements, de la force de leurs impulsions, &c. & l'on a donné ensuite des démonstrations géométriques de presque tout ce que les expériences n'avoient fait qu'indiquer. Un seul principe qui sert de base & de fondement à presque toute cette théorie, ne paroissoit pas susceptible de démonstration géométrique, mais M. Varignon l'a démontré dans les Mémoires de 1703. Voici ce principe : *Les vîteses de l'Eau, à la sortie des ouvertures faites au bas des Réservoirs ou des Tuyaux de conduite,*
sont

font entr'elles comme les racines des hauteurs de l'Eau au dessus des ouvertures.

III. Par ce principe on peut trouver ou connoître quelle doit être la hauteur du Réservoir, ou la longueur du Tuyau, pour que la vitesse uniforme avec laquelle l'Eau coulera & sortira du Tuyau, soit égale à une vitesse donnée, & réciproquement la hauteur du Tuyau étant donnée, on trouvera la vitesse. Mais puisque les dépenses d'un même Tuyau sont proportionnelles aux vitesses de l'Eau, on connoîtra par-là les dépenses des Tuyaux suivant leurs différentes longueurs & grosseurs, & réciproquement. Voici en deux mots comment on peut faire ces calculs, & la règle qu'on doit suivre; il est vrai que M. de la Hire a parlé de cette règle dans les Mémoires de 1702, mais nous avons besoin de la rappeler ici.

IV. On a trouvé, par expérience, qu'un corps en tombant dans l'air libre, parcourt un espace de 14 pieds dans la première seconde de sa chute, & l'on sçait que si ce corps continuoît à se mouvoir avec toute la vitesse acquise par sa chute de 14 pieds, il parcourroit 28 pieds par seconde d'un mouvement uniforme. Voilà donc un rapport constant, c'est-à-dire, que nommant x la hauteur de la chute d'un corps, ou de l'Eau d'un Réservoir, & u la vitesse uniforme que ce corps doit acquérir en tombant de la hauteur x , on aura, par le principe, $\sqrt{14} \cdot 28 :: \sqrt{x} \cdot u$, & $28 \sqrt{x} = u \sqrt{14}$, qu'on réduit à $56x = uu$. Par cette égalité ou formule on fera tous les calculs entre les hauteurs des Réservoirs & les vitesses des Eaux : car on voit, 1.° Que si la hauteur x est connue ou donnée, pour trouver la vitesse u on multipliera la hauteur ou la valeur de x par 56, & la racine quarrée sera la valeur de u , ou de la vitesse uniforme acquise par la chute de la hauteur x . 2.° Mais si la vitesse u est donnée, on en prendra le quarré, qu'on divisera par 56, & le quotient sera la hauteur x . On voit aussi que si l'on décrit la parabole, dont $56x = uu$ est l'équation, les abscisses x marqueront les hauteurs des Réservoirs, & les ordonnées u

Mem. 1730.

. Yyy

les vîtesſes uniformes des Eaux. Ces regles conviennent également à toutes ſortes de chûtes d'Eau, de quelle grandeur & figure que ſoient les ouvertures des Réſervoirs & des Tuyaux de conduite.

V. Donc la vîteſſe de l'Eau dans les Tuyaux eſt toujours uniforme, égale à la vîteſſe d'un corps acquiſe en tombant de la hauteur du niveau de l'Eau du Réſervoir au deſſus de ſon ouverture, & par conſéquent la vîteſſe ou la chûte de l'Eau dans les Tuyaux eſt toujours double, ou ſe fait dans la moitié moins de temps que par ſa chûte de la même hauteur dans l'air libre.

Figure 1.

VI. Voilà la raiſon d'où vient que la vîteſſe de l'Eau à l'orifice *T*, quoique plus grande que ſa vîteſſe en *P*, ſa quantité eſt cependant la même ; car pour que la quantité d'Eau en *T* fût proportionnelle à ſa vîteſſe, il faudroit que la vîteſſe à l'orifice *P* fût égale à celle de *T*, ce qui ne ſçauroit être, les Tuyaux étant de différentes hauteurs.

Figure 2.

VII. Cette conſidération peut être utile dans les Machines mues par des chûtes d'Eau, pour placer avantageuſement la Roïe de Moulin, ou la Roïe qui porte les Aubes ; & calculer exactement l'action de l'Eau ſur les Aubes, ou la force motrice de la Machine. Car ſoit, par exemple, deux Roïes de Moulin *V* & *X*, placées au bas d'un Réſervoir, l'une en *P*, & l'autre en *T*, je dis qu'on ne doit pas calculer la force de l'Eau ſur les Aubes de la Roïe *X* par la méthode ordinaire ; car pour connoître la force de l'impulſion de l'Eau ſur les Aubes d'une Roïe ou de toute autre ſurface, ſa vîteſſe étant connue, on prend, par la méthode ordinaire, le poids d'un ſolide d'Eau qui a pour baſe la ſurface choquée, & pour hauteur celle d'où l'Eau doit tomber pour acquérir cette vîteſſe. Or lorsque la hauteur du Réſervoir eſt connue, la valeur de ce ſolide eſt auſſi, dont le poids, à raiſon de 70 livres le pied-cube, eſt la valeur de la force de l'impulſion, ou choc perpendiculaire de l'Eau ſur les Aubes de la Roïe de Moulin. Mais ſi au contraire la vîteſſe de l'Eau eſt donnée, on trouvera facilement la hauteur du Réſervoir par l'égalité

56x = uu, comme il a été expliqué ci-dessus.

Voilà le calcul qui convient aux Aubes de la Roüe *V*, parce qu'on peut les regarder comme placées immédiatement au dessous de l'ouverture *P*. Mais si on vouloit appliquer ce même calcul aux Aubes de la Roüe *T*, l'Eau ayant parcouru l'espace *PT* dans l'air libre, on trouveroit une force plus grande qu'elle ne seroit réellement, & on se tromperoit ; en voici la raison, & en même temps la méthode de faire les Calculs pour les Roües disposées de cette sorte. Puisque les forces des impulsions sont égales aux solides d'Eau qui ont pour base la surface des Aubes, laquelle surface doit être égale à l'orifice du Tuyau, & pour hauteur celle du niveau de l'Eau du Réservoir, si le Tuyau descendoit jusqu'en *T*, l'impulsion de l'Eau sur l'Aube placée en *T* seroit à l'impulsion sur l'Aube placée en *P*, comme la hauteur *TK* à la hauteur *PK*, parce qu'alors les impulsions sont en raison composée de celle des vîteses, ou comme \sqrt{TK} à \sqrt{PK} , & de la raison des quantités d'Eau écoulées en temps égaux par les orifices *T* & *P* ; or cette raison étant la même que celle des vîteses, l'impulsion sur l'Aube en *T* sera à l'impulsion sur l'Aube en *P* comme les quarrés des vîteses, ou comme *TK* à *PK*. Mais si le Tuyau ne descend que jusqu'en *P*, les quantités d'Eau écoulées seront les mêmes, & alors les impulsions seront nécessairement dans la raison simple des vîteses, ou comme \sqrt{TK} à \sqrt{PK} .

VIII. On voit par-là l'avantage qu'il y a de conduire l'Eau avec un Tuyau le plus près qu'il est possible de la Roüe de Moulin, ou de mettre les Aubes le plus près qu'on peut de l'ouverture faite au bas des Réservoirs, au lieu de la laisser tomber dans l'air libre, ou même sur un plan incliné par le moyen d'une rigole en forme de gouttière, comme je l'ai vu pratiquer à plusieurs Roües pour mouvoir des Soufflets & Marteaux de Forges, à moins qu'on ne soit assujetti par la quantité d'Eau que l'on a à dépenser, mais en ce cas il vaut mieux faire les ouvertures & les aubes plus petites.

IX. Ce que nous venons de dire des chûtes d'Eau verticales, se doit entendre des chûtes inclinées à l'horison, en prenant leurs hauteurs verticales pour leurs hauteurs propres, ce qui a été démontré par tous ceux qui ont écrit des Hydrauliques ou Mouvements des Eaux.

X. L'Eau coulante ou courante sur des plans inclinés doit accélérer sa vitesse suivant les racines des hauteurs perpendiculaires, ou, si l'on veut, suivant les racines des longueurs du plan parcourûes, cela est connu. Or puisque les lits des Fleuves, des Rivières & des Aqueducs, sont des plans inclinés, la vitesse de leurs Eaux doit, par cette raison, s'accélérer & augmenter depuis leurs sources jusqu'à leurs embouchûres : ainsi, suivant ce principe, on trouveroit aisément par l'équation de l'Art. IV, la vitesse du courant des Rivières, leurs pentes, étant données, & réciproquement la hauteur ou l'inclinaison de leurs pentes, les vitesses étant connûes. Mais deux causes principales dérangent totalement cette regle; ces causes sont, la première, la résistance que les Eaux des Fleuves & grandes Rivières trouvent à leurs embouchûres en se déchargeant dans la Mer, & la seconde, les frottements des Eaux contre les surfaces du fond & des bords.

Sans cette résistance & ces frottements, les Eaux des Rivières s'accéléroient, comme nous venons de dire, depuis leurs sources jusqu'à leurs embouchûres, leurs rapidités seroient beaucoup plus considérables, plus grandes vers leurs fonds qu'à leurs surfaces, & leurs largeurs ou profondeurs diminueroient depuis leurs sources jusqu'aux embouchûres.

XI. Je considère d'abord quel seroit l'état des Fleuves, si la résistance & les frottements, dont nous venons de parler, étoient nuls, & je suppose de plus que toute l'Eau d'un Fleuve part d'une seule & même source, & coule sur un plan parfaitement droit, en telle sorte que les Eaux gardent toujours le même niveau de pente, la profondeur du lit soit par-tout la même.

Par ces suppositions, il est évident, 1.^o Que dans toute la longueur du Fleuve, il s'écoulera en temps égaux des

quantités ou des masses égales d'eau. 2.° Que la vitesse des Eaux augmentant ou s'accéléralant toujours depuis la source jusqu'à l'embouchûre, & la profondeur étant supposée par-tout la même, la largeur entre ces bords doit toujours diminuer, & cela dans le rapport réciproque des vitesses, ou en raison renversée des racines des hauteurs, ou des longueurs parcourûes depuis la source. Ainsi si les Eaux d'un Fleuve, après avoir parcouru l'espace EF depuis la source E , la largeur entre ces bords est AB ; lorsqu'elles seront parvenuës en G , la profondeur étant supposée la même par-tout, la largeur CD doit être à la largeur AB , comme la vitesse de l'Eau en F est à la vitesse en G : car, en temps égaux, il doit passer entre AB & CD des quantités ou des masses égales d'Eau.

XII. Si l'on nomme EF (a), FG (x), AB ($2b$), & CD ($2y$), puisqu'on peut exprimer les vitesses de l'Eau en F & en G , par \sqrt{EF} & \sqrt{EG} , ou par \sqrt{a} & \sqrt{x} , on aura $2y \cdot 2b :: \sqrt{a} \cdot \sqrt{x}$, d'où l'on tire cette équation $abb = xyy$, qui montre que dans ses suppositions chaque bord du Fleuve est une hyperbole du second genre: ces hyperboles ont la ligne EFG pour asymptote commune.

XIII. Comme les Eaux des Fleuves sont plus basses vers le fond, par rapport à la hauteur de leurs sources, que celles de la surface, leur vitesse doit, par cette raison, être plus grande près du fond que vers la surface. Or la hauteur de la source & la profondeur des Eaux étant connus, il seroit aisé de déterminer par le principe général, la différence entre la vitesse du fond & celle de la surface, & réciproquement cette différence étant connuë, on trouveroit la hauteur de la source. Guglielmini donne sur ce principe une méthode pour trouver l'origine ou la hauteur de la source d'un Fleuve, en connoissant par expérience deux vitesses des Eaux prises dans des profondeurs différentes.

XIV. Nous avons dit ci-dessus que la vitesse ou la rapidité des Eaux des Fleuves & des Rivières seroient très-considérables, si elles n'étoient ralenties par la résistance qu'elles

trouvent à l'embouchûre, en se déchargeant dans la Mer, & beaucoup plus encore par les frottements considérables qu'elles souffrent dans tout leur cours, en roulant sur des plans inégaux & très-raboteux. Pour déterminer ce que les Fleuves doivent perdre de leurs vîtesses, depuis leurs sources, par la résistance des Eaux de la Mer à leurs embouchûres, je considère d'abord la vîtesse que prendroit une surface plane, poussée en même temps par deux fluides mûs dans des directions directement opposées.

Si la surface AC est poussée par l'action du fluide $BADC$ dans la direction EL , & en même temps par le fluide $MAPC$ dans la direction EK , directement opposée, & qu'on nomme M la masse du premier fluide, & V sa vîtesse m , la masse du second, u sa vîtesse, & x la vîtesse que la surface doit prendre dans la direction EL , en supposant que le premier fluide doive l'emporter sur le second. $u+x$ sera la vîtesse respective du fluide $MAPC$ contre la surface, & $V-x$ celle du fluide $BADC$. Or, il est évident que la vîtesse x doit être telle que le produit des masses de chaque fluide par le quarré de leurs vîtesses respectives contre la surface, soient égaux, on aura donc cette égalité

$uu + 2ux + xx \times m = VV - 2Vx + xx \times M$, de laquelle on tirera la valeur de x . Si les masses sont égales, ou que les fluides soient les mêmes, tous deux de l'Eau, ou tous deux de l'air, on aura $x = \frac{VV - uu}{2V - 2u} = \frac{V+u}{2}$; & si l'on suppose de plus que le fluide $MAPC$ soit en repos, on aura $u = 0$ & $x = \frac{1}{2}V$.

D'où l'on voit que si $BADC$ représente le cours d'un Fleuve, AC son embouchûre ou son entrée dans la Mer; $AMPC$, qu'il y ait une surface en AC ou non, l'Eau du Fleuve doit perdre la moitié de sa vîtesse à la rencontre des Eaux de la Mer; l'on voit encore que les Eaux du Fleuve conservent toujours leur même niveau de pente. Si les dernières parties, ou la dernière tranche AC est retenuë de la moitié, toutes les autres seront retenuës d'une quantité qui

rendra leurs vîteses uniformes & égales à la moitié de la plus grande vîtesse des Eaux avant leurs rencontres avec celles de la Mer ; & il est encore évident que cette diminution doit se faire sentir jusqu'aux $\frac{3}{4}$ de la longueur du Fleuve depuis son embouchûre, en remontant vers la source, car la vîtesse acquise depuis la source jusqu'au quart de sa longueur est égale à la moitié de la vîtesse que les Eaux doivent acquérir par leurs chûtes de toute la pente du Fleuve.

XV. Voilà la première cause qui diminue la vivacité ou la rapidité des Fleuves, & qui rend leur cours presque uniforme. Les frottements sont une cause de diminution beaucoup plus considérable, comme nous allons voir ; mais on ne sçauroit les réduire au calcul, il faut avoir recours à l'expérience. Nous comprenons ici sous le nom de *frottement des Eaux*, les détours des filets d'Eau à la rencontre des petites éminences du fond raboteux des Rivières. Si AB est le fond ou lit d'une Rivière, les filets d'Eau ab rencontrant des petites éminences en b , se détournent dans une direction comme bc , & sont en même temps entraînés par les filets supérieurs, ce qui ralentit nécessairement leurs vîteses de quelque chose : or ces détours, quoi-que petits, sont en si grand nombre dans tout le cours d'une Rivière, que cette cause, est, je pense, la plus considérable qui arrête & retarde les Eaux.

XVI. Une preuve bien sensible que les frottements ralentissent considérablement le courant des Eaux, est que plus les Fleuves & les Rivières baissent ou diminuent, plus leurs vîteses se ralentissent, & au contraire plus elles augmentent ou s'enflent, plus leurs rapidités augmentent ; & on sçait que dans les grandes Eaux, leur courant devient double, triple, & quelquefois quadruple de celui de leur état moyen. Elles coulent cependant sur la même pente, & le même plan incliné.

XVII. Mais voici une 2.^{de} preuve de la quantité considérable des frottements. Par les nivellements de M. Picard ; de la justesse desquels on ne sçauroit douter, la Rivière de Loire a au moins trois fois plus de pente que la Seine, &

cependant la vîtesse des Eaux de la Seine est presque double de celle de la Loire; la raison est que le lit de la Loire a peu de profondeur, puisqu'elle n'est souvent pas navigable, & qu'elle ne porte que des Batteaux très-petits, en comparaison de ceux de la Seine : or il est bien certain qu'une petite quantité d'Eau recevant tous les frottements, doit être bien plus rallentie qu'une plus grande quantité. Mais aussi lorsque les Eaux de ces deux Rivières grossissent, la vîtesse ou le courant de la Loire augmente en plus grande raison que le courant de la Seine; ce qui rend la Loire plus sujette à déborder & à changer de lit, toutes choses d'ailleurs égales.

Le Rhône & le Rhin ont la profondeur de leurs lits beaucoup plus grande que la Seine & la Loire, c'est aussi par cette raison que ces Fleuves sont beaucoup plus rapides.

XVIII. Voyons quelle seroit, à peu près, la rapidité extrême des Rivières, si les frottements étoient nuls, & la résistance de l'air. Je fais ce calcul pour la Seine, dont la pente depuis Paris jusqu'à la Mer est environ de 110 pieds, & comme Paris est presque dans le milieu entre les sources & l'embouchure de la Seine, prenons 200 pieds pour toute la pente de cette Rivière. Si l'on substitué dans $56x = uu$, 200 à la place de x , on aura la vîtesse $u = 106$, donc il faut prendre la moitié, à cause de la résistance des Eaux de la Mer, pour avoir 53 pieds par seconde pour la vîtesse extrême que les Eaux de la Seine auroient, si les frottements étoient nuls : cette vîtesse est la même, à peu près, que celle d'un jet d'Eau de 50 pieds de hauteur à la sortie de son ajoûtoir.

Les frottements des Eaux contre le fond & les bords des Rivières sont donc très-avantageux ; car sans eux les Rivières ne seroient pas navigables, tant par leur trop grande rapidité, que par le peu de profondeur qu'elles auroient.



RECHERCHES ANATOMIQUES
SUR
LES OS DU CRANE DE L'HOMME;

Par M. HUNAUD.

I.

VESALE, & après lui des Anatomistes de grande réputation *, nous ont dit, qu'en examinant la calotte du Crâne humain, on ne remarque sur sa face concave, à l'endroit des sutures, que des lignes plus ou moins irrégulières; au lieu qu'à sa face convexe les dents (comme tout le monde le sçait) y sont très-sensibles. On peut encore exposer cette même remarque d'une autre façon, en disant, que les dents qui unissent les os coronal, pariétaux & occipital entr'eux; ne se trouvent qu'à la Table externe & au Diploë, & qu'il n'y a point de dentelure à la Table interne de ces os.

6 Decemb.
1730.

Prévenu en faveur d'une observation qui vient de si bonne part, & que j'avois vérifiée plusieurs fois, je fus fort étonné en y trouvant par la suite des exceptions. Je voulus m'assurer, en examinant quantité de Crânes, si ces exceptions n'étoient point un jeu de la Nature, & voici ce que j'ai trouvé:

Les Crânes qu'on étudie le plus, & dont on sépare les os pour la démonstration, sont assés souvent des Crânes de Sujets morts au de-là de la jeunesse. On ne trouve point pour l'ordinaire de dents à la Table interne de ces Crânes, & plus les Sujets sont avancés en âge, & plus l'union des os en dedans de la calotte du Crâne paroît en forme de lignes; ces lignes même s'effacent entièrement dans la vieillesse. Au contraire, dans le bas âge il y a des dents à la Table interne

* *Vesale, de Corporis humani fabricâ, lib. 1. cap. 6. Eustachi, Ossium examen. Fallope, expositio de Ossibus, cap. 13. Spigel, de humani Corporis fabricâ, lib. 2. cap. 7. Mem. de l'Acad. Royale des Sc. de 1720. p. 347.*

Mem. 1730.

. Z z z

de la calotte du Crâne, & les sutures paroissent à sa surface concave. Ces dents & ces sutures y sont d'autant plus apparentes que les Sujets sont plus jeunes. Voilà une variété bien certaine, bien constante, & qui fait porter à faux l'observation de Vésale, & des autres Anatomistes que je viens de citer. C'est de cette variété dont je vais tâcher de développer les causes.

Une Voûte a plus d'étendue à sa surface convexe qu'à sa surface concave, & plus une Voûte est épaisse, & plus sa surface interne est petite par rapport à l'externe. Cette différence d'étendue est cause que les pièces qui composent une Voûte doivent être taillées obliquement pour être appliquées les unes à côté des autres. Si l'on suppose que les pièces d'une Voûte fassent également effort pour s'augmenter suivant toutes leurs dimensions, la pression de ces pièces les unes contre les autres, sera plus forte vers la surface concave que vers la surface convexe. Ces idées simples, appliquées à ce qui se passe dans l'augmentation du Crâne, fourniront, je crois, la raison que je cherche.

Dans l'enfance le Coronal, les Pariétaux & l'Occipital commencent peu-à-peu à s'ajuster ensemble par le moyen des dents & des échancrures qui se trouvent à leurs bords. Ces os sont alors très-minces, & les dents qui se trouvent gravées dans toute leur épaisseur, sont aussi longues à la Table interne qu'à l'externe ; ainsi les sutures coronale, sagittale & lambdoïde, paroissent à la surface concave de la calotte du Crâne de même qu'à la surface convexe. Mais bientôt ensuite les choses changent. Les os du Crâne se pressent mutuellement les uns & les autres à mesure que leur étendue augmente : comme en même temps leur épaisseur devient plus considérable, il faut nécessairement que les dents ayent moins de longueur à la Table interne qu'à l'externe, & il faut que la pointe de ces mêmes dents soit taillée obliquement, car la calotte du Crâne, ainsi qu'une Voûte, a moins d'étendue à sa surface concave qu'à sa surface convexe ; ainsi les bords des os qui la composent, pour pouvoir s'appliquer à côté

les uns des autres, doivent être taillés obliquement.

A mesure que l'épaisseur du Crâne augmente, les dents deviennent de plus en plus moins longues à la Table interne qu'à l'externe. Cette inégalité de longueur fait que les échancrures, qui ne sont que les interstices des dents, ont aussi moins d'étendue à la surface concave du Crâne qu'à la surface convexe; par conséquent si l'on regarde le dedans de la calotte du Crâne, quand il commence à acquérir une certaine épaisseur, les sutures y doivent paroître moins considérables qu'à la surface externe.

Voilà donc déjà les dents moins longues & les échancrures moins profondes à la Table interne qu'à l'externe; mais il y faut encore quelque chose de plus, car avec l'âge les échancrures se remplissent entièrement à la Table interne, & les dents y disparaissent entièrement.

Lorsque les os de la calotte du Crâne commencent à se presser réciproquement par l'augmentation de leur étendue, la partie de la pointe des dents, qui appartient à la Table interne, pressée contre les échancrures de l'os opposé, trouve moins de résistance vers la substance spongieuse du Diploë que contre la Table interne des échancrures où ces dents sont engagées: cette partie de la pointe des dents qui appartient à la Table interne, se dirigera donc vers le Diploë. Le peu d'épaisseur de la Table interne rend cette détermination facile. La Table interne de la dent, en se portant ainsi vers le Diploë, forme un talus, & perd le niveau du dedans du Crâne, mais la Table interne du fond de l'échancrure en profite bientôt en s'avancant sur le talus de la dent opposée, & elle s'y avance d'autant plus, que les os faisant plus d'effort les uns contre les autres vers leur surface concave qu'ailleurs, y sont plus disposés à s'étendre vers les endroits où il se trouve une diminution de résistance.

Figure 1.

Voilà donc en même temps deux nouvelles causes qui contribuent à effacer les sutures du dedans de la calotte du Crâne. 1.^o Toute la pointe des dents, qui se relève vers le Diploë, cesse de paroître en dedans du Crâne. 2.^o La Table

interne qui s'avance du fond de chaque échancrûre, diminue la longueur des dents du côté de leur racine ; ainsi par ce double moyen, peu-à-peu & avec le temps, les dents se trouvent effacées au dedans du Crâne, il n'y paroît plus de suture, & l'union des os ne s'y fait appercevoir que par des lignes.

On peut facilement s'assurer de la vérité de ce que je viens de dire ; car dans les Crânes d'un certain âge, après qu'on en a séparé les os, on voit à la surface concave la pointe des dents taillée en talus. Ce talus se remarque encore mieux en rajustant ces os séparés. On voit aussi la Table interne du fond de chaque échancrûre qui s'avance considérablement vers l'os opposé, & le bord de ces avances est très-mince.

La pointe des dents qui appartient à la Table interne, se porte vers le Diploë, & non pas vers le dedans du Crâne, parce que les fibres AB , dont la dent BD est une continuation, en se déterminant vers le Diploë D , affectent plus la ligne droite, au lieu qu'en se réfléchissant en dedans du Crâne C , elles feroient un angle ABC . Or le suc qui coule continuellement dans ces fibres, tend plutôt à leur donner la *rectitude*, ou, ce qui est la même chose, à les diriger vers D .

On ne peut pas dire que par la même raison la partie de la dent, qui appartient à la Table externe, devroit se réfléchir à l'extérieur du Crâne ; car 1.° la Table externe est plus épaisse que l'interne, ainsi la Table externe des dents d'un os, & la Table externe des échancrûres de l'os opposé se touchent par une plus grande surface que leurs Tables internes. 2.° Les dents ne sont pas pressées, contre les échancrûres qui les reçoivent, aussi fortement à la Table externe qu'à la Table interne. Je pourrois encore assigner une autre cause qui rend l'effort des os, les uns contre les autres, plus grand à leur Table interne qu'à l'externe, c'est l'action continuelle du Cerveau, qui causée par le battement continuel des arteres, oblige la Table interne à s'étendre, & augmente la pression de ce côté-là.

Il arrive souvent, par un effet de cette pression plus forte à la Table interne qu'à l'externe, que la partie de la dent *BD*, qui s'est déterminée vers le Diploë *D*, devient plus longue que la partie de la dent qui est à la surface convexe. Les fibres de la Table interne d'un os trouvant dans la Table interne de l'os opposé beaucoup de résistance à leur allongement, s'allongent d'autant du côté où elles rencontrent moins de résistance. Voilà d'où vient la longueur des pointes qui sont engagées dans le Diploë.

On sait assez combien les dents qui forment les sutures, contribuent à affermir l'union des os; cependant on pourroit dire que si les deux Pariétaux, par exemple, étoient seulement appliqués l'un contre l'autre, sans qu'il y eût de dents à leur bord supérieur, ils ne pourroient être enfoncés, à moins qu'il n'arrivât fracture, par un fardeau appuyé sur la suture sagittale, ni par un coup donné sur la même suture ou aux environs (je suppose que la partie inférieure de ces os soit bien retenüe). En voici la raison. La Table externe des Pariétaux est plus grande que leur Table interne, à cause que la calotte du Crâne a plus d'étendue à sa surface convexe qu'à sa surface concave: ainsi la Table externe d'un Pariétal est retenüe par la Table interne de l'autre Pariétal. En effet l'enfoncement ne peut arriver que le bord supérieur du Pariétal droit n'avance sur le côté gauche, & que le bord supérieur du Pariétal gauche n'avance sur le côté droit, d'où il naît un obstacle à la dépression de la partie supérieure des deux Pariétaux. Mais lorsque le Crâne n'a encore que peu d'épaisseur, & que la Table interne d'un os est, à très-peu de chose près, aussi étendue que l'externe, si l'on suppose que les Pariétaux ne se touchent que par un bord tout uni, ils vacilleront, & ne se soutiendront pas l'un l'autre, mais les dents d'un Pariétal s'avancant sur la Table interne du Pariétal opposé, & *vice versa*, assujettissent le bord supérieur des Pariétaux, & s'opposent à leur enfoncement. Ce que je viens de dire des deux Pariétaux, regarde tous les os unis par suture dentelée.

Pour revenir aux Sutures, les dents qui les composent, ne sont pas toutes de la même longueur. Les petites dents qui ne sont séparées que par de petites échancrûres, disparaissent les premières. Plusieurs dents d'une longueur inégale, placées à côté les unes des autres, se confondent, & n'en font plus qu'une d'une largeur considérable, lorsque les interstices qui les séparent, sont remplis. Il se trouve encore des dents beaucoup plus longues que les autres : celles-ci disparaissent plus tard, ou ne disparaissent même jamais entièrement. Toutes ces inégalités donnent à l'union des os, en dedans du Crâne, la figure de lignes irrégulières.

On voit, par tout ce que je viens de dire, que s'il ne paroît point de dents à la surface concave du Crâne, ce n'est point pour empêcher, comme on le dit ordinairement, que la Dure-mere ne soit blessée dans les cas de fracture ou d'enfoncement à l'endroit des sutures, mais c'est par une suite nécessaire de la conformation des os du Crâne & de sa figure.

Lorsque les dents de la Table interne sont effacées, & que les sutures ont disparu du dedans du Crâne, les os qui le composent, ne laissent pas encore quelquefois de s'étendre. Le Diploë, en s'épaississant de nouveau, écarte les deux Tables; ces Tables même augmentent en épaisseur : aussi voit-on dans les Sujets d'un certain âge, & sur-tout dans ceux dont les Crânes sont fort épais, que les dents n'occupent pas la moitié de l'épaisseur des os; ensuite les os s'unissent & se soudent insensiblement ensemble, de sorte que la plupart des différentes pièces de la calotte du Crâne n'en font plus qu'une. Ils commencent à se souder par la Table interne, parce que la partie interne de la membrane, dont je parlerai dans la suite de ce Mémoire, s'ossifie la première; ou, si l'on veut, en attendant une autre cause, on peut dire que le suc osseux tendant toujours à étendre & à dilater les fibres des os dans le temps même que le Crâne ne peut plus augmenter de volume les surfaces par lesquelles les os se touchent à force de se presser, s'unissent & se soudent ensemble. Or comme la pression de ces os est plus forte à la Table interne qu'à

l'externe, les os commencent à se souder par leur Table interne, ainsi s'effacent jusqu'aux lignes qui en dedans du Crâne distinguoient auparavant les différents os. Peu-à-peu la soudure gagne, pour ainsi dire, de la Table interne vers l'externe, les dents d'un os se soudent avec les dents d'un os voisin, & ce n'est qu'après beaucoup de temps que le suc osseux, en passant & repassant d'un os à l'autre, fait disparaître de la surface convexe du Crâne les marques même des sutures.

Ces observations & les suivantes, que m'a fourni l'examen d'un grand nombre de Crânes, sont aussi assurées que s'il avoit été possible de les faire toutes successivement sur un même Sujet. On ne peut en vérifier toutes les circonstances; qu'en examinant des Crânes de différents âges, & en séparant avec attention les os qui les composent.

Au reste il paroitra peut-être que je me suis un peu trop étendu sur la matière que je viens de traiter; mais si l'on fait attention que personne ne l'avoit encore examinée avec des yeux Physiciens, on verra que j'ai été obligé de peser un peu plus que je n'eusse fait, sur les raisons que j'ai donné. J'eusse encore été beaucoup plus long, si j'eusse voulu suivre la plupart des Auteurs jusques dans les petits détails de quantité de petites choses où ils sont entrés à l'occasion des Sutures, détails qui quelquefois sont peu justes, souvent inutiles, & toujours ennuyeux, lorsqu'une saine théorie ne les accompagne pas.

II.

Les os nommés Surnuméraires, Clefs, ou *Ossa Wormiana*; suivent, quand ils se trouvent, la même analogie que les autres os du Crâne. Comme ils font partie de la Voûte du Crâne, ils paroissent plus grands au dehors qu'au dedans, & plus le Crâne où ils se trouvent est épais, plus leur surface interne est petite à l'égard de l'externe. Les dents qu'ils avoient d'abord gravées dans les deux Tables, disparaissent peu-à-peu de l'interne, & leur union avec les autres os ne s'y remarque que comme une ligne. Il leur arrive encore avec l'âge ce qui arrive aux autres os du Crâne, c'est de s'unir avec eux en

dedans, pendant qu'à la surface convexe ils en paroissent encore distingués, de sorte qu'on jugeroit d'abord qu'ils ne pénètrent pas, & qu'ils n'ont jamais pénétré jusques dans la concavité du Crâne. Je ne nie pas pour cela qu'il n'y ait de petits os surnuméraires qui ne s'étendent pas jusqu'au dedans du Crâne.

J'ai vû des os surnuméraires tout-à-fait différens de ces derniers, & dont personne, je crois, n'a encore parlé. Ils paroissent à l'intérieur du Crâne, & ne s'étendent pas jusqu'à la Table externe, il y en a dans beaucoup de Crânes, ils sont placés à l'endroit des sutures. Ils tombent ordinairement quand on démonte les pièces du Crâne, & lorsqu'on remonte ces pièces, on croit, sans y faire trop d'attention, que le vuide, qu'ils ont laissé en se détachant, est causé par la rupture d'une dent.

Il me semble avoir remarqué que dans les petits Crânes les dents disparaissent, & les sutures s'effacent plutôt que dans des Crânes plus grands & plus étendus. Si cela est, c'est apparemment une suite de la différence qui se trouve entre la surface concave & la surface convexe dans une Voûte plus ou moins cintrée.

III.

L'examen des Sutures vraies ou dentelées m'a conduit naturellement à l'examen des Sutures fausses ou écailleuses. La différence qui se trouve entre ces deux sortes de Sutures, montre assés que leurs usages doivent être différens. Dans l'une les os s'unissent par le moyen des avances & des enfoncements qui sont à leurs bords : dans l'autre le bord d'un os est appliqué sur le bord d'un autre os, & pour s'ajuster ainsi, ils sont tous les deux taillés en biseau. Presque tous les Anatomistes ont ou proposé des raisons de cette différence, ou ont adopté quelques-unes des raisons qu'on avoit proposé avant eux ; cependant en les examinant toutes, on sent bien qu'on n'en a point encore trouvé de suffisantes. Celle que je vais proposer, me paroît mieux fondée.

Un fardeau appuyé sur une Voûte où le poids seul de la Voûte

Voûte tend à déjetter en dehors les murs ou les piliers qui la soutiennent : c'est par une résistance placée en dehors de la Voûte qu'on s'oppose à cet effort. Voilà à quoi servent les murs-boutans & les arcs-boutans.

Un fardeau considérable *A*, placé sur le sommet de la Tête, Figure 2. tend à enfoncer en dedans la suture sagittale *B*, ou, ce qui est la même chose, le bord supérieur *CC* de chaque Pariétal *CD, CD*; cela ne se peut faire que le bord inférieur *D, D*, des Pariétaux ne soit écarté & déjeté en dehors. Un coup donné sur le haut de la Tête fait la même chose. Or, c'est à cet écartement en dehors des bords inférieurs des Pariétaux que s'opposent les Temporaux *FF*. Etant appliqués fortement, comme ils le sont, contre la partie inférieure de chaque pariétal, ils font la fonction de véritables murs-boutans qui retiennent & assujettissent les Pariétaux.

Un effet de la suture dentelée est de contribuer à empêcher que les pièces qui la forment, ne s'enfoncent en dedans; comme je l'ai fait voir plus haut; mais elle ne s'oppose point à leur écartement en dehors; il n'y a que la partie de quelques dents engagée dans le Diploë qui y pourroit faire un obstacle, mais bien faible. Une suture dentelée qui uniroit les Pariétaux avec les Temporaux, résisteroit à une compression faite sur la partie latérale de la Tête, ou à un coup porté sur le même endroit, mais elle ne s'opposeroit pas à l'écartement en dehors causé par un fardeau ou un coup sur le sommet de la Tête, & c'est-là ce que font merveilleusement bien les Temporaux par la portion écailleuse, ou le biseau qui est à leur bord supérieur, & qui s'applique si parfaitement à l'écaille ou biseau du bord inférieur des Pariétaux. Ce que je viens de dire de la portion écailleuse de l'os des Tempes se doit également entendre des deux portions écailleuses de l'os sphénoïde, qui s'appliquent de la même manière sur l'angle antérieur & inférieur de chaque Pariétal.

Pendant que la suture écailleuse s'oppose à l'écartement du bord inférieur des Pariétaux, la suture sagittale qui est dentelée, s'oppose, comme je l'ai dit, à l'enfoncement de

leur bord supérieur. C'est par ce double moyen que les Pariétaux sont en état de soutenir des fardeaux aussi considérables que ceux qu'on voit sur la Tête de quantité de gens; la suture sagittale a même d'autant moins à souffrir de l'action d'un fardeau que les Temporaux arc-boutent plus fortement. Si l'on fait attention que dans la suture sagittale, ainsi que dans les autres sutures dentelées, les dents d'un os sont appuyées seulement sur la Table interne de l'os opposé, laquelle est fort mince, & que les dents ont beaucoup moins d'épaisseur que le reste de l'os, on verra combien il importe que la partie inférieure des Pariétaux soit solidement assujettie: ainsi les Temporaux arc-boutants avec force, soutiennent une partie du fardeau appuyée sur la suture sagittale, & la soulagent de cette façon.

A présent, on peut bien facilement répondre à une question que se sont fait la plupart des Anatomistes, & qui leur a paru si embarrassante. Ils demandent pourquoi la portion écaillée des Temporaux recouvre en dehors la portion écaillée des Pariétaux, & pourquoi au contraire le bord des Pariétaux n'est pas à l'extérieur*.

Pour que les Temporaux puissent faire la fonction de murs-boutans, il faut qu'ils soient, pour ainsi dire, inébranlables dans leur situation. C'est aussi ce qu'on reconnoît en démontant les pièces d'un Crâne, lorsqu'après avoir ôté les Pariétaux, on tire en dehors le bord supérieur des Temporaux encore unis avec l'os occipital & l'os sphénoïde. On ne sera point étonné de leur fermeté, en considérant de quelle façon chaque os des Tempes est engagé & assujetti par le moyen de l'Occipital & du Sphénoïde.

Un coup porté sur le bas des Pariétaux fait tout le contraire d'un coup donné sur la suture sagittale, ou d'un fardeau appuyé sur la même suture; il tend à enfoncer en dedans la partie inférieure des Pariétaux, & à déjetter en dehors leur partie supérieure. Tout l'artifice dont j'ai parlé, & qui est si

* *Vésale, lib. 1. cap. 6. Fallope, expositio de Ossibus, cap. 13. Memoires de l'Académie Royale des Sciences de 1720, p. 349. &c.*

propre à empêcher l'effet d'un fardeau ou d'un coup sur le sommet de la Tête, ne s'oppose nullement à l'effet d'un coup donné sur le bas d'un Pariétal. Voici ce qui résiste à un pareil coup.

Le bord supérieur du Coronal est soutenu pour l'ordinaire par les Pariétaux; mais aux parties latérales du Coronal, on voit la Table interne, qui beaucoup plus longue que l'externe, fait une avance assez considérable *BC* qui soutient un pareil prolongement *FG* de la Table externe des Pariétaux: ainsi un Pariétal poussé vers le dedans par un coup donné à sa partie inférieure, est retenu par cette avance de la Table interne du Coronal. Il y a de plus au bord supérieur de l'os des Tempes, entre la portion écailleuse & la portion pierreuse, une échancrûre d'une figure particulière, où s'engage la partie *H* du Pariétal. C'est ce qui assujettit encore fortement la partie inférieure de ce dernier os.

Ce n'est pas seulement au bord du Coronal & des Pariétaux qu'il se trouve des especes d'avances & d'enfoncements, ou de la Table interne ou de l'externe; la coupe de la plupart des os n'est pas perpendiculaire à l'os. Le bord d'un os a souvent deux coupes, de sorte qu'il s'unit avec son voisin en deux différents sens; il le soutient, pour ainsi dire, & il en est soutenu. Ces coupes sont plus ou moins obliques, par rapport au corps de l'os. La coupe de la partie supérieure *DF*, du bord antérieur de chaque Pariétal qui regarde en haut, n'est pas aussi apparente que la coupe de la partie inférieure *FG* des mêmes Pariétaux qui regarde intérieurement. Il en est ainsi de la double coupe du Coronal *AB, BC*, qui s'ajuste avec celle de chaque Pariétal. La partie supérieure du bord de l'os des Tempes qui s'articule avec l'os sphénoïde regarde en dedans, & la partie inférieur du même bord regarde en bas. La partie du bord de l'os sphénoïde qui s'articule avec l'os des Tempes a par conséquent une double coupe, mais en sens contraire. On n'a fait jusqu'à présent, ce me semble, aucune mention de cette double coupe de la plupart des os du Crâne, ni de ses effets, qui sont

de rendre l'union des os entre eux plus ferme & plus solide.

Au reste, il faut faire remarquer que les dents de la partie inférieure du bord antérieur des Pariétaux sont tellement disposées avec les dents du Coronal, qu'elles concourent par leur union à l'action que j'ai attribué aux Temporaux, en empêchant l'écartement en dehors de la partie inférieure des Pariétaux.

I V.

On ne connoît d'autre union entre les différents os du Crâne, que celle qui se fait par la différente disposition de leurs bords. On regarde tous les os du Crâne comme des pièces qui ne sont unies entre elles, que parce que leurs bords différemment configurés s'ajustent les uns avec les autres. On sçait que la plupart de ces pièces se soudent ensemble peu à peu dans la vieillesse; mais ce qu'on ne sçait point, c'est que toutes ces pièces dans tous les âges n'en sont véritablement qu'une seule; qu'elles ne sont pas seulement appliquées les unes contre les autres, & que dans tout le Crâne, dès le moment de la formation, il n'y a pas une seule interruption de continuité.

Pour s'assurer de cette vérité qui en a d'abord si peu les apparences, il faut avec soin enlever le Péricrane dessus une suture, on apperçoit alors la continuité d'un os avec son voisin par le moyen d'une membrane qui est placée entre deux, & qui fait partie de l'une & de l'autre. On remarque des filets membraneux qui sortant du fond des échancrures, s'implantent dans les dents de l'os opposé, & qui lorsqu'on remuë en différents sens un des os qui forme la suture, s'étendent & se relâchent. Après avoir détaché exactement la Dure-mere, on apperçoit la même chose au dedans du Crâne. Tout cela se remarque très-bien dans la Tête d'un Enfant mort d'Hydrocephale.

Cela se concevra sans peine, si l'on fait attention à la manière dont se forment les différents os du Crâne. Le Crâne dans un Fœtus peu avancé n'est qu'une membrane qui se métamorphose insensiblement en os. Un endroit de cette

membrane commence peu à peu à s'ossifier; cette ossification gagne & se continuë par des lignes qui partent comme d'un centre de l'endroit où l'ossification a commencé. Dans différents endroits de cette calotte membraneuse, commencent en même temps d'autres ossifications, qui de même font du progrès & s'étendent. Lorsqu'elles sont parvenues à un certain point, le bord de chaque ossification commence à prendre en partie la conformation que le bord de l'os doit avoir par la suite, & à s'ajuster avec l'ossification voisine.

Au bord supérieur du Pariétal droit, l'ossification se continuë en forme de dents qui gagnent jusqu'à la partie gauche de la calotte membraneuse. L'ossification du Pariétal gauche se continuë de même à son bord supérieur par des dents qui gagnent jusque du côté droit dans les intervalles membraneux, que les dents du Pariétal droit en se formant, laissent entr'elles. Par là on s'apperçoit, qu'entre les deux Pariétaux, il doit rester une portion de membrane, qui est interposée entre le Pariétal droit & le gauche, & qui lorsqu'elle sera ossifiée ne fera plus qu'un os de deux Pariétaux.

Au reste, on ne doit pas être plus étonné de trouver entre les deux Pariétaux, par exemple, une portion membraneuse, que d'en trouver entre les pièces osseuses de l'Occipital d'un Fœtus. Quand on leve avec adresse dans un Enfant la Dure-mère & le Péricrane à l'endroit de la Fontanelle, ne voit-on pas une membrane qui est continuë avec les deux Pariétaux & le Coronal, laquelle fait partie de ces trois os, & qui s'ossifie avec l'âge? on n'apperçoit point d'autre différence entre ces différentes portions membraneuses, si ce n'est que les unes s'ossifient très-prompement, & les autres avec plus ou moins de lenteur. Les membranes qui séparent les pièces osseuses de l'Occipital d'un Fœtus, s'ossifient peu après la naissance; celle qui se trouve à la Fontanelle disparoît, excepté à l'endroit des sutures, à trois ou quatre ans plus ou moins. Il en est de même de la membrane qui sépare en deux le Coronal, & qui cependant quelquefois subsiste jusqu'à la vieillesse. Celle qui est

entre les deux Pariétaux, ainsi que celles qui sont entre les os du Crâne & de la face, s'ossifient presque toutes dans un âge avancé, les unes plutôt, les autres plus tard.

Je n'ai jamais observé cette membrane avec plus de plaisir que dans l'endroit des sutures écailleuses. On y découvre que cette membrane est composée de deux lames, de même que le Crâne est composé de deux Tables. Après avoir emporté le Péricrane de dessus la suture écailleuse du Temporal avec le Pariétal, vous voyés de la portion écailleuse de l'os temporal partir, pour ainsi dire, une membrane qui va former la Table externe du Pariétal. En dedans du Crâne, après avoir emporté la Dure-mere, on voit une membrane continüe à la Table interne du Temporal, & à la portion écailleuse du Pariétal.

Cette observation, aussi-bien que quelques autres, prouve que les portions écailleuses des os ne sont pas formées par les deux Tables.

V.

En examinant le Crâne de plusieurs Fœtus de différents âges, il m'a paru que les fibres osseuses, qui s'étendent du milieu de l'os comme d'un centre vers sa circonférence, & qui étant unies ensemble par le moyen de petites fibres transverses, forment les Mailles dont parle M. Malpighi, il m'a paru, dis-je, que ces fibres sont composées de petites lames appliquées les unes sur les autres, à peu-près comme les écailles des Poissons. L'existence de ces lames est prouvée, parce qu'on les apperçoit dans les Crânes qui se décomposent par une longue exposition aux injures de l'air, & dans les os qui s'exfolient ; mais, comme je viens de le dire, on les peut encore observer dans les os du Crâne d'un Fœtus peu avancé, lorsqu'ils sont tous nouvellement débarrassés des autres parties, ou qu'on les a un peu laissés dans l'eau. En courbant alors légèrement ces os suivant la longueur de leurs fibres, on voit ces petites lames qui se soulevent & s'écartent les unes des autres par une de leur extrémité.

VI.

Il y a dans le Crâne des choses qui sont sensibles, qui sont de conséquence, qui ne demandent que des yeux pour être apperçûes, & qui ont, je crois, échappé à tous les Anatomistes. Telle est la différence qui se trouve presque toujours entre les deux trous par où les jugulaires communiquent avec les sinus latéraux, ainsi qu'entre les fosses où est logée la tête des mêmes jugulaires. Ce trou & cette fosse sont souvent du côté droit une ou deux fois plus grands que du côté gauche. Pour s'en convaincre, il n'y a qu'à jeter la vûe sur plusieurs Crânes. Cette inégalité dans les trous & les fosses des deux jugulaires internes est une suite d'une observation qu'a fait M. Morgagni sur un Sujet^a, & qui m'a paru constante; c'est que le sinus latéral droit est plus large; & contient plus de sang que le gauche; ainsi le sang du sinus latéral droit, pour entrer dans la jugulaire droite, a dû se conserver un passage plus grand dans le Crâne que celui du gauche. L'inégale quantité du sang dans les deux sinus latéraux, vient de ce que le sinus longitudinal supérieur, comme l'a entrevû M. Vieussens, & comme le trajet de ce sinus, qui est gravé sur les os, le fait appercevoir même dans les Crânes décharnés, ne se divise pas également dans les deux sinus latéraux. Ce sinus décharge le sang qu'il contient dans le sinus latéral droit, ainsi que l'a parfaitement bien développé^b l'illustre M. Morgagni, & le gauche n'en reçoit qu'une médiocre quantité par une, ou deux, ou quelquefois trois petites communications qu'il a ordinairement avec le droit.

Comme il se trouve dans quelques Sujets que le sinus longitudinal supérieur se décharge également dans les deux sinus latéraux; alors le diametre des jugulaires & des trous par où elles prennent naissance est égal du côté droit & du côté gauche. Quand le sinus longitudinal se détourne dans le sinus latéral gauche, comme il arrive très-rarement, puisque

^a C'est dans l'explication de la première Figure de la première Planche de ses sixièmes Adversaires.

^b Adversaria VI. animadvers. 1.^a

dix Sujets ouverts exprès n'en ont fourni à M. Morgagni qu'un seul exemple, c'est du côté gauche que le sinus, la jugulaire, la fosse & le trou sont plus grands.

Cette différence entre ces parties du côté droit & du gauche, avec quelques autres raisons, m'ont fait dire, il y a long-temps, qu'il y a de la différence entre la saignée qu'on fait à la jugulaire droite, & celle qu'on fait à la gauche.

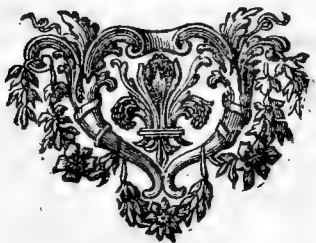
VII.

Je crois qu'on peut retrancher du nombre des os qu'on compte ordinairement dans la Tête, les deux cornets inférieurs ou les lames spongieuses inférieures du nés. Il m'a souvent paru que ce ne sont point des os particuliers, mais des portions de l'os ethmoïde. Je les ai vû attachés à l'os ethmoïde dans des Têtes de différents âges, chacun par une lame dont la figure est souvent différente, & qui quelquefois est percée. Ces lames descendent de devant en arrière, & vont de la partie antérieure latérale de l'os ethmoïde au bord supérieur des cornets inférieurs. J'ai des os ethmoïdes séparés du reste de la Tête, auxquels les cornets inférieurs sont restés attachés. Comme les lames osseuses qui font cette union sont très-minces & très-fragiles, on les casse presque toujours, & d'autant plus facilement qu'ils sont retenus avec l'os maxillaire par leur apophyse en forme d'oreille qui est engagée dans le sinus maxillaire. Les cornets inférieurs se soudent avec l'os du Palais, & ensuite avec l'os maxillaire, mais cette union ne les doit pas faire regarder comme faisant partie de l'un ou de l'autre de ces os. Presque tous les os qui se touchent, s'unissent & se soudent ensemble avec l'âge, les uns plutôt, les autres plus tard. Une pièce osseuse peut être regardée comme un os particulier, lorsque dans l'âge où les os sont bien formés, on ne trouve point entr'elles & les pièces voisines une continuité non interrompue d'ossification.

Pour avoir un os ethmoïde auquel les cornets inférieurs restent attachés, je choisis une Tête où ces cornets ne soient point encore soudés avec les os du Palais & les os maxillaires. J'ouvre le sinus maxillaire par sa partie externe, je détruis
le

le bord de l'os maxillaire sur lequel l'oreille du cornet inférieur est appliquée. Pour ne point en même temps détacher le cornet de l'os ethmoïde, il faut un peu d'adresse & de patience, & avec cela ne réussit-on pas toujours. L'oreille du cornet étant ainsi dégagée, on ôte l'os maxillaire que suit ordinairement l'os du Palais, & le cornet reste attaché à l'os ethmoïde.

Au reste, il n'est pas besoin de cette préparation, si l'on veut seulement s'assurer de la continuité des lames spongieuses inférieures avec l'os ethmoïde ; il ne faut que consulter des Têtes où il n'y a rien de détruit, on verra presque toujours que du bord supérieur de chaque cornet inférieur s'élève une lame qui va s'attacher à l'os ethmoïde, & lorsque les cornets inférieurs sont séparés de l'os ethmoïde, on apperçoit sur leur bord supérieur de petites éminences osseuses qui ne paroissent être que les restes de la lame rompue.



R E M A R Q U E S

Sur un Ecrit de M. Davall, qui se trouve dans les Transactions Philosophiques de la Société Royale de Londres, n.º 402, an. 1728, touchant la comparaison qu'a fait M. Delisle, de la grandeur de Paris avec celle de Londres, dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, année 1725, page 48.

Par M. DE MAIRAN.

UN des principaux motifs de feu M. *Delisle* dans ce qu'il nous a laissé sur l'étendue des grandes Villes; étoit de concilier ou d'éclaircir quelques observations Astronomiques, dont le résultat pouvoit devenir assés différent; par la différence des lieux où elles auroient été faites, quoique dans l'enceinte d'une même Ville. C'est ce dont il nous avertit dès le commencement de cette recherche, de l'utilité de laquelle il donne des preuves & des exemples. Après cela, M. *Delisle* compare entr'elles quelques-unes des Villes, tant anciennes que modernes, dont la grandeur nous est connue, soit par observation, soit par le témoignage des Auteurs qui en ont parlé, telles qu'*Alexandrie, Rome, Babylone, Byssance, Ispahan, le Caire, Londres, &c.* Paris qui nous intéresse plus qu'aucune autre Ville du monde, lui sert de base & de terme de comparaison, par rapport aux autres, & sur-tout par rapport à la Ville de *Londres*; il fait, comme on le sçait, celle-ci plus petite que *Paris*, tout au moins d'une vingtième partie. C'est sur le Plan de *Morden*, qu'il s'est réglé, & plus encore sur des dimensions très-exactes qu'il avoit reçu de *Londres* même. Cette fameuse Ville nous fournit tous les jours de bien plus dignes sujets d'émulation que celui que pourroit faire naître l'étendue de ses murailles: elle n'a pas dédaigné cependant ce léger avantage, & elle a trouvé dans

la Société Royale qu'elle renferme, & en la personne de M. Davall un défenseur contre la décision de M. Delisle. Selon M. Davall, non seulement ce vingtième de plus attribué à l'étendue de Paris s'évanoüit, mais il suit du calcul même de M. Delisle & d'une erreur de fait où il paroît être tombé, que Londres doit être plus grand que Paris, d'environ la quatorzième partie.

On ne peut disconvenir que M. Delisle ne se soit mépris, en énonçant la méthode qu'il a suivie pour dresser son Plan de Paris, & pour faire la comparaison de cette Ville avec celle de Londres; mais après avoir examiné son Mémoire, & le Plan dont il s'agit, il me paroît évident que sa méprise ne tombe que sur son énoncé, & non sur ses opérations, ou sur les conséquences qu'il en a tirées; & partant que la conclusion de M. Davall, en ce qu'elle a de favorable à l'étendue de Londres, ne suit nullement de l'erreur qu'il a reprochée à M. Delisle. C'est là tout ce que je me propose de prouver dans ces Remarques. Outre que l'on sera peut-être curieux de sçavoir sur quoi roule la difficulté, il m'a semblé que nous ne pouvions refuser un tel éclaircissement à la mémoire du sçavant Géographe que cette question intéresse.

M. Delisle, après avoir donné le détail de la Méthode qu'il avoit suivie pour tracer le Plan de Paris qu'il publia en 1716, & qui est le même dont il s'est servi pour déterminer la grandeur de cette Ville, méthode toute géométrique, & bien différente en cela de la plupart de celles qu'on avoit employé jusqu'alors, ajoute qu'il en lia les parties ou les triangles avec les Observations exactes de M.^{rs} de l'Observatoire pour la description de la Méridienne de France. Il n'oublia pas de tracer cette Méridienne à travers la Ville, ce qui le mit en état, dit-il, après les précautions rapportées ci-dessus, de diviser l'étendue de la Ville par Méridiens & par Paralleles, comme on fait sur une Carte générale, ce qui sert à indiquer à quelle portion du Ciel les différentes parties de cette Ville répondent.

Jusques-là M. Delisle rapporte fidèlement ce qu'il a fait en traçant la Carte de Paris, & cette Carte en est la preuve.

Mais voici où la mémoire ne l'a pas servi de même, comme le prouve encore la même Carte.

- » J'y ai tracé les Paralleles de 15 en 15 secondes, & les
 » Méridiens de 20 en 20 secondes; & comme sous le Parallele
 » de *Paris* 15 degrés de Latitude en valent 20 de Longitude,
 » & qu'il en est ainsi des minutes & des secondes, en donnant
 » 5 minutes de plus à l'intervalle des Méridiens qu'à celui des
 » Paralleles, je me suis fait des Quarrés parfaits.

Ce qu'il y a de faux dans cet énoncé, c'est que sous le Parallele de *Paris* 15 degrés de Latitude ne valent que 20 degrés de Longitude; ils en valent près de 23 : c'est ainsi que le donne la *Regle* si connue, du Sinus du complément de Latitude, &c. Mais il y a grande apparence que M. *Delisle*, au lieu du complément, aura pris ici la Latitude même, qui à l'égard de *Paris*, étant introduite dans l'Analogie au lieu de son complément, répondroit en effet à environ 20 degrés ou $19 \frac{11}{12}$ de Longitude pour 15 de Latitude. Il ne faut pour cela qu'avoir regardé à droite à l'ouverture des Tables des Sinus, au lieu de regarder à gauche. Voilà, dis-je, vrai-semblablement la source de l'erreur que M. *Davall* a relevée, & qui lui a fait tirer des conclusions si favorables à l'étendue de *Londres*. Écoutons-le lui-même : je ne sçauois mieux mettre le Lecteur au fait de ce calcul, & du raisonnement qu'il fournit à M. *Davall*, qu'en rapportant ses propres paroles.

- » En lisant ce Mémoire de M. *Delisle*, dit-il, après avoir
 » transcrit l'énoncé qu'on vient de voir, je me suis d'abord
 » aperçû, que la méthode qu'il a suivie pour comparer l'éten-
 » due de *Paris* avec celle de *Londres*, & par laquelle il conclut
 » que la première de ces deux Villes est d'un vingtième plus
 » grande que l'autre, est fondée sur une fausse hypothèse; sça-
 » voir, que sous le Parallele de *Paris* 20 degrés de Longitude
 » sont égaux à 15 de Latitude, & par conséquent, que si l'on
 » trace les Méridiens de 20 en 20 secondes, & les Paralleles
 » de 15 en 15, les figures données par leurs intersections
 » seront des Quarrés parfaits : car l'Équateur & ses Paralleles
 » sont entre eux comme les Sinus de leurs distances respectives

du Pole. D'où il suit que comme le Rayon ou Sinus de 90 degrés est au Sinus de la distance d'un parallèle quelconque du Pole, ou au Sinus du complément de la Latitude : ainsi le degré donné de l'Équateur, ou d'un grand Cercle quelconque, est à la portion semblable du Parallèle donné. Prenant donc la Latitude moyenne de *Paris* de $48^{\circ} 51'$, le rapport des degrés d'un grand Cercle à ceux du Parallèle de *Paris* sera, par les Tables des Sinus, comme 10000000 est à 6580326 ; au lieu que selon M. *Delisle* ce rapport n'étant seulement que comme 20 & 15, ou comme 100 & 75, il suit que les figures que M. *Delisle* appelle des Quarrés, n'en sont point, mais des Rectangles, dont le plus grand côté, qui contient 15 secondes d'un grand Cercle, se trouve dans la même proportion avec le plus petit, qui contient 20 secondes du Parallèle de *Paris*, que 750 &c. avec 658 &c. ou à peu-près comme 8 à 7 ; & que les intervalles qu'il devoit avoir donné en compensation aux Méridiens pour faire de ces figures des Quarrés parfaits, devoient avoir été $\frac{15 \times 100}{658}$ &c. secondes, ou approchant de $22'' \frac{4}{5}$, ou $22'' 48'''$ du Parallèle de *Paris*.

Or « continue M. *Davall* » M. *Delisle* dit que ces figures sont des Quarrés parfaits, & qu'il les a calculées comme des Quarrés, dont le côté étoit de $15''$ d'un grand Cercle, & selon lui *Paris* contient 63 de ces Quarrés, qui font 3538647 toises quarrées, lequel nombre étant divisé par 63, le quotient 56196 sera le nombre de toises quarrées contenues dans chaque Quarré, dont la racine donne 237 toises pour le côté de chacun d'eux, ce qui fait tout juste $15''$, ou $\frac{1}{240}$ de degré d'un grand Cercle.

M. *Delisle* a donc fait par cette supputation « conclut M. *Davall* » la superficie de chaque rectangle*, & par conséquent celle de toute la Ville de *Paris* trop grande d'environ $\frac{1}{5}$.

Tout ce raisonnement se réduit, si je ne me trompe, à ceci.

1.° Que M. *Delisle* a pris ou tracé un Plan de *Paris*, tel qu'il devoit être dans toutes ses dimensions.

* Il faut entendre de chaque quarré, car autrement la supputation de M. *Delisle* pourroit être juste.

2.^o Qu'il a divisé ce Plan par des Quarrés, au lieu de le diviser par des Rectangles.

3.^o Que ces Quarrés se trouvent plus petits que n'auroient été les Rectangles ; d'où il suit, que l'aire totale de *Paris* contient un plus grand nombre de ces Quarrés qu'elle n'auroit contenu de Rectangles.

4.^o Que malgré le trop de petitesse de chacun de ces Quarrés, M. *Delisle* les a évalués au même nombre de toises quarrées, que celui qu'auroit contenu réellement chaque Rectangle.

D'où il suit enfin, que l'aire totale de *Paris* résultante de la somme de ces Quarrés, se trouve plus grande qu'il ne faut d'une quantité, qui a le même rapport à sa véritable aire, que celle de chaque Rectangle à chacun de ces Quarrés.

Pour répondre à l'objection, il ne s'agit que d'éclaircir, & de prouver ce que nous avons déjà avancé, que l'erreur reprochée à M. *Delisle*, n'est que dans l'exposé de sa méthode, & nullement dans la méthode même, ni dans les résultats.

Car 1.^o c'est sur la Carte de *Paris* déjà faite, & publiée en 1716, augmentée seulement peut-être de quelques additions pour les nouveaux bâtimens, que M. *Delisle* a calculé & déterminé l'étendue & la superficie de *Paris*, & qu'il l'a comparée avec l'étendue de *Londres*. Il n'y a qu'à lire son Mémoire pour s'en convaincre.

2.^o Cette Carte de *Paris*, qui est en effet divisée par Méridiens de 20 en 20 secondes, & par Paralleles de 15 en 15, ne contient point des Quarrés parfaits résultans de l'intersection de ces deux sortes de Cercles, mais des Rectangles tels que M. *Davall* dit qu'ils doivent être, & dont le grand côté, de 15 secondes en Latitude, se trouve sur les Méridiens, & le petit qui n'est que de 20 en Longitude, sur les Paralleles. Il ne faut encore pour cela que jeter les yeux sur le Plan* de M. *Delisle*. On y verra que les côtés des Rectangles dont je parle, étant comparés entre eux, sont à peu-près dans le rapport de 7 à 8, comme le demande M. *Davall*. Il y a plus, les secondes sont tracées & numérotées sur le bord du Plan,

* Il se trouve avec les autres Cartes sur une feuille de même grandeur.

comme le sont les degrés sur la plupart des Cartes géographiques : sçavoir, les secondes en Longitude, & dont 20 forment le petit côté du Rectangle, sur les deux Paralleles qui terminent la superficie de cette Carte au Septentrion & au Midi ; & les secondes en Latitude, dont 15 forment le grand côté, sur les deux Méridiens qui la terminent à l'Orient & à l'Occident ; & avec une telle justesse, que si l'on porte le Compas sur un de ces Méridiens, à 15 secondes d'ouverture, & qu'on l'applique ensuite sur l'un des Paralleles gradués & divisés en secondes de Longitude, on trouvera que 15 secondes du Méridien répondent sensiblement à $22'' \frac{4}{5}$ du Parallele. Ce qui est, comme l'on a vû, la portion réciproque que M. *Davall* leur donne.

Donc si M. *Delisle* a calculé l'étendue de *Paris* sur de pareils Rectangles, il l'a très-bien calculée, & il n'y a point d'erreur dans son opération.

Mais, répondra-t-on, M. *Delisle* dit positivement qu'il a calculé l'étendue de *Paris* non sur des Rectangles, tels que ceux qu'on vient de décrire, mais sur des Quarrés parfaits ?

Je replique, qu'il est moralement impossible que M. *Delisle* ait pratiqué dans le temps, ce que par un défaut de mémoire, & par inadvertance, il a rapporté dans la suite d'une manière si peu fidelle. Il est, dis-je, impossible qu'ayant sous ses yeux sa propre Carte, dont les principales dimensions lui étoient connues par voye géométrique, ou par des mesures immédiates, il l'ait couverte de ces prétendus Quarrés, malgré les Rectangles qu'il y voyoit, qu'il en ait déduit des résultats qui ne pouvoient manquer de la défigurer dans toutes ses parties, & qu'il ait démenti grossièrement sa première graduation, son échelle de 500 toises, & les distances qu'il avoit déterminées par ses triangles.

Que M. *Delisle* ait appelé des Quarrés ces Rectangles mêmes de sa Carte gravée que nous avons entre les mains, c'est ce qui est encore évident par les paroles qui suivent son énoncé. *Les Quarrés chiffrés*, ajoute-t-il, *m'ont servi de renvoi à une Table alphabétique, qui fait trouver tout d'un coup la situation*

des ruës dont on ne sçait que le nom ; mais ce n'étoit pas là le principal usage que j'en voulois faire. C'étoit de comparer par le moyen de ces quarrés la grandeur de Paris à celle de Londres. La Carte où les ruës sont indiquées est donc la même qui a servi à comparer la grandeur de *Paris* à celle de *Londres*. Donc M. *Delisle* s'est mal expliqué seulement, quand il a appelé des Quarrés, ce qui réellement & de fait n'étoit sur la Carte que des Rectangles.

J'avoie qu'on auroit de la peine à donner raison d'une telle méprise, mais quelque extraordinaire qu'elle paroisse, elle devient cependant moins difficile à concevoir, dès qu'on sçait que M. *Delisle* n'a pû voir imprimer son Mémoire, & que par conséquent il a pû ne le pas relire ou retoucher avec la nouvelle attention qu'inspire presque toujours, & avec raison, à un Auteur, l'idée de l'impression.

Car M. *Delisle* mourut le 25 Janvier 1726, comme on l'apprend dans son Éloge; & je puis prouver, tant par les dates qui sont à la tête des Mémoires de 1724, & 1725, que par d'autres circonstances, dont j'ai retenu la note, que nos premiers Mémoires de 1725, parmi lesquels se trouve celui de M. *Delisle*, ne furent donnés à l'Imprimerie, tout au plûtôt, que vers le commencement du mois d'Août de l'année 1726, c'est-à-dire, plus de 6 mois après sa mort.

C'est donc un ouvrage posthume que le Mémoire de M. *Delisle*; & l'on n'ignore pas quelle indulgence cette qualité doit concilier à son Auteur.

J'ai montré, si je ne me trompe, que l'inadvertance de M. *Delisle* n'empêchoit pas qu'on n'eût tout lieu de croire ses résultats conformes à la vérité. Mais M. *Davall* a-t-il pû; ou dû entrer dans cette discussion; & faut-il l'accuser de trop de sévérité, quand il a pris pour des Quarrés, ce que M. *Delisle* lui-même appelle des Quarrés dans son Mémoire? Enfin a-t-il vû la Carte de cet Auteur, sur laquelle rouloit principalement, & la détermination qu'il fit de l'étendue de *Paris*, & la comparaison de cette Ville avec *Londres*? on en jugera par cette instance de M. *Davall* même.

» Pour

Pour confirmer ce que je dis, & le mettre hors d'atteinte, nous avons M. *Delisle* lui-même pour témoin, qui, dans le plan de *Paris*, qu'il a fait graver, & qu'il a publié lui-même, & auquel il renvoie dans ce même Mémoire, n'a nullement fait des Quarrés des figures ci-dessus mentionnées; mais il a donné à leurs côtés entr'eux le rapport de 8 à 7, qui est aussi approchant de leur vraie proportion qu'on puisse l'exprimer par lignes dans un Plan de la grandeur de celui-ci.

Voilà, je l'avoue, ce qui me paroît difficile à concilier. Il faut que M. *Davall* ait conçu que M. *Delisle* laissant là son Plan de *Paris*, le seul cependant dont il ait fait mention dans son Mémoire, & qu'il ait jamais donné, en a tracé tout exprès un autre sans égard au premier, tout différent, & même tout contraire, dans l'unique dessein de faire la comparaison de *Paris* avec *Londres*. Mais il n'y avoit, comme je l'ai déjà remarqué, qu'à lire la suite de l'énoncé de M. *Delisle*, pour se convaincre que le Plan sur lequel il avoit mesuré l'étendue de *Paris*, pour la comparer à l'étendue de *Londres*, étoit celui-là même où l'on avoit vû les Rectangles.

Ce que je comprends encore plus difficilement, c'est la conclusion que tire M. *Davall* de la fausse hypothèse de M. *Delisle*, en faveur de l'étendue de *Londres*. Car voici comment il raisonne :

Or est-il que dans le Mémoire que nous venons d'examiner, M. *Delisle* avoüe lui-même qu'en mesurant *Londres*, il a tracé des Quarrés, qui contiennent 15 secondes d'un grand Cercle, & dont il dit que *Londres* contient 60. Donc, & par les raisons précédentes, pour comparer *Paris* avec *Londres*, nous devons retrancher des 63 Rectangles que *Paris* contient, une quantité en raison de 8 à 7; mais parce qu'elle est un peu au de-là de la véritable, faisons seulement ce retranchement dans le rapport de 9 à 8, qui est un peu plus petit qu'il ne faut. Par-là le nombre des Quarrés contenus dans *Paris*, & dont le côté est 15 secondes d'un grand Cercle, sera réduit au rapport de 63 à 56. Et par conséquent selon la manière même de mesurer de M. *Delisle*, la grandeur de

- » *Londres* sera à celle de *Paris* comme 60 est à 56, ou comme
 » 15 est à 14, c'est-à-dire, que *Londres* sera plus grand que
 » *Paris* d'un quatorzième.

Comment conçoit-on que M. *Delisle* mesurant l'étendue de *Londres* sur le même pied qu'il a mesuré l'étendue de *Paris*, le rapport de grandeur entre ces deux Villes ne se trouve pas le même, quelle que soit la méthode qu'il y a employée? n'est-ce pas, dans le cas présent, comme s'il s'étoit servi d'une toise de 5 pieds, au lieu d'une toise de 6 pieds? Il en résultera une surface absolue plus grande ou d'un plus grand nombre de toises qu'il ne faut pour *Paris*, & pour *Londres*, mais les surfaces relatives & leurs rapports ne demeureront-ils pas les mêmes? M. *Delisle* a dit expressément dans son Mémoire, & M. *Davall* n'a pas oublié de le rapporter, qu'il avoit mis le Plan de *Londres* sur la même échelle que celui de *Paris*. Qu'il y avoit tracé de même des Quarrés de 15 en 15 secondes d'un grand Cercle, & qu'alors il s'étoit trouvé en état de comparer immédiatement la grandeur de ces deux Villes. Voilà donc une mesure commune, & par conséquent un rapport de grandeur toujours le même. Mais tâchons de démêler encore, s'il est possible, les suites que peut avoir eu cette méthode, en la prenant selon la dernière rigueur.

M. *Delisle* ne parle pas de la quantité de secondes en Longitude qu'il a données à la portion des petits Cercles ou des Paralleles de *Londres*, relativement aux 15 secondes de Latitude qu'il a pris sur les Méridiens ou grands Cercles. Ce qui, en supposant toujours la fausse hypothèse des Quarrés, peut être entendu de plusieurs manières, mais dont aucune cependant ne favorise la conséquence tirée par M. *Davall*.

Supposons premièrement que M. *Delisle* a attribué 20 secondes au côté du Quarré qui exprime les degrés de Longitude du Parallele de *Londres*, en donnant le même intervalle aux Méridiens du Plan de cette Ville, qu'il avoit donné à ceux du Plan de *Paris*. C'est là tout ce qu'on peut imaginer de plus rigoureux d'après son silence là-dessus, & en vertu de l'identité de méthode & d'échelle qu'il dit avoir employées pour les

deux Plans. Mais en ce cas, bien-loin que la conséquence de M. Davall soit juste, & que celle de M. Delisle soit peu favorable à l'étendue de *Londres*, il suit que *Londres* a réellement beaucoup moins de surface par rapport à *Paris*, que M. Delisle ne lui en avoit donné. Car *Londres* étant plus septentrional que *Paris*, d'environ $2^{\circ} 40'$, son Parallele contiendra des degrés de Longitude plus petits, en raison des Sinus de complément des deux Latitudes, ou à peu-près de 17 à 18. Donc selon le calcul & le raisonnement qu'a fait M. Davall à l'égard de *Paris*, & qu'en rigueur, on doit faire de même à l'égard de *Londres*, il faudra que 15 secondes d'un grand Cercle répondent encore à un plus grand nombre de secondes du Parallele de *Londres*, qu'elles ne faisoient à l'égard du Parallele de *Paris*. Si l'on formoit donc, comme il le demande, des Rectangles dont le côté supérieur contiñt 20", l'autre côté qui lui est perpendiculaire, & auquel il en faut donner 15 d'un grand Cercle, devroit avoir un plus grand rapport avec lui sur le Plan de *Londres*, que sur le Plan de *Paris*. Ou si enfin l'on tombe dans l'erreur de ne donner à ce second côté que la longueur de celui de 20" du Parallele, comme on suppose qu'il avoit été pratiqué à l'égard de *Paris*, & que ces figures deviennent des Quarrés parfaits, ces Quarrés seront relativement encore plus défectueux par leur petitesse à l'égard de *Londres*, qu'ils ne l'étoient à l'égard de *Paris*. Donc la surface de *Londres* en contiendra un plus grand nombre qu'elle n'auroit contenu de Rectangles; donc si l'on évalüe la surface de chacun de ces Quarrés en toises quarrées, sur le même pied que les Rectangles, & comme s'ils n'étoient pas défectueux, & que de leur somme on en déduise la surface totale de la Ville de *Londres*, cette surface paroitra plus grande qu'elle n'est réellement, & plus encore que n'avoit paru celle de *Paris*; en raison inverse des Sinus du complément de Latitude de ces deux Villes, c'est-à-dire, comme 18 est à 17. Donc l'erreur de M. Delisle doit avoir plus influé sur l'étendue de la Ville de *Londres* en excès, qu'elle n'avoit fait sur l'étendue de la Ville de *Paris*, d'environ $\frac{1}{18}$. Nous

évaluions toujours ici les degrés des Paralleles, de même que ci-dessus, sur l'hypothese de la Terre sphérique, & non sur le pied de celle du sphéroïde oblong, ou applati.

Secondement, si l'on veut que M. *Delisle*, ayant eû égard à la Latitude de *Londres*, ait transporté sur les Quarrés qui résultent de l'interfection des Méridiens, & des Paralleles tracés sur le Plan de cette Ville, une erreur proportionnelle à celle qui lui est reprochée touchant la dimension de *Paris*; (car enfin il ne seroit pas raisonnable de penser que M. *Delisle* ne sçavoit pas que la Latitude de ces deux Villes est différente; & que *Londres* étant plus éloigné de l'Equateur que *Paris*, les degrés de Longitude de son Parallele, devoient être en moindre raison avec ceux de l'Equateur, & qu'il en falloit un plus grand nombre pour égaler la longueur de 15 degrés d'un grand cercle; & il n'y a point d'équivoque qui puisse l'avoir fait tomber dans cette méprise:) si l'on fait, dis-je, cette supposition, le rapport conclu par M. *Delisle* demeure dans son entier, & il faut dire avec lui que *Paris* est plus grand que *Londres* d'un vingtième, sans y comprendre les Jardins considérables & les grands Enclos de ces deux Villes, ou d'un sixième, en y comprenant les grands Jardins, & les grands Enclos.

Que faudroit-il donc pour conclurre de l'énoncé, & de la méthode de M. *Delisle*, que *Londres* est plus grand que *Paris* d'une quatorzième partie? rien de moins que de faire opérer ce sçavant Géographe d'une manière toute différente de celle qu'il dit qu'il a fait, & la plus extravagante du monde. Il faudroit lui faire diviser le Plan de *Londres* en Rectangles convenables, tandis qu'il n'auroit divisé le Plan de *Paris* qu'en Quarrés défectueux; ou, si l'on veut, qu'il ait divisé le Plan de *Londres* en des Quarrés, dont l'un des côtés pris sur un grand Cercle ou sur le Méridien, soit, comme il dit, de 15"; il faut que l'autre côté, qui fait partie du Parallele, réponde nécessairement, & quoiqu'ait voulu faire M. *Delisle*, au nombre de secondes en Longitude que doit comporter ce Parallele, sçavoir à environ 24" 6". Car par ce moyen chaque partie

de la surface de *Londres* contenant un plus petit nombre de ses Quarrés, que pareille portion de la surface de *Paris* ne contient des siens, & attribuant à chaque espece de Quarré la même aire, & le même nombre de toises, il sera possible que *Londres* paroisse être plus petit que *Paris*, quoique réellement plus grand. En un mot, il faut faire opérer M. *Delisle* sur son Plan de *Paris*, dont la seule inspection devoit le redresser, de la manière la plus inusitée, & la plus fautive, & lui faire ensuite mesurer l'étendue de *Londres*, selon toutes les regles de l'Art. C'est-là aussi sans doute ce qu'a prétendu M. *Davall*; puisque, comme on a vû, des 63 Quarrés que M. *Delisle* donne à l'étendue de *Paris*, il en retranche 7; & les réduit à 56, & qu'il n'ôte rien des 60 Quarrés que le même M. *Delisle* donne à l'étendue de *Londres*. Je laisse à penser aux personnes équitables, & à M. *Davall* lui-même, quand il voudra bien y faire attention, s'il est possible d'imaginer rien de pareil.

Après tout ce qui a été remarqué ci-dessus, & que je crois suffisant pour justifier les calculs & les conclusions de M. *Delisle*, je ne sçaurois rien ajoûter de plus fort, sinon que j'ai vû les Plans de *Paris*, & de *Londres*, ou les deux feüilles mêmes sur lesquelles il avoit établi ses dimensions & son calcul, & qu'en ayant examiné toutes les parties, je n'y ai rien trouvé qui ne soit entièrement conforme à ce que je viens de dire. La feüille de *Paris* ne consiste que dans le Plan même gravé en 1716, dont nous avons parlé, augmenté seulement à la main de quelques nouveaux bâtimens considérables qui avoient été faits depuis, & celle de *Londres* est, comme il a été dit, la Carte de *Morden* rectifiée ou augmentée de même sur les nouvelles dimensions que M. *Delisle* avoit reçues. Nulle division par Quarrés, & par-tout, dans l'une & dans l'autre, des Rectangles relatifs à la Latitude du lieu. C'est M. *Buach*, de cette Académie, digne disciple de feu M. *Delisle*, & ensuite son gendre, & l'héritier de ses Papiers, qui a bien voulu me communiquer ces deux Plans. J'ai prévenu en quelque façon la recherche qu'il méditoit là-dessus, par la commodité que

j'ai eu de voir avant lui, l'Ecrit de M. *Davall*, & par l'engagement où je me suis trouvé d'en dire mon sentiment, à l'occasion d'une dispute qui s'étoit muë sur ce sujet. Mais le Public n'y perdra rien, si M. *Buach* se détermine, comme il le fait espérer, à mesurer lui-même, tant sur les Mémoires de M. *Delisle*, que sur de nouvelles pieces, l'étendue de *Paris* & de *Londres*, & à justifier par-là d'une manière encore plus directe, & plus détaillée que je n'ai fait, le fameux Géographe que tout le monde sçavant regrette, en demeurant riche du fruit de ses travaux.

OBSERVATIONS METEOROLOGIQUES

FAITES

PENDANT L'ANNEE M. DCCXXX.

Par M. MARALDI.

ON a vû plusieurs fois pendant l'année 1730, l'Aurore Boréale, mais elle n'a été éclatante & sensible que le 9 d'Octobre qu'on l'a vûë à 8^h du soir, élevée sur l'horison de 15 à 20 degrés vers le Nord-ouëst, partagée en deux Colomnes lumineuses, inclinées à l'horison, de manière que la partie supérieure de ces Colomnes regardoit l'Orient, & la partie inférieure le Nord. Il y avoit entre ces Colomnes un espace serein, sans Lumière, où étoient les Pleïades. Ces deux Colomnes occupoient chacune 16 à 18 degrés de longueur sur 5 à 6 de largeur; le reste du Ciel étoit fort serein, & on distinguoit plusieurs Etoiles du Taureau & de Persée, au travers même des Colomnes lumineuses.

Celle qui étoit à droite des Pleïades, c'est-à-dire, plus vers l'Orient, commença à diminuer à 8^h 25', pendant que celle qui étoit à gauche augmentoit de grandeur, jusqu'à ce que l'autre fût entièrement cessée. Elle s'éleva ensuite, & à 8^h $\frac{3}{4}$ elle étoit entre les Pleïades & les Etoiles de Persée.

Elle diminua ensuite, & cessa entièrement de paroître un peu après 9 heures.

Observations de la Pluie tombée à l'Observatoire pendant l'année 1730.

	pouc.	lign.		pouc.	lign.
EN Janvier	0	0 $\frac{4}{6}$	En Juillet	2	1 $\frac{3}{6}$
Février.....	1	4	Août	0	8 $\frac{1}{6}$
Mars.....	1	5 $\frac{1}{6}$	Septembre ...	1	3 $\frac{1}{6}$
Avril.....	1	6	Octobre	1	9 $\frac{2}{6}$
Mai.....	1	3 $\frac{2}{6}$	Novembre ...	1	1 $\frac{2}{6}$
Juin.....	2	6 $\frac{3}{6}$	Décembre....	0	11 $\frac{1}{6}$
	8	1 $\frac{4}{6}$		7	10 $\frac{4}{6}$

Donc la hauteur de la Pluie qui est tombée pendant toute l'année 1730 est de 16 pouces & $\frac{1}{3}$ de ligne, qui est moindre de la hauteur des années moyennes établie l'année 1726 par M. Maraldi de 17 pouces $\frac{1}{2}$. La hauteur des six premiers mois est de 8 pouc. 1 ligne & $\frac{2}{3}$, & celle des six derniers est de 7 pouces 10 lign. & $\frac{2}{3}$, avec la seule différence de 3 lignes.

La Pluie a été plus abondante dans le mois Juin & celui de Juillet qu'en aucun autre mois de l'année.

Il y a eû pendant le mois de Juillet de grands Vents de Sud-ouïest qui ont causé plusieurs orages ; le 4 de ce mois ; à 3 heures après midi, il tomba une grande quantité de Grêle, dont les grains étoient fort gros.

Observations sur le Thermometre.

Le plus grand froid marqué par le Thermometre est arrivé le 20 & le 27 de Janvier, la liqueur descendit le 20 à 24 degrés, & le 27 elle a été à 23 degrés, ce qui marque un froid modéré, puisque l'année 1709 elle descendit à 5 degrés.

La chaleur de l'Été a été aussi modérée, car la liqueur du même Thermometre a toujours été pendant les mois de

576 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE

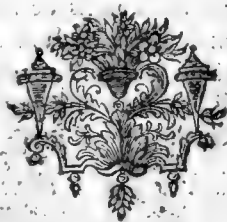
Juin & Juillet au dessous de 60 degrés, & elle n'est montée qu'à 63 degrés le 4 & le 5 d'Août au lever du Soleil, le temps étant serein & tranquille. Le 4 de ce mois, à 3 heures après midi, la liqueur étoit à 74 degrés, mais le 5, à la même heure, s'étant levé un vent de Sud-ouïest, elle monta à 76 degrés. Dans les plus grandes chaleurs des années précédentes, elle est montée jusqu'à 82 degrés.

Sur le Barometre.

On a observé la moindre hauteur du Barometre de 27 pouces 2 lignes le 9, le 10 & le 11 de Mars, le Ciel étant couvert, avec un petit vent de Sud-ouïest. La plus grande hauteur a été observée de 28 pouces 5 lignes le 22 de Janvier par un temps serein & un vent de Nord. Le 23, le 25, & le 26 de Novembre il a été à 28 pouces 4 lignes.

Sur la Déclinaison de l'Aimant.

Le 20 Novembre on a observé avec une Aiguille de 4 pouces la déclinaison de l'Aimant de $14^{\circ} 25'$ vers le Nord-ouïest.



MESSIEURS

MESSIEURS DE LA SOCIÉTÉ

*Royale des Sciences, établie à Montpellier, ont
envoyé à l'Académie l'Ouvrage qui suit, pour
entretenir l'union intime qui doit être entre
elles ; comme ne faisant qu'un seul Corps, aux
termes des Statuts accordés par le Roy au mois
de Février 1706.*

PHASCOLUS PEREGRINUS,

flore roseo, semine tomentoso.

*Phascolus Indicus, hederæ folio anguloso, semine ob-
longo, lanuginoso. Raii Hist. 3. tom. 438.*

Par M. NISSOLE.

APRÈS avoir semé quelques Graines mêlées, que j'avois
reçûes de Hollande, j'eûs le plaisir de voir lever plu-
sieurs Plantes curieuses, parmi lesquelles je trouvai

Premièrement, cette espèce de Haricot qu'il me fût im-
possible de ranger sous aucune des espèces de ceux qui ont
été décrits par les Auteurs de Botanique que j'ai lûs, & c'est
ce qui m'a déterminé à en donner la description & la figure.

Sa racine est longue d'environ un pied sur trois ou quatre
lignes d'épaisseur au collet, blanche en dedans, & couverte en
dehors d'une pellicule qui est ordinairement grisâtre, mais qui
se trouve quelquefois de couleur brune tirant sur le rougeâtre,

Mem. 1730.

. DDdd

de sorte qu'il y a beaucoup d'apparence qu'elle se charge toujours de la couleur de la terre qu'elle occupe.

A deux pouces au dessous du collet, elle est garnie de quelques fibres d'un demi-pied de long sur deux lignes d'épaisseur à leur naissance, entremêlées en quelques endroits de quelque peu de chevelu. Toutes ces fibres, aussi-bien que le corps de la racine qui les fournit, diminuent considérablement de grosseur à mesure qu'elles s'étendent & s'enfoncent dans la terre, desorte qu'elles sont très-déliées à leur extrémité.

Il s'éleve de cette racine une tige de sept à huit pieds de hauteur sur deux lignes de grosseur à sa naissance, qui à un pouce au-dessus de la terre se divise en plusieurs branches qui sont de différentes longueurs, souples & pliantes, & qui, comme celles des autres especes de Haricot, s'entortillent aux Plantes voisines, ou aux échalas qu'on leur a préparés pour les soutenir. Toutes ces tiges sont couvertes d'une petite pellicule d'un verd-brun, lorsque la Plante est encore jeune, mais qui dans la suite devient rougeâtre, & garnie de petits poils blancs fort déliés.

Les feuilles qui garnissent ces tiges y sont attachées alternativement sur des queues fort déliées d'environ un pouce de long, qui fournissent sur le dos de chacune, trois petits filets qui disparaissent à leur extrémité. Ces feuilles sont fort irrégulières, d'un verd-mat, & disposées toujours trois à trois sur la même queue. Les plus grandes & les plus régulières ont environ un pouce & demi de long sur un pouce de large, elles sont arrondies à leur base, & s'élargissent insensiblement jusque vers le milieu, & diminuant ensuite peu à peu se terminent en pointe, de sorte qu'elles représentent assez bien un fer de picque. Il s'en trouve quelques-unes qui sont découpées en trefle, & il y en a d'autres qui ont des découpages si différentes & si bizarres, que j'aurois été bien embarrassé à les décrire.

Les fleurs qui sont légumineuses, de couleur de rose pâle,

naissent aux aisselles des feuilles, elles sont soutenues par des queues d'environ trois pouces de long. Il s'en trouve ordinairement quatre ou cinq sur la même queue. L'extrémité de l'étendart ou feuille supérieure est recourbé, & d'une couleur un peu plus foncée que celle des autres parties de la fleur, car elle tire sur le rouge-brun.

Lorsque ces fleurs commencent à se faner, elles blanchissent insensiblement, & deviennent enfin jaunâtres, elles tombent ensuite, & l'on voit alors sortir du fond des calices qui soutenoient les fleurs, les pistils qui deviennent des gousses presque rondes d'environ deux pouces & demi de longueur, sur trois ou quatre lignes de grosseur. Ces gousses sont composées de deux cosses tannées, blancheâtres & luisantes en dedans, qui renferment six ou sept semences de figure presque cylindrique, longues d'environ quatre lignes sur une & demie de diamètre; elles sont noirâtres & couvertes d'un petit duvet blanc. Elles sont attachées aux côtés par un petit filet blanc, bordé de noir, d'environ deux lignes de long, y en ayant, au côté qui lui est opposé, un noir de la même grandeur.

Dès que j'eus examiné la Plante qui suit, je trouvai qu'elle avoit beaucoup de rapport avec le *Luffa Arabum*; de sorte que je fus dans l'obligation de la ranger à la classe que M. Tournefort avoit déjà établi dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, c'est pourquoi je la nommai

Luffa Arabum fructu echinato, fructus momordicæ vulgaris facie.

Mais j'appris dans la suite qu'elle avoit été nommée par M. Caspard Commelin, & qu'il en avoit donné la description & la figure dans le Catalogue des Plantes étrangères, imprimé in 4.^o à Leyden, sous le nom de

Momordica Americana fructu reticulato sicco.

Cependant si on y fait attention, & qu'on examine sérieusement les fruits du *Momordica vulgaris*, qui sont charnus & humides en dedans, & couverts d'une petite pellicule rouge,

580 MEM. DE L'ACAD. ROYALE DES SCIENCES.
avec cette différence que ceux du *Luffa* sont entièrement
secs & arides, & dans lesquels on ne trouve que quelques
filaments qui renferment quelques fruits noirâtres, on pourra
voir facilement la différence de ces différentes especes de
Plantes.

F I N.

FAUTES A CORRIGER

Dans les Mémoires de 1727.

*P*age 356, ligne 21, pour $10^{\circ} 20'$ de Libra, lisez $10^{\circ} 20'$ d'Aries.

Page 357, ligne 15, pour est d'une année commune 34
jours & près de deux heures, ou de 399 jours & près de
deux heures, lisez est d'une année commune 33 jours 21^h
& $\frac{1}{4}$, ou de 398 jours $21^h 14'$.

Dans les Mémoires de 1729.

Page 403, ligne 9, pour $20^{\circ} 6'$ d'Aries, lisez $20^{\circ} 6'$
du Taureau.



